

УДК 539.3, 517.955.8

НЕКОТОРЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗВИТИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ПРИ КВАЗИХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

И.А. Пантелеев, О.А. Плехов, О.Б. Наймарк

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Разработанная ранее статистическая теория поведения твердого тела с мезоскопическими дефектами позволила сформулировать феноменологическую модель и получить кинетические уравнения для двух независимых параметров порядка – деформации, обусловленной появлением дефектов, и параметра структурного скейлинга. Анализ автомодельных решений построенных определяющих соотношений позволил установить существование двух точек бифуркации, одна из которых соответствует переходу от пластического к квазихрупкому поведению системы. Ранее было показано, что в окрестности точки бифуркации кинетическое уравнение для параметра плотности дефектов имеет автомодельные решения сингулярного типа (так называемые режимы с обострением), которым присуще конечное время обращения в бесконечность параметра плотности дефектов. На основе метода усреднения проведён качественный анализ кинетического уравнения для параметра поврежденности, установлены типы точек равновесия, характерные фазовые портреты поведения системы, зависимости амплитуды и координаты полуширины одиночной локализованной структуры от величины приложенного напряжения и начального положения системы.

Ключевые слова: качественный анализ дифференциальных уравнений, теория структурно-скейлинговых переходов, локализация разрушения, режимы с обострением

SELF-SIMILARITY MECHANISMS OF DAMAGE GROWTH IN SOLIDS EXPERIENCING QUASI-BRITTLE FRACTURE

I.A. Panteleev, O.A. Plekhov and O.B. Naymark

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

A phenomenological model and kinetic equations for two independent order parameters (defect density tensor and structure scaling parameter) have been constructed in the framework of the recently developed theory describing the behavior of solids with mesoscopic defects. The analysis of self-similar solutions of the constitutive relations has shown that there are two bifurcation points, one of which corresponds to a transition from plastic to quasi-brittle behavior. As it has been shown previously, in the vicinity of the bifurcation points the kinetic equation for the parameter of defect density has self-similar solutions of a singular type (blow-up regimes), i.e. the parameter of defect density approaches infinity in finite time. The method of averaging is used to analyze qualitatively the kinetic equation for the damage parameter, to determine the types of equilibrium points and characteristic patterns of the system behavior and to reveal the dependence of the amplitude and half-width coordinate of a solitary localized structure on the value of the applied stress and initial location of the system.

Keywords: qualitative analysis of the differential equations, conception of structural-scaling transitions, damage localization, blow-up regimes

1. Введение

В настоящее время хорошо известно, что прочностные и деформационные свойства определяются эволюцией дефектной структуры материала. Значительные успехи при описании процессов деформирования и разрушения были достигнуты в рамках

феноменологических моделей, использующих эмпирическую информацию о поведении материала при различных историях нагружения [1].

В работах Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова [2, 3] для описания процесса накопления повреждений впервые вводится скалярный параметр поврежденности, определяемый площадью трещин, приходящихся на единицу площади поперечного сечения тела. Дальнейшим развитием данного подхода стал учёт анизотропии процесса накопления повреждений и введение тензорных параметров поврежденности [4–7], в общем случае не связанных с какой-либо характеристикой реальных дефектов материала.

В работах [8, 9] в рамках статистической модели твердого тела с мезоскопическими дефектами вводится тензорный параметр поврежденности материала, который имеет смысл параметра порядка среды, а именно деформации p , обусловленной появлением дефектов:

$$p_{ik} = n \langle s_{ik} \rangle. \quad (1)$$

Здесь n — плотность микродефектов, $\langle s_{ik} \rangle$ — тензор, описывающий геометрию единичного микродефекта, компоненты которого имеют вид: $s_{ik} = \frac{1}{2} s (v_i b_k + b_i v_k)$ для микросдвига (v_i — компоненты единичного вектора нормали к плоскости сдвига \vec{v} ; b_k — компоненты единичного вектора направления сдвига \vec{b} ; s — интенсивность сдвига) и $s_{ik} = s v_i v_k$ для микротрещины (v_i — компоненты единичного вектора нормали к основанию микротрещины, s — объем микротрещины). Анализ результатов решения статистической задачи поведения ансамбля дефектов под действием внешнего силового поля для различных типов дефектов позволил установить существование второго параметра порядка среды с мезодефектами — параметра структурного скейлинга δ , связанного с двумя характерными масштабами: размером зародышей дефектов и расстоянием между дефектами [8].

В работе [8] методами неравновесной термодинамики для введенных параметров порядка получены кинематические соотношения статистической модели. В одномерном случае (когда $p_{xx} = p, p_{xy} = p_{yy} = p_{zz} = 0$) они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\Gamma_p \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} &= -\Gamma_\delta \frac{\partial F}{\partial \delta}, \end{aligned} \quad (2)$$

где Γ_p, Γ_δ — кинетические коэффициенты, K — коэффициент, описывающий эффекты нелокальности в ансамбле дефектов, F — свободная энергия среды с мезодефектами.

Кинетические уравнения (2) определяют характерные реакции материала на приложенное напряжение σ : субмикроструктурное ($\delta > \delta_*$), пластическое ($\delta_c < \delta < \delta_*$) или квазихрупкое ($\delta < \delta_c$) поведение (Рис. 1) [10]. Под термином «субмикроструктурное» понимается особое деформационное поведение материала, наблюдающиеся для поликристаллов с характерным размером зерна порядка 100 нанометров. Автомодельный характер развития поврежденности при квазихрупком разрушении материала впервые был исследован в [8]. Как развитие этих результатов в настоящей работе проводится детальный качественный анализ автомодельных решений.

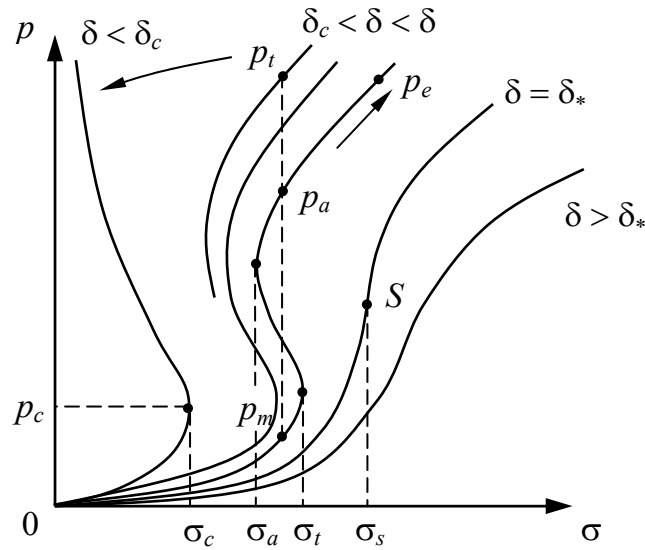


Рис. 1. Характерные нелинейные реакции среды на рост локализованных сдвигов в зависимости от напряжения σ для различных значений параметра структурного скейлинга δ

Следуя [8, 9, 11], в окрестности критической точки (σ_c, p_c) (Рис. 1) кинетическое уравнение для параметра поврежденности (2) можно записать в виде квазилинейного параболического уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx Q_\beta^1(p, \sigma_c) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q_\alpha^2(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где σ_c — приложенное критическое напряжение; $Q_\beta^1(p, \sigma_c)$, $Q_\alpha^2(p)$ — полиномы степени β и α соответственно (степень полинома определяется принятыми аппроксимациями сводной энергии и коэффициента нелокальности).

При достаточно больших значениях p в уравнении (3) можно пренебречь влиянием напряжения и учесть только старшие степени полиномов $Q_\beta^1(p)$, $Q_\alpha^2(p)$. Тогда уравнение (3) можно записать в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = qp^\beta + \frac{\partial}{\partial x} \left(kp^\alpha \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (4)$$

где q и k — коэффициенты при старших слагаемых $Q_\beta^1(p)$, $Q_\alpha^2(p)$.

Применительно к задачам газовой динамики, термодинамики, магнитной гидродинамики и нелинейной диффузии, как показано в работах в [11–13], в системе, эволюция которой описывается соотношением типа (4), могут существовать три типа автомодельных решений (три характерных режима) с обострением. Особенностью этих режимов является асимптотическое обращение рассматриваемой переменной в бесконечность за конечный промежуток времени. Реализация каждого из режимов зависит от величины параметров α и β .

HS-режим. При $1 < \beta < \alpha + 1$ в рассматриваемой среде реализуется волновой режим развития начального возмущения; за конечное время поврежденность возрастает до бесконечности во всем рассматриваемом пространстве.

S-режим. При $\beta = \alpha + 1$ увеличение плотности дефектов до бесконечности за конечное время происходит в локальной области рассматриваемого пространства, называемой фундаментальной длиной L_f . В этом режиме решение единственно и может быть получено в аналитическом виде

$$p(x, t) = (q(t - t_c))^{-1/\alpha} \left[\frac{2(\alpha + 1)}{\alpha(\alpha + 2)} \sin \left(\frac{\pi x}{L_f} + \pi \theta \right) \right],$$

где $L_f = 2 \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\alpha + 1} \sqrt{k/q}$ и имеет смысл пространственного периода решения,

не зависящего от начального распределения поврежденности p ; $t_c = \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha(\alpha + 2)} \frac{1}{p_0^\alpha q}$ —

время обострения (p_0 — максимальное значение p в области начального возмущения). Время появления очага разрушения τ_c складывается из двух времен: собственно времени обострения t_c (времени обострения автомодельного профиля) и времени индукции t_u (времени, необходимого на формирование автомодельного профиля при данном уровне нагрузки).

LS-режим. При $\alpha + 1 < \beta < \alpha + 3$ решение неединственно, так как в среде образуется конечное число диссипативных структур обострения (в отличие от HS- и S-режимов, при которых образующиеся структуры имеют единственную структурно устойчивую пространственно-временную форму). Спектр пространственно-временных форм диссипативных структур определяется из решения задачи (4) на собственные функции и собственные значения. Появление сложных диссипативных структур (структур, соответствующих старшим собственным функциям задачи (4)), формирующихся из простых, происходит только при достаточной близости к автомодельному решению начального профиля деформации, обусловленной дефектами. Образующиеся структуры имеют различный масштаб локализации, который зависит от свойств среды и максимального значения начального профиля. Численный анализ показывает, что объединение простых структур в сложные происходит при расстояниях между простыми структурами L_c , близких по величине к L_f .

Особенностью LS-режима является зависимость фундаментальной длины и времени обострения от профиля начального возмущения. Выражение для L_f получено в [12] из мажорантных соображений:

$$L_f = \left(\pi \sqrt{\frac{2(\alpha + 1 + \beta)k}{\alpha(\beta - 1)q}} W_0^{(\alpha + 1 - \beta)} \right)^{1/(\alpha + 3 - \beta)}. \quad (5)$$

Здесь $W_0 = ap_{\max}$, где a — размер области начального возбуждения, p_{\max} — максимальная плотность дефектов в этой области. В случае $a > L_f$ выражение (5) имеет вид:

$$L_f = \pi \sqrt{\frac{2(\alpha + 1 + \beta)k}{\alpha(\beta - 1)q}} p_0^{(\alpha + 1 - \beta)/2}, \quad (6)$$

где p_0 — максимальное значение плотности дефектов вблизи центра симметрии начального профиля. Время обострения в LS-режиме может быть оценено сверху как

$$t_2 = \frac{(\alpha + 1 + \beta)[(\alpha + 2)(\beta - 1)]^{-1}}{p^{\beta-1}(t_1, 0)q}, \quad (7)$$

где $p(t_1, 0)$ — максимальное значение плотности дефектов вблизи центра симметрии в момент t_1 , когда начальное возмущение выходит на автомодельный профиль. Стоит отметить, что в LS-режиме процесс обострения локализуется в пространственной области, которая со временем уменьшается.

Решение, соответствующее HS-режиму, активно применяется при моделировании задач горения, взрыва, физики плазмы и эволюции биологических систем [13]. Решения, отвечающие S- и LS-режимам, использовались, в частности, при построении модели ветвления трещин в квазихрупких материалах и при моделировании процессов ветвления трещин и распространения волн разрушения [14, 15].

В рамках рассматриваемого статистического подхода актуальной задачей является установление возможного типа автомодельного решения с обострением для кинетического уравнения, определяющего развитие поврежденности в случае квазихрупкого поведения материала для произвольного начального уровня поврежденности и значения приложенного напряжения.

Описание развития дефектной подсистемы при формировании очага макроскопического разрушения как автомодельного решения в режиме с обострением является качественно новым результатом в физике и механике разрушения. Аналогичные предположения о появлении обостряющихся локализованных структур при разрушении обсуждались ранее в работах [16–20]. Наличие нелинейности и объемных источников в эволюционном уравнении для параметра поврежденности является принципиально важным моментом для нагруженного твердого тела как открытой самоорганизующейся системы [21].

2. Качественный анализ кинетического уравнения для параметра поврежденности

Для установления возможных сценариев развития локализованной поврежденности в квазихрупком материале при фиксированном напряжении проведем качественный анализ кинетического уравнения (2) с использованием метода усреднения, предложенного в работе [22]. Этот метод широко применяется для анализа нелинейных параболических дифференциальных уравнений, возникающих в различных областях науки [23, 24].

Рассмотрим симметричную область с ненулевой поврежденностью p , локализованную в одномерном пространстве. Для описания квазихрупкого поведения материала аппроксимируем неравновесную свободную энергию полиномом десятой степени. Такой вид аппроксимация является прямым следствием решения статистической задачи эволюции дефектов в квазихрупком материале [10]; при этом уравнение эволюции поврежденности преобразуется к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \Gamma_p \left[0,0457 - \frac{152,3810\sigma}{\delta} + p \left(5,8528 - \frac{1,2381}{\delta} \right) - 11,8924 p^2 + \right.$$

$$+16,7908p^3 - 15,0209p^4 + 8,6888p^5 - 3,2777p^6 + 0,7996p^7 - 0,1215p^8 + \\ +0,001p^9 - 0,0003p^{10} \Big]. \quad (8)$$

В последующих выкладках в уравнении (8) примем $\Gamma_p = 1$, что не нарушает общность задачи. Для оценки влияния нелинейности на кинетику локализованной структуры рассмотрим два случая значений коэффициента нелокальности: постоянный $K = K_0$ и нелинейный $K = K_0 e^p$.

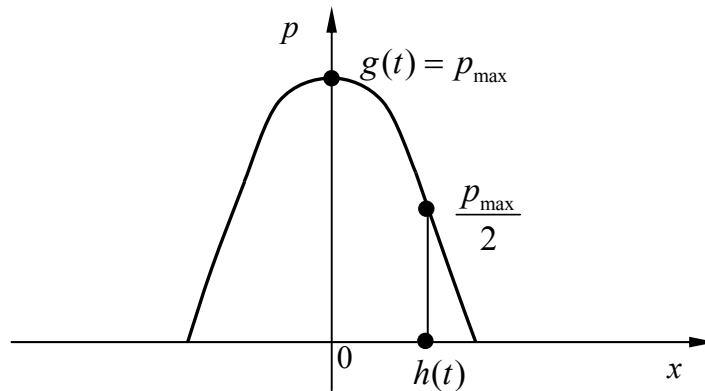


Рис. 2. Локализованная диссипативная структура параметра плотности дефектов

Согласно [22] предположим, что решение уравнения (8) представимо в виде

$$p(x, t) = g(t) f(\xi), \quad \xi = x/h(t), \quad (9)$$

где функция $g(t)$ описывает эволюцию амплитуды структуры с течением времени, $h(t)$ — эволюцию координаты полуширины с течением времени, $f(\xi)$ — пространственную форму структуры (Рис. 2). Далее, интегрируя (8) по пространственной переменной и полагая, что на бесконечности поток $w(t, x) = KT_x$ обращается в нуль, получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF}{dp} dx. \quad (10)$$

Умножая (8) на $p(x, t)$ и интегрируя по пространственной переменной, найдем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p \frac{\partial}{\partial x} \left(K \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p \partial F}{\partial p} dx. \quad (11)$$

Подставляя представление (9) в (10) и (11), придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно временных производных амплитуды диссипативной структуры и координаты полуширины при постоянном коэффициенте нелокальности:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{g} &= \frac{g K_0 A_1}{h^2} + B_1 \left(0,0467 - \frac{152,3810\sigma}{\delta} \right) + 11,8924 g^2 (A_2 - B_2) - \\ &- 16,7908 g^3 (A_3 - B_3) + 15,0209 g^4 (A_4 - B_4) - 8,6888 g^5 (A_5 - B_5) + \\ &+ 3,2776 g^6 (A_6 - B_6) - 0,7886 g^7 (A_7 - B_7) + 0,1215 g^8 (A_8 - B_8) - \\ &- 0,0104 g^9 (A_9 - B_9) + 0,0003 g^{10} (A_{10} - B_{10}), \\ \dot{h} &= -\frac{K_0 A_1}{h} - \frac{B_1 h}{g} \left(0,0467 - \frac{152,3810\sigma}{\delta} \right) + h \left(5,8528 - \frac{1,2381}{\delta} \right) - \\ &- 11,8924 g h (2A_2 - B_2) + 16,7908 g^2 h (2A_3 - B_3) - 15,0209 g^3 h (2A_4 - B_4) + \\ &+ 8,6888 g^4 h (2A_5 - B_5) - 3,2776 g^5 h (2A_6 - B_6) + 0,7886 g^6 h (2A_7 - B_7) - \\ &- 0,1215 g^7 h (2A_8 - B_8) + 0,0104 g^8 h (2A_9 - B_9) - 0,0003 g^9 h (2A_{10} - B_{10}), \end{aligned} \right. \quad (12)$$

где $A_{n,n \neq 1} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^n d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f d\xi}$, $B_{n,n \neq 1} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^{n+1} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\xi}$, $A_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\xi}$, $B_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\xi}$,

при переменном коэффициенте нелокальности

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{g} &= \frac{g^3 K_0 L_1}{h^2} + \frac{g K_0 A_1}{h^2} + B_1 \left(0,0468 - \frac{152,3810\sigma}{\delta} \right) + 11,8924 g^2 (A_2 - B_2) - \\ &- 16,7908 g^3 (A_3 - B_3) + 15,0209 g^4 (A_4 - B_4) - 8,6888 g^5 (A_5 - B_5) + \\ &+ 3,2777 g^6 (A_6 - B_6) - 0,7886 g^7 (A_7 - B_7) + 0,1215 g^8 (A_8 - B_8) - \\ &- 0,0104 g^9 (A_9 - B_9) + 0,0004 g^{10} (A_{10} - B_{10}), \\ \dot{h} &= -\frac{g^2 K_0 L_1}{h} - \frac{K_0 A_1}{h} - \frac{B_1 h}{g} \left(0,0468 - \frac{152,3810\sigma}{\delta} \right) + h \left(5,8528 - \frac{1,2381}{\delta} \right) - \\ &- 11,8924 g h (2A_2 - B_2) + 16,7908 g^2 h (2A_3 - B_3) - 15,0209 g^3 h (2A_4 - B_4) + \\ &+ 8,6888 g^4 h (2A_5 - B_5) - 3,2777 g^5 h (2A_6 - B_6) + 0,7886 g^6 h (2A_7 - B_7) - \\ &- 0,1215 g^7 h (2A_8 - B_8) + 0,0104 g^8 h (2A_9 - B_9) - 0,0004 g^9 h (2A_{10} - B_{10}), \end{aligned} \right. \quad (13)$$

где $A_{n,n \neq 1} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^n d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f d\xi}$, $B_{n,n \neq 1} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^{n+1} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\xi}$, $A_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\xi}$, $B_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\xi}$, $L_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 f'^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\xi}$.

Рассмотрим условия равновесия одиночной локализованной структуры с начальной амплитудой $g(0) = g_0$ и полушириной $h(0) = h_0$. Форма структуры описывается уравнением $y = a(x+b)^2 + c$, где константы a, b, c являются решениями системы уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} ab^2 + c &= g_0, \\ a(-h_0 + b)^2 + c &= \frac{g_0}{2}, \\ a(h_0 + b)^2 + c &= \frac{g_0}{2}. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

На рисунке 3 представлены положения равновесия одиночной симметричной локализованной структуры для различных уровней напряжения при $\delta = 0,8$ и $K_0 = 1$. Из анализа кривых видно, что одному напряжению соответствуют две равновесных амплитуды структуры с различными размерами. Вид коэффициента нелокальности влияет на характер кривой соответствия равновесной амплитуды и полуширины.

Характерные равновесные диаграммы для различных значений параметра структурного скейлинга представлены на рисунке 4. Величина кинетического коэффициента в уравнении (8), подобно коэффициенту нелокальности, определяет только равновесный размер структуры (Рис. 5).

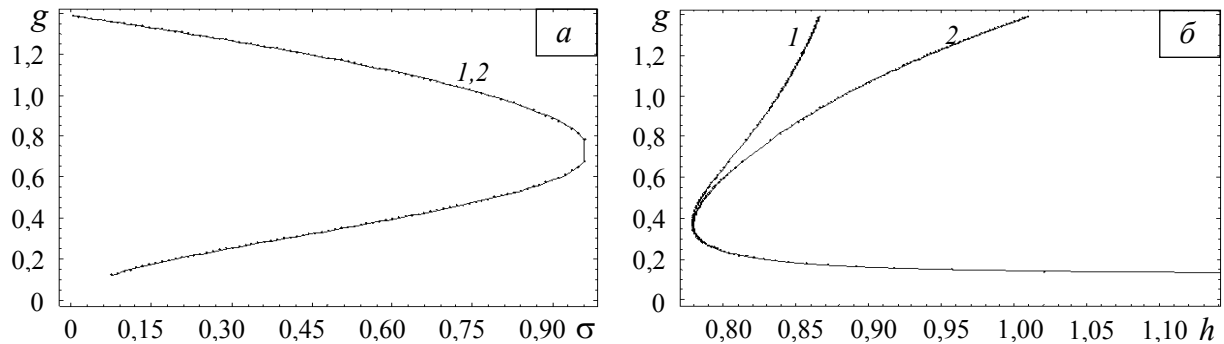


Рис. 3. Зависимость амплитуды структуры от приложенного напряжения (а); кривая соответствия амплитуды координате полуширины (б) для случая постоянного (кривая 1) и переменного (2) коэффициента нелокальности

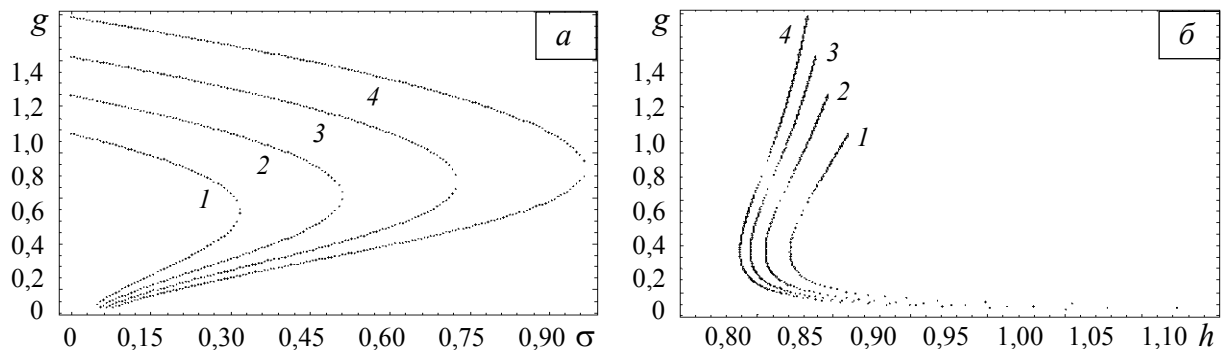


Рис. 4. Равновесные кривые $\sigma \sim p$ (а), $h \sim p$ (б) для различных значений параметра структурного скейлинга δ : 0,5 (кривая 1); 0,6 (2); 0,7 (3); 0,8 (4)

Для исследования поведения системы в окрестности точек равновесия построим систему уравнений первого приближения для переменных $u = g - g^*$, $w = h - h^*$, где (g^*, h^*) — положение равновесия системы при фиксированном напряжении σ^* (для случая нелинейного коэффициента нелокальности рассуждение и результаты аналогичны). Тогда систему (12) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}w + F_1(u, w), \\ \frac{dw}{dt} = a_{21}u + a_{22}w + F_2(u, w), \end{cases} \quad (15)$$

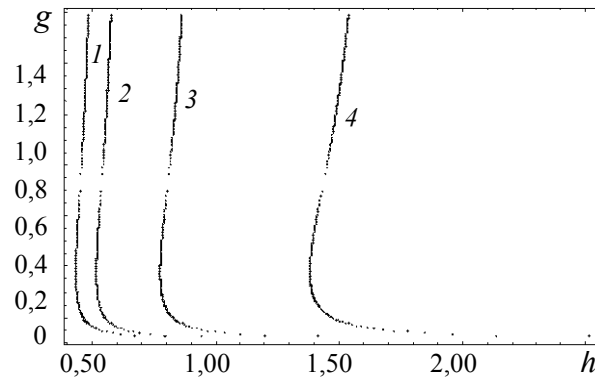


Рис. 5. Равновесная кривая $h \sim p$ для различных значений K_0/Γ_p : 0,1 (кривая 1); 0,2 (2); 1,0 (3); 10 (4).

где $F_1(u, w), F_2(u, w)$ — бесконечно малые величины при $(u, w) \rightarrow (0, 0)$,

$$a_{11} = -\frac{0,1169}{g^{*2}} - 32,6192 g^{*2} + 70,3615 g^{*4} - 81,5678 g^{*6} + 56,6637 g^{*8} - 24,5885 g^{*10} +$$

$$+ 6,7138 g^{*12} - 1,1205 g^{*14} + 0,1044 g^{*16} + \frac{2,5}{h^{*4}} + \frac{476,1910 \sigma^*}{g^{*2}}, \quad a_{12} = \frac{-10 g^*}{h^{*5}},$$

$$a_{21} = \frac{0,233867}{g^{*3}} + 2,7183 g^* h^* - 10,2344 g^{*3} h^* + 14,9818 g^{*5} h^* - 11,8512 g^{*7} h^* + 5,5883 g^{*9} h^* -$$

$$- 1,6167 g^{*11} h^* + 0,2815 g^{*13} h^* - 0,0271 g^{*15} h^* - \frac{476,1910 h^* \sigma^*}{g^{*3}},$$

$$a_{22} = 4,3052 - \frac{0,1170}{g^{*2}} + 1,3591 g^{*2} - 2,5586 g^{*4} + 2,4970 g^{*6} - 1,4814 g^{*8} + 0,5583 g^{*10} -$$

$$- 0,1347 g^{*12} + \frac{7,5}{h^{*4}} + \frac{238,0950 \sigma^*}{g^{*2}}.$$

Вычислим корни характеристического уравнения, соответствующего системе (15), и найдем его собственные векторы. На рисунке 6 показано расположение точек равновесия на фазовой диаграмме и классификация фазовых портретов в их окрестности. Все точки равновесия системы (15) являются неустойчивыми по Ляпунову и делятся на два типа: неустойчивый узел и неустойчивое седло. Причем одному значению напряжения соответствует два равновесных значения параметра поврежденности, отвечающие тому и другому типу точек равновесия. На рисунке 7 представлены характерные фазовые траектории в окрестности типичных равновесных точек при различных начальных условиях, полученные численным интегрированием.

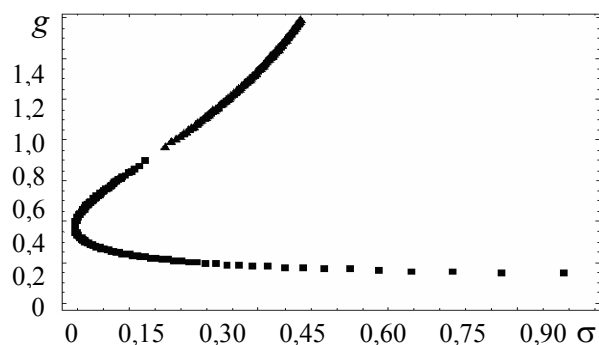


Рис. 6. Фазовая диаграмма и классификация фазовых портретов в окрестностях точек равновесия:
 ■ – неустойчивый узел, ▲ – неустойчивое седло

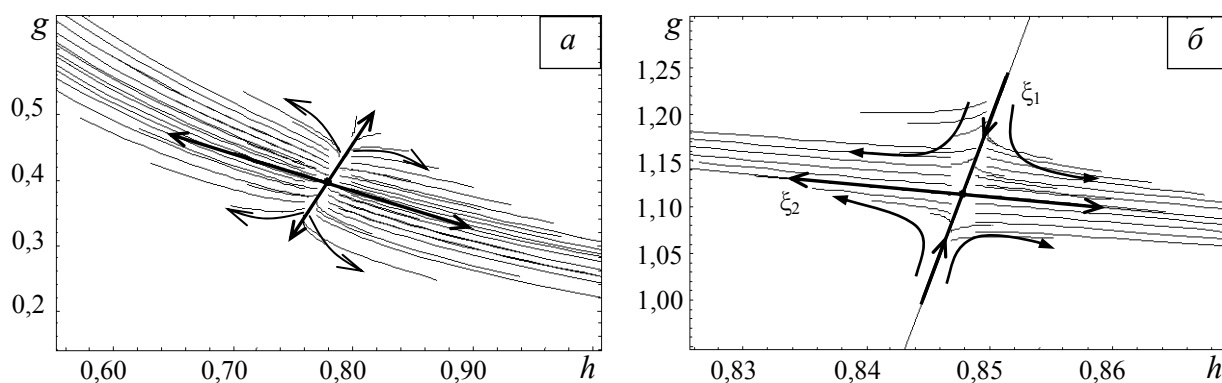


Рис. 7. Фазовый портрет в окрестности неустойчивого узла (а) и неустойчивого седла (б) (стрелками показано направление фазовых траекторий, ξ_1 и ξ_2 – сепаратрисы седла)

Рассматриваемая система (15) имеет два характерных участка фазовых траекторий: монотонное уменьшение амплитуды при увеличении размера структуры; резкое увеличение амплитуды при уменьшении размеров структуры. Важно отметить, что траектории второго типа являются траекториями LS-режима для параметра поврежденности. Таким образом, в случае квазихрупкого материала пространственно-локализованная симметричная структура p может эволюционировать в режиме с обострением, которому присуще уменьшение характерного размера этой структуры.

3. Заключение

Проведенный качественный анализ кинетического уравнения, следующего из решения статистической задачи эволюции дефектов в квазихрупком материале, позволил установить типы точек равновесия, характерные фазовые портреты в их окрестности и зависимости амплитуды и координаты полуширины одиночной симметричной локализованной структуры от величины приложенного напряжения. Результаты получены для произвольного начального положения системы и уровня приложенных напряжений с учётом точной аппроксимации неравновесной свободной энергии.

Использование физически обоснованного представления для неравновесной свободной энергии позволяет утверждать, что квазихрупкое разрушение может быть представлено набором автомодельных решений квазилинейного параболического уравнения LS-типа, описывающим неограниченный рост плотности дефектов на уменьшающемся пространственном масштабе.

На основе метода усреднения показано, что малое возмущение приложенного поля напряжения способно вывести одиночную диссипативную дефектную структуру из положения равновесия с последующим обострением на уменьшающейся пространственной области. Учет условия ограниченности макроскопической деформации, аналогичного условию «выгорания» в теории горения [11], приводит к формированию ансамбля макроскопических дефектов — очагов макроскопических трещин и их последующему слиянию.

Исследования выполнены при поддержке Программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы механики взаимодействий в технических и природных системах» № 09-П-1-1010 и РФФИ (проект № 10-05-96065-р_Урал_а).

Литература

1. *Новожилов В.В.* О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения // Механика деформируемых тел и конструкций. – М.: Машиностроение. – 1975. – С. 349-359.
2. *Качанов Л.М.* О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР: ОТН. – 1958. – № 8. – С. 26-31.
3. *Работнов Ю.Н.* О механизме длительного разрушения // Вопр. прочности материалов и конструкций. – М. – 1959. – С. 5-7.
4. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. – 1967. – № 3. – С. 21-35.
5. *Мураками С., Радаев Ю.Н.* Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – № 4. – С. 93-110.
6. *Lubarda V.A., Krajcinovic D.* Damage tensors and the crack density distribution // Int. J. Solids Struct. – 1993. – V. 30, N. 20. – P. 2859-2877.
7. *Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / Под ред. Ю.В. Соколкина. – М.: Наука, 1997. – 288 с.
8. *Наймарк О.Б.* О деформационных свойствах и кинетике разрушения твердых тел с микротрещинами // О термодинамике и деформировании твердых тел с микротрещинами : Препринт/ УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1982. – С.3-34.
9. *Наймарк О.Б.* Коллективные свойства ансамблей дефектов и некоторые нелинейные проблемы пластичности и разрушения // Физич. мезомех. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 45-72.
10. *Bayandin Yu.V., Naimark O.B., Leont'ev V.A., Permjakov S.L.* Experimental and theoretical study of universality of plastic wave fronts and structural scaling in shock loaded copper // J. Phys. IV: Proc. of 8th Int. conf. on mechanical and physical behavior of materials under dynamic loading. (Dijon, France, August 2006). – V. 134. – P. 1015-1021.
11. *Курдюмов С.П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации: Препр. №29 / Институт прикл. матем. им. Келдыша. – М., 1979. – 30 с.
12. Наука, технология, вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1993. – 149 с.
13. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур. – М.: Наука, 1998. – 255 с.
14. *Plekhov. O.A.* Modeling of stochastic properties of fast cracks in quasi-brittle materials // Computational Materials Science. – 2003. – V. 28, N. 3-4. – P. 462-468.
15. *Наймарк О.Б., Давыдова М.М., Плехов О.А., Уваров С.В.* Экспериментальное и теоретическое исследование динамической стохастичности и скелинга при распространении трещин // Физическая мезомеханика. – Т. 2, N 3. – 1999. – С. 47-58.
16. *Наймарк О.Б.* Исследование влияния трещинообразования на деформирование и разрушение твердых тел // Физические основы прочности и пластичности. – Горький: ГПИ, 1985. – С. 55-60.
17. *Наймарк О.Б., Давыдова М.М.* О статистической термодинамике твердых тел с микротрещинами и автоматодельности устойчивого разрушения // Пробл. прочности. – 1986. – № 1. – С. 91-95.
18. *Наймарк О.Б., Беляев В.В.* Изучение влияния микротрещин на кинетику поврежденности и структура ударных волн в металлах // Пробл. прочности. – 1989. – № 7. – С. 46-53.
19. *Наймарк О.Б., Беляев В.В.* Кинетика накопления микротрещин и стадийная природа процесса разрушения при ударно-волновом нагружении // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 4. – С. 115-123.
20. *Наймарк О.Б.* Неустойчивости в конденсированных средах, обусловленные дефектами // ПЖЭТФ. – 1998. – Т. 67, № 9. – С. 714-722.
21. Нелинейная механика геоматериалов и геосред / Отв. ред. Л.Б. Зуев – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео». 2007. – 235 с.
22. *Еленин Г.Г., Плохотников К.Э.* Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла: Препр. № 91 / Институт прикл. матем. им. Келдыша. – М., 1977. – 28 с.
23. *Белавин В.А., Курдюмов С.П.* Режимы с обострением в демографической системе. Сценарий усиления нелинейности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, № 2. – С. 238-251.
24. *Никольский И.М.* О режимах с обострением в одном нелинейном параболическом уравнении // Вестн. моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. – 2007. – № 4. – С. 25-32.

Поступила в редакцию 13.05.10

Сведения об авторах

Пантелеев Иван Алексеевич, кфмн, мнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; E-mail: pia@icmm.ru

Наймарк Олег Борисович, дфмн, проф., зав.лаб., ИМСС УрО РАН; E-mail: naimark@icmm.ru

Плехов Олег Анатольевич, дфмн, снс, ИМСС УрО РАН; E-mail: poa@icmm.ru