

УДК 533.6

## РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО И НЕВЯЗКОГО ГАЗА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ AUSM

Д.В. Котов, С.Т. Суржиков

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

Рассматривается подход к решению двумерных уравнений Навье–Стокса на треугольных неструктурированных сетках, основанный на главной идее схемы Годунова — целесообразности решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана). При расчетах используется как первый, так и второй порядок пространственной аппроксимации производных. Но, в отличие от обычного метода Годунова, при вычислении потоков на границах ячеек решение задачи Римана находится по схеме AUSM (Advection Upstream Splitting Method). Обсуждается идеология построения схемы AUSM. Проводится сравнение решения задачи распада разрыва, полученного в рамках данного подхода, с результатами решения методом Годунова. Приводится сравнение численных решений ряда задач течения вязкого и невязкого совершенного газа, найденных на неструктурированных сетках различного качества; эти решения сравниваются с решениями аналогичных задач, выполненными на структурированных сетках. Исследуется влияние порядка пространственной аппроксимации на качество численного решения.

*Ключевые слова:* вязкие течения, схема AUSM, неструктурированные сетки, движение газа в канале с выпуклостью

## COMPUTATIONS OF VISCOUS AND NONVISCOUS GAS FLOWS ON UNSTRUCTURED GRIDS USING AUSM

D.V. Kotov and S.T. Surzhikov

*A. Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

In this paper, we present a method for solving 2-D Navier-Stokes equations on triangular unstructured grids. The approach is based on the key idea of the Godunov scheme - the efficiency of finding solution to the problem on the decay of an arbitrary rupture (Riemann problem). Computations are carried out with the first- and second-order space approximation. However, unlike the original Godunov method, in computations of the flows at cell interfaces, the solution to the Riemann problem is sought using the AUSM (Advection Upstream Splitting Method) scheme. The concepts involved in the AUSM scheme are discussed. The solution of the problem on the decay of an arbitrary rupture found by the proposed approach is compared with the results obtained by the Godunov method. The numerical solutions of some problems on the flow of viscous and nonviscous perfect gas obtained on unstructured grids of different quality are presented and compared with the solutions of similar problems obtained on structured grids. The influence of the order of space approximation on the accuracy of numerical solutions is considered.

*Key words:* viscous flows, AUSM scheme, unstructured grids, internal gas dynamics in a channel with a bump

### 1. Введение

В настоящее время разработка численных методов газодинамических расчетов в областях сложной формы имеет большое практическое и научное значение. При этом важную роль играет выбор расчетной сетки. В то время как в областях простой формы

можно обойтись одноблочной структурированной сеткой, в сложных областях приходится строить многоблочные сетки, разбивать область на простые подобласти, строить в них одноблочные сетки и сопрягать их друг с другом. Автоматически выполнить этот процесс для любой геометрии практически невозможно. Одним из кардинальных методов решения этой проблемы является использование неструктурированных сеток.

Для дискретизации уравнений Навье–Стокса на неструктурированных сетках наиболее часто применяется метод конечного объема. В работе [1] дан пример решения задачи методом конечного объема с применением схемы «крест» на структурированных сетках. Практическая сложность реализации такого подхода заключается в необходимости вводить физически не обусловленную искусственную вязкость, чтобы подавить численные неустойчивости.

Для получения физически обоснованной разностной схемы можно, следуя идее С.К. Годунова [2], использовать автомодельное решение задачи распада разрыва (решение задачи Римана). Недостаток этого подхода состоит в том, что точное решение задачи Римана — трудоемкая итерационная процедура [3]. Поэтому существует множество методов ее приближенного решения (например [4, 5]), делающих подход Годунова достаточно эффективным на неструктурированных сетках.

Обзор достижений и тенденций развития вычислительной аэродинамики представлен в [6]. Детальный анализ используемых численных методов, в том числе методов генерации неструктурированных сеток и расчетов с их использованием, проведен в [7]. Современные методы расчетов на неструктурированных сетках в объемах со сложной геометрией даны в [8, 9]. В работе [10] подробно представлен метод контрольного объема для расчета на четырехугольной неструктурированной сетке.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается двумерная задача течения вязкого теплопроводного газа, для решения которой будут применяться уравнения Навье–Стокса, имеющие вид:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{G}, \quad (1)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix} \mathbf{i} + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{yx} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix} \mathbf{i} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mu \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{w}$  — столбец консервативных переменных;  $\mathbf{F}$  — вектор конвективного потока;  $\mathbf{G}$  — вектор вязкого потока;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $u, v$  — компоненты вектора скорости;  $E$  — полная энергия в единице объема;  $T$  — температура;  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор вязких напряжений;  $\mu$  — коэффициент вязкости;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

Система (1) замыкается уравнением состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)U = (\gamma - 1) \left[ E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right]. \quad (2)$$

Здесь  $U$  — внутренняя энергия в единице объема;  $\gamma = c_p/c_v$ , где  $c_p$ ,  $c_v$  — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно. Их зависимость от температуры не учитывается.

### 3. Численный метод

#### 3.1. Аппроксимация по пространству

В соответствии с идеологией метода контрольного объема разобьем всю расчетную область на конечное число непересекающихся элементов — треугольников. Уравнения (1) запишем относительно компонент векторных величин  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} + \frac{\partial g(w)}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где  $w$  — любая из строк вектора-столбца консервативных переменных,  $f$ ,  $g$  — проекции компонент вектора  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  на оси  $x$  и  $y$  соответственно.

Проинтегрируем уравнение (3) по  $i$ -му треугольнику ABC:

$$\frac{\partial \bar{w}_i(t)}{\partial t} = -\frac{1}{S_i} [q_{AB}(t) + q_{BC}(t) + q_{CA}(t)], \quad (4)$$

где  $S_i$  — площадь треугольника ABC,  $\bar{w}_i$  — осредненное по треугольнику значение  $w$ ,  $q_{AB}(t) = \int_{AB} (f dy - g dx)$  — поток через обозначенную грань треугольника.

Согласно явной разностной схеме уравнение любой переменной  $w$  в треугольнике ABC записывается следующим образом:

$$w_i^{p+1} = w_i^p - \frac{\tau}{S_i} \left[ f(w_{ab}^p)(y_b - y_a) - g(w_{ab}^p)(x_b - x_a) + \right. \\ \left. + f(w_{bc}^p)(y_c - y_b) - g(w_{bc}^p)(x_c - x_b) + f(w_{ca}^p)(y_a - y_c) - g(w_{ca}^p)(x_a - x_c) \right],$$

где  $w_{ab}, w_{bc}, w_{ca}$  — значения консервативных переменных, вычисленные в середине отрезков AB, BC, CA соответственно;  $\tau$  — шаг по времени;  $p$  и  $p+1$  — номера временных слоев. Таким образом, для определения приращения консервативных переменных  $w$  фактически нужно рассчитать потоки массы, импульса и энергии через грани треугольника.

Для этого, в соответствии с идеей С.К. Годунова [2], используется автомодельное решение одномерной задачи распада разрыва (задачи Римана) на границе между двумя соседними треугольниками. Входными параметрами для решения служат проекции скоростей на нормаль к грани и касательные составляющие скорости, которые непосредственно переносятся на грань с той стороны, откуда течет поток.

В ряде расчетов, проведенных в данной работе, использовался первый порядок пространственной аппроксимации, то есть при вычислении потоков на грани считалось, что значение консервативных переменных внутри ячейки постоянно и равно значению

в центре ячейки. Для получения более высокого порядка точности аппроксимации численного решения следует задать линейные распределения переменных в ячейке, которые для сохранения монотонности численной схемы необходимо искусственно ограничить (применить численные ограничители). В этом случае расчет значений переменных  $w$  на гранях ячеек называется их восстановлением.

Один из возможных вариантов восстановления параметров подробно описан в [11]. Его суть состоит в ограничении наклонов линейного распределения параметров в пределах выделенного элементарного объёма, которые вычисляются, исходя из средних значений параметров в соседних ячейках. Пусть в ячейке с центром в точке  $(x_0, y_0)$  параметр  $f$  распределен линейно:

$$f = f_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

где  $f_0$  соответствует значению в центре ячейки. Коэффициенты наклона  $a$  и  $b$  можно определить из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a \sum (x_i - x_0)^2 + b \sum (x_i - x_0)(y_i - y_0) = \sum (f_i - f_0)(x_i - x_0), \\ a \sum (x_i - x_0)(y_i - y_0) + b \sum (y_i - y_0)^2 = \sum (f_i - f_0)(y_i - y_0). \end{cases}$$

Здесь суммирование ведется по всем соседним ячейкам. Теперь для расчета значений функции в центрах граней ячеек  $f_c$  введем ограничитель наклона плоскости  $\alpha$ :

$$f_c = f_0 + \alpha [a(x - x_0) + b(y - y_0)].$$

В качестве ограничителя наклона плоскости  $\alpha$  выбирается минимальное из значений коэффициента ограничения на каждой грани:

$$\alpha = \begin{cases} \min \left( 1, \frac{\max(f_c, f_0) - f_0}{f_c - f_0} \right), & f_c > f_0, \\ \min \left( 1, \frac{\min(f_c, f_0) - f_0}{f_c - f_0} \right), & f_c < f_0, \\ 1, & f_c = f_0. \end{cases}$$

### 3.2. Вычисление градиентов

Для определения вязких членов, входящих в уравнение (1), необходимо вычислить пространственные производные скорости и температуры в центрах граней ячеек. Для этой цели обычно используют усреднение производной по некоторому контрольному объёму. Такая схема является достаточно стабильной, но она не лишена ряда недостатков, один из которых — трудоёмкость реализации применительно к граничным ячейкам. В связи с этим в данной работе используется другой подход к вычислению производных на границе, более экономичный с точки зрения реализации и вычислительных затрат.

В окрестности точки  $Q$  пространства  $(x, y, F)$  проводится плоскость  $P = a + b(x - x_q) + c(y - y_q)$  с параметрами  $b$  и  $c$ , которые являются искомыми производными и определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a \sum \xi_i + b \sum x_i \xi_i + c \sum y_i \xi_i = \sum F_i \xi_i, \\ a \sum x_i \xi_i + b \sum x_i^2 \xi_i + c \sum x_i y_i \xi_i = \sum x_i F_i \xi_i, \\ a \sum y_i \xi_i + b \sum x_i y_i \xi_i + c \sum y_i^2 \xi_i = \sum y_i F_i \xi_i. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $x_i$  и  $y_i$  — координаты центра  $i$ -й ячейки относительно точки  $Q$ . Суммирование в (5) ведется по всем ячейкам, содержащим одну или обе вершины грани, на которой лежит точка  $Q$ . Коэффициент  $\xi_i$  учитывает вклад ячейки в зависимости от расстояния ее центра до точки  $Q$ , обеспечивая монотонность схемы. В данной работе этот коэффициент определяется выражением  $\xi_i = 1/(x_i^4 + y_i^4)$ .

### 3.3. Аппроксимация по времени

Система уравнений (4) решается методом установления. В данной работе интегрирование по времени производим с помощью двухстадийного метода Рунге–Кутты:

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= w^{(0)} + \Delta t R(w^{(0)}), \\ w^{(2)} &= \frac{1}{2}(w^{(0)} + w^{(1)}) + \frac{\Delta t}{2} R(w^{(1)}), \end{aligned}$$

где  $R$  — правая часть системы (4). Шаг по времени  $\Delta t$  выбирается следующим образом:

$$\Delta t = K \min \left( \frac{h_{i \min}}{\max_i c_i + \max_i v_i}, \frac{h_{i \min}^2}{2 \max_i (\mu_i / \rho_i)} \right),$$

где  $i$  — номер ячейки,  $c_i$  — скорость звука в  $i$ -й ячейке,  $h_{i \min}$  — минимальное расстояние между центром ячейки и ее гранями,  $K$  — число Куранта,  $K < 1$ . В расчетах, представленных далее, число Куранта составляет 0,5.

## 4. Применение схемы AUSM для определения параметров распада разрыва

Основная проблема, возникающая при численном решении газодинамических уравнений, — это устойчивость разностной схемы. Для того чтобы схема была устойчивой, она должна содержать разности, ориентированные против потока [7]. То есть на этапе построения схемы необходимо определить, в каком направлении каждая группа волн распространяется по расчетной сетке и как взаимодействуют расчетные ячейки. Как правило, используют две модели такого взаимодействия.

В первой модели ячейки взаимодействуют посредством дискретных волн, определяемых с помощью точного или приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва, заданного на границе между ячейками (задачи Римана). Дискретизация в этой модели реализуется на основе схем Годунова [3], Ошера [12], Роу [13].

Во второй модели взаимодействие между ячейками осуществляется через группы частиц, перемещающихся между ячейками и имеющих заданное распределение скоростей. Для разделения групп частиц на движущиеся «вперед» и «назад», применяются методы расщепления потока. К разностным схемам расщепления относятся схемы Ван Лиры [14], Лио и Стефана [5]. Группа схем типа [5] получила название AUSM.

На данный момент разработано множество модификаций схем AUSM [5, 15–21]. Метод, предложенный Лио и Стефаном [5], первоначально использовался для расчета типичных аэродинамических задач, затем, с целью повышения точности, был усовершенствован [15, 16], а позже обобщен на все скоростные режимы и многофазные течения [17–19]. Также были предложены модификации этих обобщений [20, 21].

В данной работе в качестве основного метода расщепления потоков используется простой вариант, предложенный в [5]. В этом варианте метода расщепление проводится отдельно по числу Маха (с аппроксимацией полиномом второго порядка) и давлению (с аппроксимацией полиномом третьего порядка). Также для сравнения приводятся результаты расчета с применением расщепления AUSM+ [15], в котором использовалась аппроксимация по числу Маха полиномом четвертого, а давления — пятого порядка.

#### 4.1. Описание подхода AUSM

Как отмечалось выше, для определения параметров на границе ячеек достаточно решить одномерную задачу Римана. Поэтому в качестве исходных возьмем одномерные уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}.$$

Первым шагом на пути к построению схемы AUSM является разделение двух физически независимых процессов: распространения конвективных и акустических волн:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^p,$$

$$\mathbf{F}^c = M \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho u c \\ (E + p)c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^p = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $c$  — скорость звука,  $M$  — число Маха. Конвективный поток  $\mathbf{F}^c$  выражен через число Маха и столбец «пассивных» величин. Акустический поток  $\mathbf{F}^p$  содержит только одну величину — давление.

Рассмотрим конвективный поток  $\mathbf{F}^c$ . Внутри ячеек индексами « $L$ » и « $R$ » обозначим величины «слева» и «справа» от них, а индексом « $1/2$ » — величины на границе этих ячеек. Конвективный поток на границе ячеек запишем в виде:

$$F_{1/2}^c = M_{1/2} \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho u c \\ (E + p)c \end{pmatrix}_{L/R}.$$

*Расщепление по числу Маха.* Основная идея подхода AUSM заключается в том, что все расщепление потоков на границах производится за счет числа Маха; «пассивные» величины переносятся из той ячейки, откуда направлен поток:

$$f_{L/R} = \begin{cases} f_L, & M_{1/2} \geq 0, \\ f_R, & M_{1/2} < 0. \end{cases}$$

Теперь вся задача состоит в том, чтобы правильно расщепить конвективную скорость  $M_{1/2}$ . Эта проблема является определяющей для развития всего семейства схем AUSM. Далее будем придерживаться логики схемы AUSM, используемой в [5].

Число  $M_{1/2}$  расщепим на вклад «слева»  $f_L^+$  и «справа»  $f_R^-$ :

$$M_{1/2} = f_L^+ + f_R^- \quad (7)$$

и будем искать такие функции  $f_L^+(M)$  и  $f_R^-(M)$ , которые удовлетворяют следующему набору условий

- 1а.  $f_L^+ + f_R^- = M$ ;
- 2а.  $f_L^+ \geq 0$  и  $f_R^- \leq 0$ ;
- 3а. функции непрерывны и монотонно возрастающие;
- 4а. функции непрерывно дифференцируемые.
- 5а.  $f_L^+(M) = -f_R^-(-M)$ ;
- 6а.  $f_L^+ = M$  при  $M \geq 1$  и  $f_R^- = M$  при  $M \leq -1$ .

Физический смысл критериев (1а), (2а) очевиден. Благодаря критерию (3а) достигается выполнение неравенств  $f_L^+ < 1$  и  $f_R^- > -1$  при  $|M| < 1$ , что является необходимым условием, так как в противном случае волны будут распространяться только в направлении потока даже при дозвуковой скорости. Критерий (4а) обеспечивает гладкость полученного решения, а критерий (5а) — симметричность расщепления. Критерий (6а) соответствует стандартной противопоточной схеме, то есть сверхзвуковые волны распространяются только в направлении потока. Из (6а) следует, что каждая из искомых функций записывается в виде:

$$f = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|), & |M| \geq 1, \\ g(M), & |M| < 1, \end{cases}$$

где функцию расщепления  $g(M)$  будем искать в виде полинома, имеющего наименьшую из возможных степень.

Запишем  $g(M)$  в виде полинома первого порядка:

$$g = aM + b; \quad \begin{cases} g_L^+(-1) = 0, \\ g_L^+(1) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} g_R^-(-1) = 1, \\ g_R^-(1) = 0; \end{cases} \quad g^\pm = \frac{1}{2}(M \pm 1).$$

Отсюда, согласно (7), число Маха на границе ячеек в дозвуковом случае равняется

$$M_{1/2} = \frac{1}{2}[(M_L + 1) + (M_R - 1)].$$

Полученное выражение соответствует простому усреднению числа Маха.

Заметим, что в усреднение неявно входят собственные значения  $\lambda$  системы (6), соответствующие распространению нелинейных волн:  $\lambda = M \pm 1$ . Использование собственных функций в качестве базиса расщепления потока является обычной практикой для противопоточных методов.

На рисунке 1 приведен обобщенный график функции  $f$ . В точках  $|M|=1$  функция  $f$  не дифференцируема, поэтому, чтобы выполнялся критерий (4а), будем искать решение в виде полинома второго порядка

$$g = aM^2 + bM + c.$$

Тогда для производных в точках  $M = \pm 1$  получим:

$$\begin{cases} g_L^+(-1) = 0, \\ g_L^+(1) = 1, \\ g_L'^+(-1) = 0, \\ g_L'^+(1) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} g_R^-(-1) = 1, \\ g_R^-(1) = 0, \\ g_R'^-(-1) = 1, \\ g_R'^-(1) = 0, \end{cases} \quad g_L^+ = \frac{1}{4}M^2 + \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}, \quad g_R^- = -\frac{1}{4}M^2 + \frac{1}{2}M - \frac{1}{4}$$

или:  $g^\pm = \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2$ .

Таким образом, полная запись функции  $f$ , удовлетворяющей всем заданным критериям 1а–6а, имеет вид

$$f^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|), & \text{если } |M| > 1, \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2, & \text{если } |M| \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

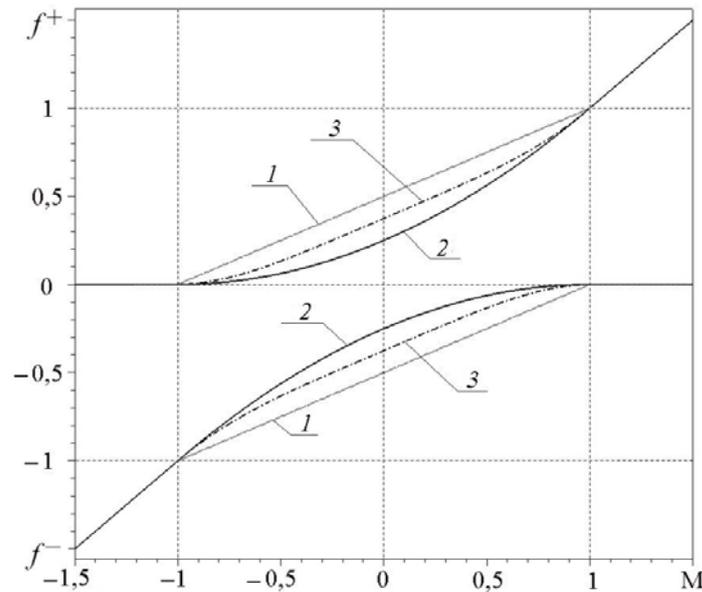
Такое расщепление использовалось Ван Лиром [14].

В работе [15] предложена аппроксимация решения полиномом более высокого порядка, также удовлетворяющая заданным критериям (см. Рис. 1):

$$f^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|), & \text{если } |M| > 1, \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2 - 1)^2, & \text{если } |M| \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Расщепление давления. По аналогии с числом Маха давление  $p_{1/2}$  будем расщеплять на вклад «слева»  $\phi_L^+$  и «справа»  $\phi_R^-$ :

$$p_{1/2} = \phi_L^+ + \phi_R^- \quad (10)$$



**Рис. 1.** Вид функции расщепления  $f^\pm$  в зависимости от представления через число Маха:  
1 – линейное представление; 2 – параболическое; 3 – полином 4-го порядка

Будем искать такие функции  $\varphi_L^+(M)$  и  $\varphi_R^-(M)$ , что:

- 1б.  $\varphi_L^+ + \varphi_R^- = p$ ;
- 2б.  $\varphi^\pm \geq 0$ ;
- 3б. функции непрерывны, причем  $\varphi_L^+(M)$  монотонно возрастает, а  $\varphi_R^-(M)$  — убывает;
- 4б. функции непрерывно дифференцируемы.
- 5б.  $\varphi_L^+(M) = \varphi_R^-(-M)$ ;
- 6б.  $\varphi_L^+ = p$  при  $M \geq 1$  и  $\varphi_R^- = p$  при  $M \leq -1$ .

Смысл критериев расщепления давления аналогичен смыслу критериев для числа Маха. Отличие состоит в физическом ограничении на давление: оно должно быть неотрицательной величиной. Это отличие приводит к соответствующим изменениям в критериях (2б), (3б), (5б), (6б). Из критерия (6б) следует, что искомая функция должна записываться в виде:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{p}{2}(1 \pm \text{sign}(M)), & |M| \geq 1, \\ p\gamma(M), & |M| < 1. \end{cases}$$

Функцию расщепления  $\gamma(M)$  будем искать в виде полинома, имеющего наименьшую из возможных степень. Полином первого порядка не подходит по тем же причинам, что и при расщеплении числа Маха. Возьмем полином второго порядка.

$$\gamma = aM^2 + bM + c.$$

Тогда, чтобы удовлетворить критериям (4б) и (6б), для производных в точках  $M = \pm 1$ , получим:

$$\begin{cases} \gamma_L^+(-1) = 0, \\ \gamma_L^+(1) = 1, \\ \gamma_L'^+(-1) = 0, \\ \gamma_L'^+(1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_R^-(-1) = 1, \\ \gamma_R^-(1) = 0, \\ \gamma_R'^-(-1) = 0, \\ \gamma_R'^-(1) = 0. \end{cases}$$

Данная система является несовместной, поэтому полином второго порядка для расщепления давления не подходит.

Рассмотрим полином третьего порядка:

$$\gamma = aM^3 + bM^2 + cM + d.$$

Для производных в точках  $M = \pm 1$  получим:

$$\begin{cases} \gamma_L^+(-1) = 0, \\ \gamma_L^+(1) = 1, \\ \gamma_L'^+(-1) = 0, \\ \gamma_L'^+(1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_R^-(-1) = 1, \\ \gamma_R^-(1) = 0, \\ \gamma_R'^-(-1) = 0, \\ \gamma_R'^-(1) = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_L^+ = -\frac{1}{4}M^3 + \frac{3}{4}M + \frac{1}{2}, \quad \gamma_R^- = \frac{1}{4}M^3 - \frac{3}{4}M + \frac{1}{2}$$

или:

$$\gamma^\pm = \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 (2 \mp M).$$

Таким образом, полная запись функции  $\varphi$  имеет вид:

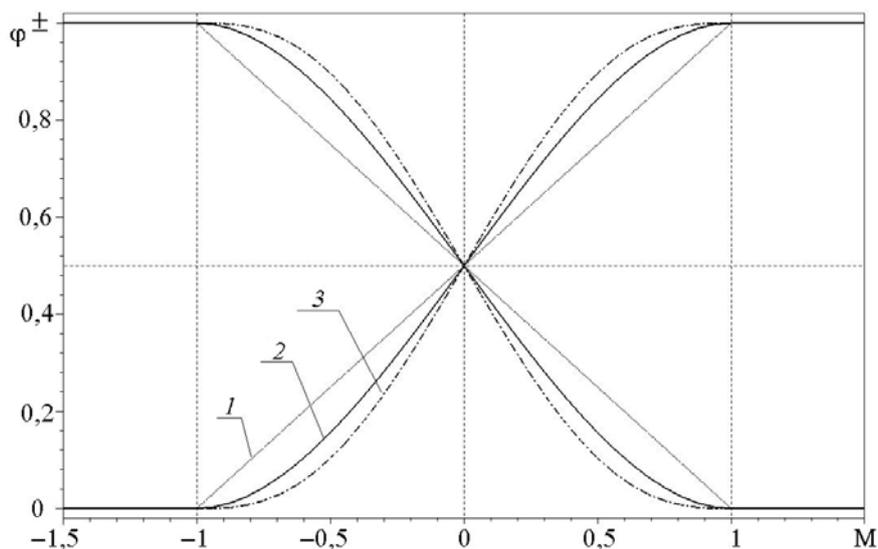
$$\varphi^\pm = \begin{cases} \frac{p}{2}(M \pm |M|) / M, & \text{если } |M| > 1, \\ \frac{p}{4}(M \pm 1)^2 (2 \mp M), & \text{если } |M| \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

Приведем также запись функции расщепления при аппроксимации полиномом более высокого порядка, предложенную в работе [15]:

$$\varphi^\pm = \begin{cases} \frac{p(M \pm |M|)}{2M}, & \text{если } |M| > 1, \\ \frac{p}{4}(M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \frac{3p}{16}M(M^2 - 1)^2, & \text{если } |M| \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

В работе [15] показано, что использование для аппроксимации полиномов высокого порядка (9), (12) приводит к устранению колебаний на фронте ударной волны, присущих решению с низким порядком аппроксимации (8), (11).

Графики соответствующих функций расщепления давления приведены на рисунке 2.



**Рис. 2.** Вид функции расщепления  $\varphi^\pm$  в зависимости от представления через число Маха:  
1 – линейное представление; 2 – полином 3-го порядка; 3 – полином 5-го порядка

#### 4.2. Результаты численных экспериментов

В качестве рабочего варианта AUSM использовалось расщепление по формулам (8), (11). Для оценки эффективности алгоритма это решение сравнивалось с «точным» решением, полученным с помощью итерационной процедуры Годунова. Сравнение проводилось на тестовой задаче течения в канале с утолщением в виде сегмента без учёта диссипативных слагаемых в уравнениях.

Численные эксперименты показали, что скорость вычислений при использовании AUSM увеличивается более чем в два раза по сравнению со скоростью вычислений на основе схемы Годунова. Такой вывод был сделан в результате анализа невязки полной энергии  $\varepsilon$ , определяемой по формуле

$$\varepsilon = \ln \left( \max_i \left( \left| \frac{E_{i,2} - E_{i,1}}{E_{i,2} + E_{i,1} + 1} \right| \right) \right),$$

где  $E_{i,1}$  и  $E_{i,2}$  — величины полной энергии в ячейке  $i$  на предыдущем и текущем шагах по времени соответственно. Графики невязки для обеих схем показаны на рисунке 3. Здесь кривая, соответствующая схеме Годунова, выходит на асимптоту вследствие ограничения итерационной процедуры по точности [3]. На графике хорошо видно, что AUSM даёт более гладкую невязку.

Кроме невязки полной энергии сравнивались профили давления на верхнюю и нижнюю стенки канала, полученные на основе двух аппроксимационных схем. Отличия между профилями хорошо заметны только вблизи локальных максимумов (Рис. 4). Также из рисунка видно, что схема Годунова даёт решение более гладкое (без осцилляций), чем AUSM. Однако в целом оба решения совпали хорошей точностью. Это позволило считать схему AUSM более предпочтительной для решения рассматриваемой задачи.

Также проводилось сравнение с решением, полученным при расщеплении на основе полиномов высокого порядка (формулы (9), (12)), которое показало близость результатов, но повышение порядка не привело к уменьшению осцилляций. Следовательно, в данной задаче нет необходимости в использовании полиномов более высокой степени.

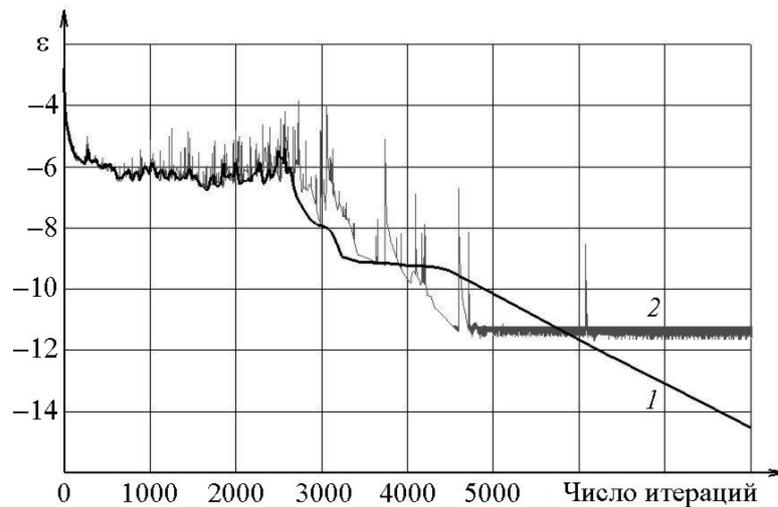


Рис. 3. График невязки для решения задачи Римана на основе разных схем дискретизации переменных: 1 – схема AUSM, 2 – схема Годунова

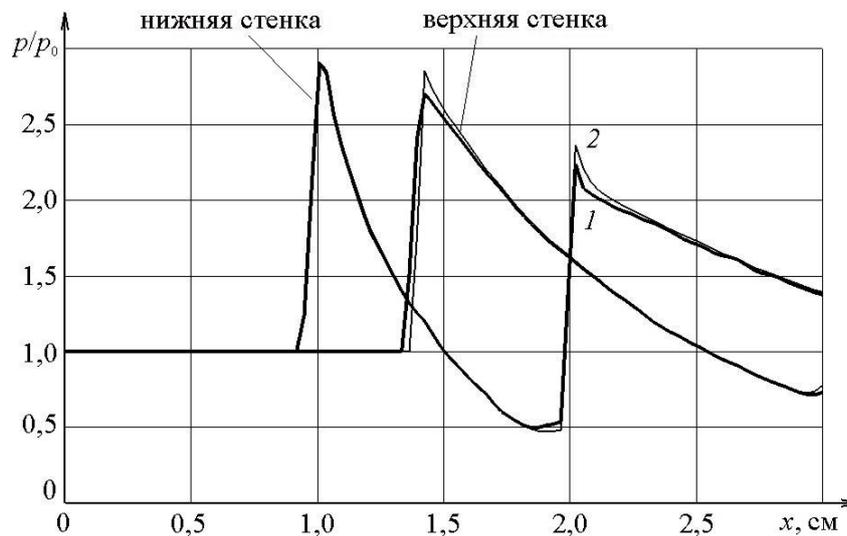


Рис. 4. Давление на стенках: 1 – схема AUSM, 2 – схема Годунова

## 5. Результаты тестовых расчетов

Адекватность расчетной газодинамической модели проверялась на решении ряда тестовых задач.

*Пример 1.* Невязкое течение в канале с сегментарным утолщением. Рассматривалась задача течения невязкого совершенного газа в канале с 10%-м от высоты канала утолщением в форме сегмента. Входной поток был направлен параллельно стенкам канала. Использовалась однородная сетка из 10582 треугольников (Рис. 5). Найденные результаты сравнивались с результатами, полученными при помощи пакета FLUENT (версия 6.2.16) [26], а также с результатами работы [22], вычисленными на структурированной сетке со сгущением вблизи границы.

На рисунке 6 представлено распределение числа Маха по расчетной области при его начальном значении на входе в канал  $M_0 = 1,6$ . Структура течения и количественные характеристики практически точно соотносятся с приведенными в работе [22]. Но, тем не менее, хорошо заметны колебания изолиний, особенно, в окрестности ударных волн, что является типичным для решений, полученных на неструктурированных сетках.

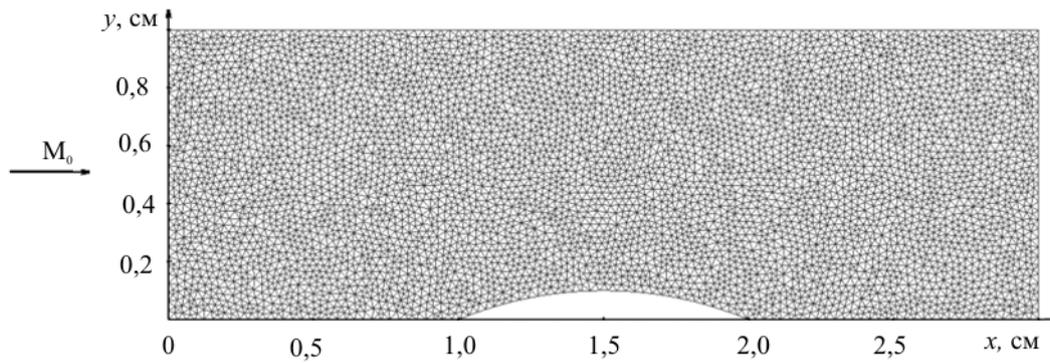
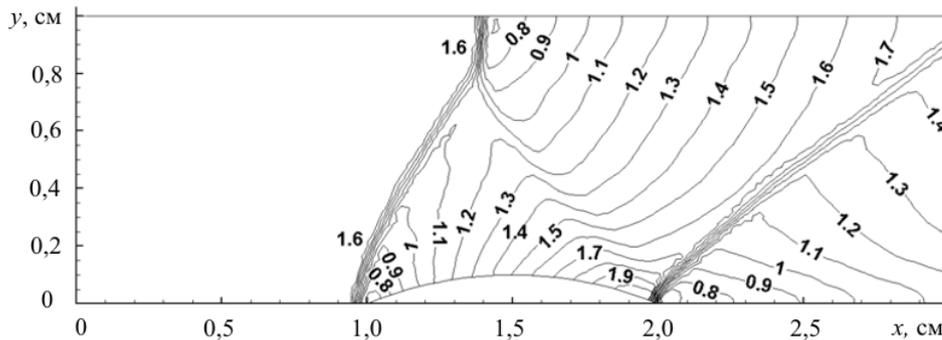
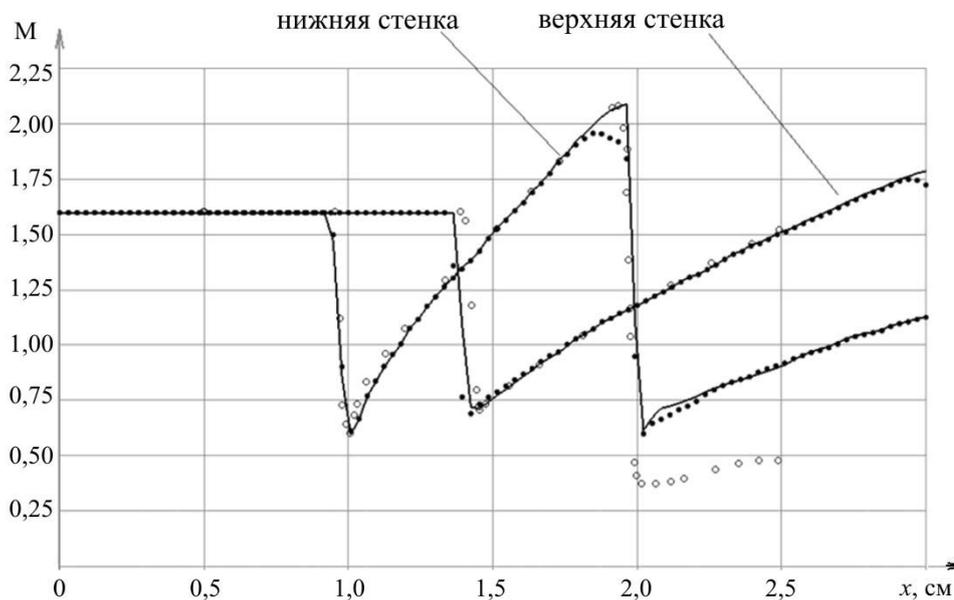


Рис. 5. Расчетная сетка

Рис. 6. Распределение числа Маха по расчетной области (на входе  $M_0 = 1,6$ )Рис. 7. Число Маха на стенках: ● – FLUENT, ○ – статья [22], – результаты авторов (на входе  $M_0 = 1,6$ )

На рисунке 7 показаны зависимости числа Маха на верхней и нижней стенках от координаты  $x$ , полученные в данной работе, в работе [22], а также рассчитанные на аналогичной неструктурированной сетке с помощью пакета FLUENT. Видно, что результаты расчетов достаточно близки. Наблюдаемое расхождение в точке  $x = 2,0$  см можно объяснить различием геометрии расчетной сетки вблизи границы. Отметим также, что результаты, полученные с помощью пакета FLUENT, оказались более

близкими к полученным в данной работе, чем к результатам из [22], что, вероятнее всего, объясняется различием геометрии сетки, особенно вблизи границ.

*Пример 2.* Вязкое течение в канале. Рассматривалось плоское течение вязкого газа в канале высотой 3,11 см. Расчеты проводились на двух типах сеток: на обычной неструктурированной (Рис. 8, *а*) и на «квазиструктурированной» (Рис. 8, *б*). «Квазиструктурированной» сеткой названа неструктурированная сетка, полученная из двух сеток: структурированной сетки вблизи границы и неструктурированной — вдали от границы расчетной области.

Стенки канала начинались на расстоянии 1 см справа от входа в расчетную область (Рис. 9). Параметры на входе в канал были следующие: давление  $P = 78,37$  Па, температура  $T = 245$  К, число Маха  $M_0 = 5$ . На рисунке 9 приведено распределение числа Маха по расчетной области, полученное на разных сетках. Видно, что на «квазиструктурированной» сетке (Рис. 9, *б*) пограничный слой более узкий, чем на обычной сетке. По-видимому, это говорит о меньшей сеточной вязкости, а, следовательно, и большей достоверности результатов расчетов, проведенных на «квазиструктурированной» сетке.

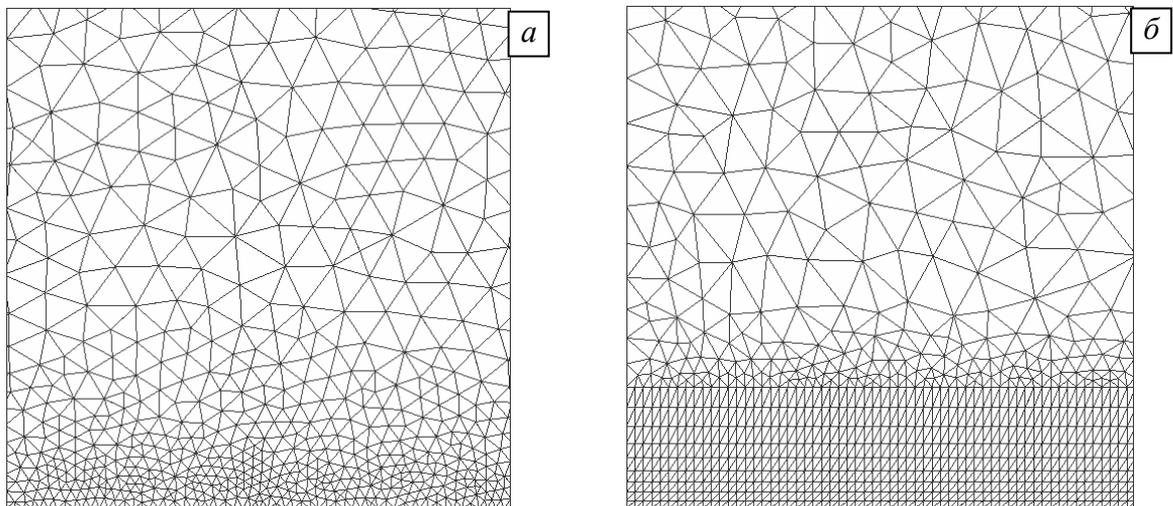


Рис. 8. Фрагменты расчетных сеток: обычная неструктурированная (*а*) и «квазиструктурированная» (*б*)

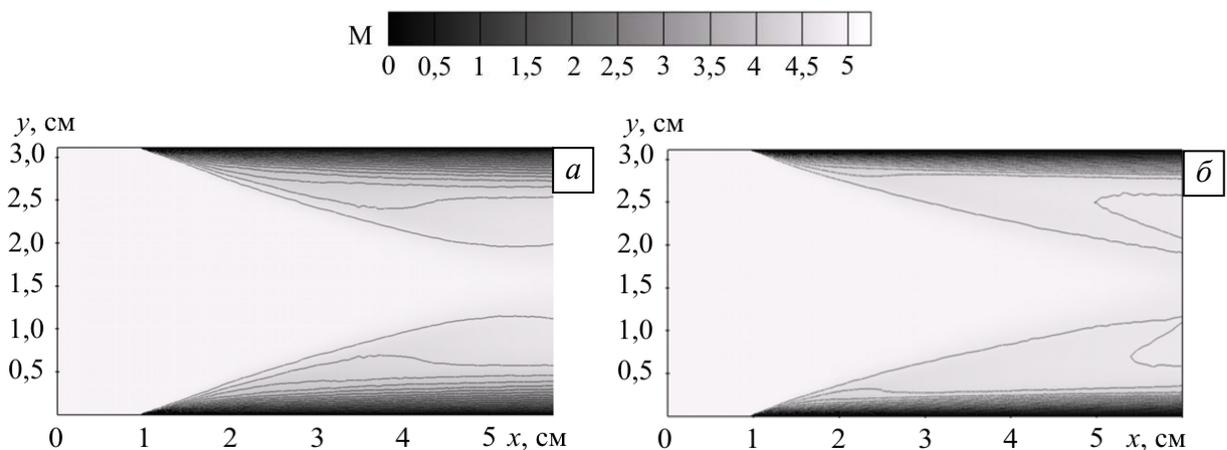
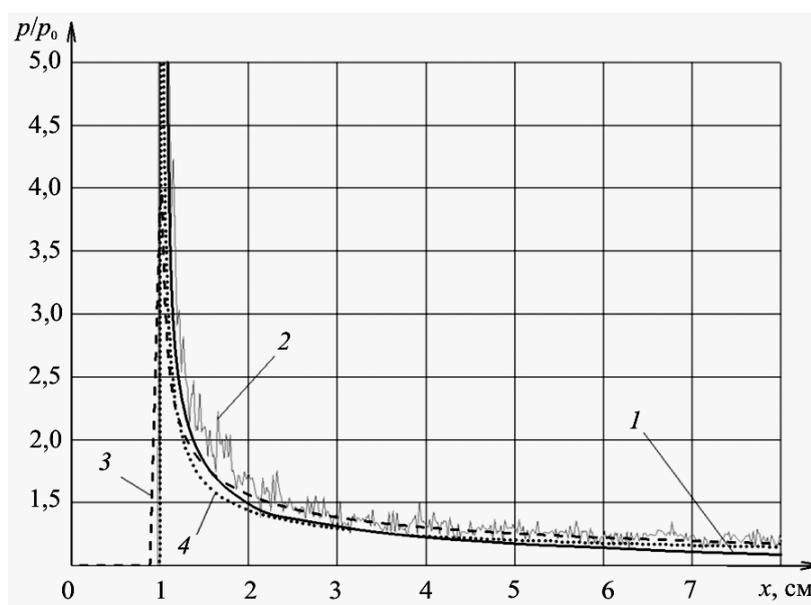


Рис. 9. Распределение числа Маха по расчетной области, полученное на обычной неструктурированной (*а*) и «квазиструктурированной» (*б*) сетках

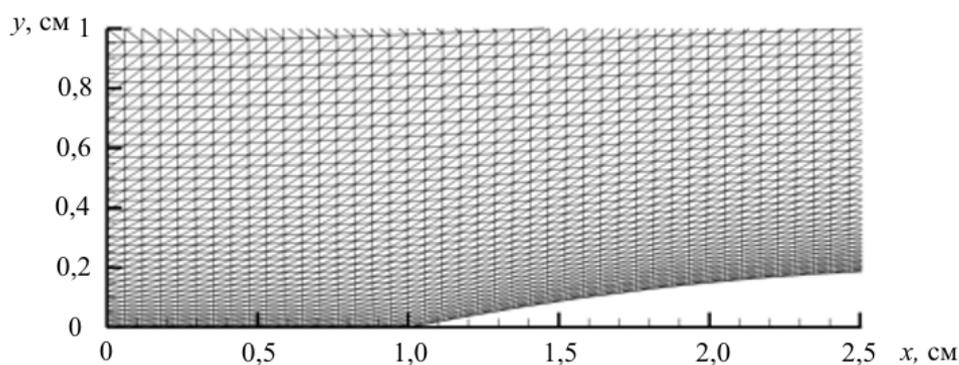


**Рис. 10.** Давление на стенке канала, рассчитанное на «квазиструктурированной» (1), обычной неструктурированной (2), структурированной [23] (3) сетках, по асимптотической теории (4)

На рисунке 10 представлено распределение давления по стенке канала. Здесь особенно хорошо заметна гладкость решения, полученного при расчете на «квазиструктурированной» сетке. Также на этом рисунке приведены результаты расчетов на более подробной сетке [23] и по асимптотической теории. С позиций этой теории в точке, где начинается стенка ( $x=1$  см), давление бесконечно. К тому же очевидно, что в бесконечно малой окрестности кромки пластины уравнения Навье–Стокса неприменимы. В конечно-разностном представлении вблизи указанной точки наблюдается скачок давления на некоторую большую величину, зависящую, прежде всего, от детализации сетки. При измельчении сетки в этой точке будет получаться все большее давление. Данный вопрос анализировался, например, в работе [24].

**Пример 3.** Вязкое течение в канале с выпуклостью. Исследовалось течение как вязкого, так и невязкого газа в канале высотой 2 см и длиной 10 см. На одной из стенок канала присутствовало утолщение в форме сегмента. В расчете полагалось: продольные координаты криволинейного сегмента  $x_1=1$  см и  $x_2=5$  см; высота сегмента 0,2 см; параметры на входе в канал: давление  $P=295,6$  Па, температура  $T=257$  К, число Маха  $M_0=4$ .

Предварительные расчеты проводились на «квазиструктурированной» сетке из 23800 треугольников (Рис. 11). Затем решение уточнялось на сетке из 95200



**Рис. 11.** Фрагмент расчетной сетки.

треугольников. Волновая структура вязкого течения в данной задаче является весьма сложной, так как присутствует взаимодействие ударных волн с пограничным слоем. Для выявления всех существенных особенностей течения было необходимо получить решение с достаточно высокой точностью. Поэтому при расчетах использовалась процедура восстановления значений внутри ячеек, описанная выше. Это позволило поднять уровень пространственной аппроксимации до второго порядка.

Результаты расчетов представлены на рисунках 12–14. В целом картины распределения давления в невязком и вязком газе подобны. Однако в вязком газе ударно-волновая структура имеет более сложный вид (Рис. 12, б и 13). При вязком течении, начиная от входного сечения, появляются ударные волны, развивающиеся вдоль канала. Утолщение на нижней стенке порождает еще одну волну, которая, интерферируя с первыми двумя волнами, изменяет свой наклон на несколько градусов. Далее эта волна взаимодействует с пограничным слоем на противоположной стенке. На рисунке 12, б, отчетливо видны две ударные волны, порождаемые этим взаимодействием: первая волна — результат взаимодействия падающей волны с пограничным слоем; вторая волна — отражение от стенки. Таким образом, в вязком газе от верхней стенки отражается две ударных волны. В невязком случае (Рис. 12, а) от верхней стенки отражается только одна волна, так как взаимодействие с пограничным слоем отсутствует.

На рисунке 14 показаны распределения давления вдоль нижней и верхней стенок, полученные в численных экспериментах с вязким и невязким газом. Для сравнения

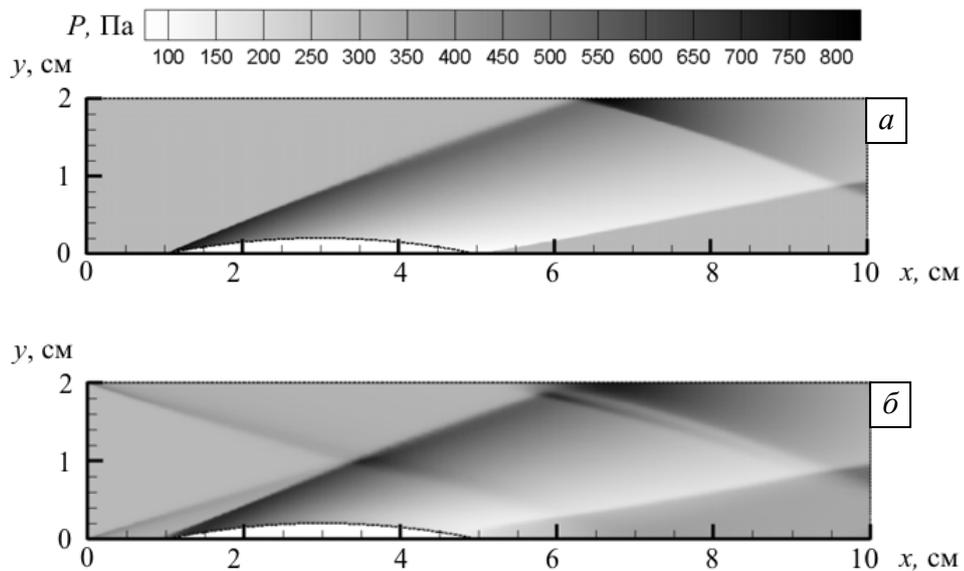


Рис. 12. Поле давления: расчет по уравнениям Навье-Стокса (а) и по уравнениям Эйлера (б)

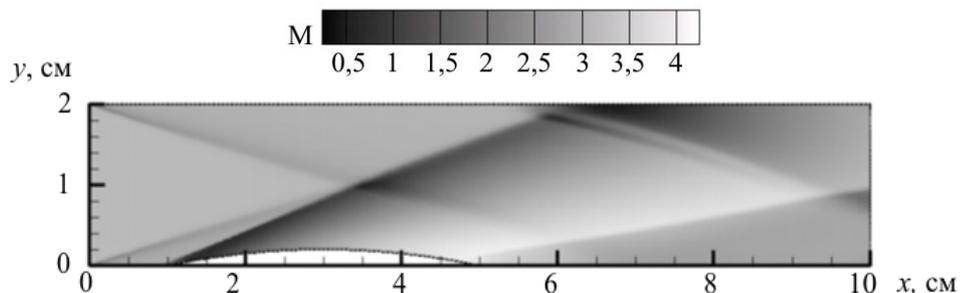
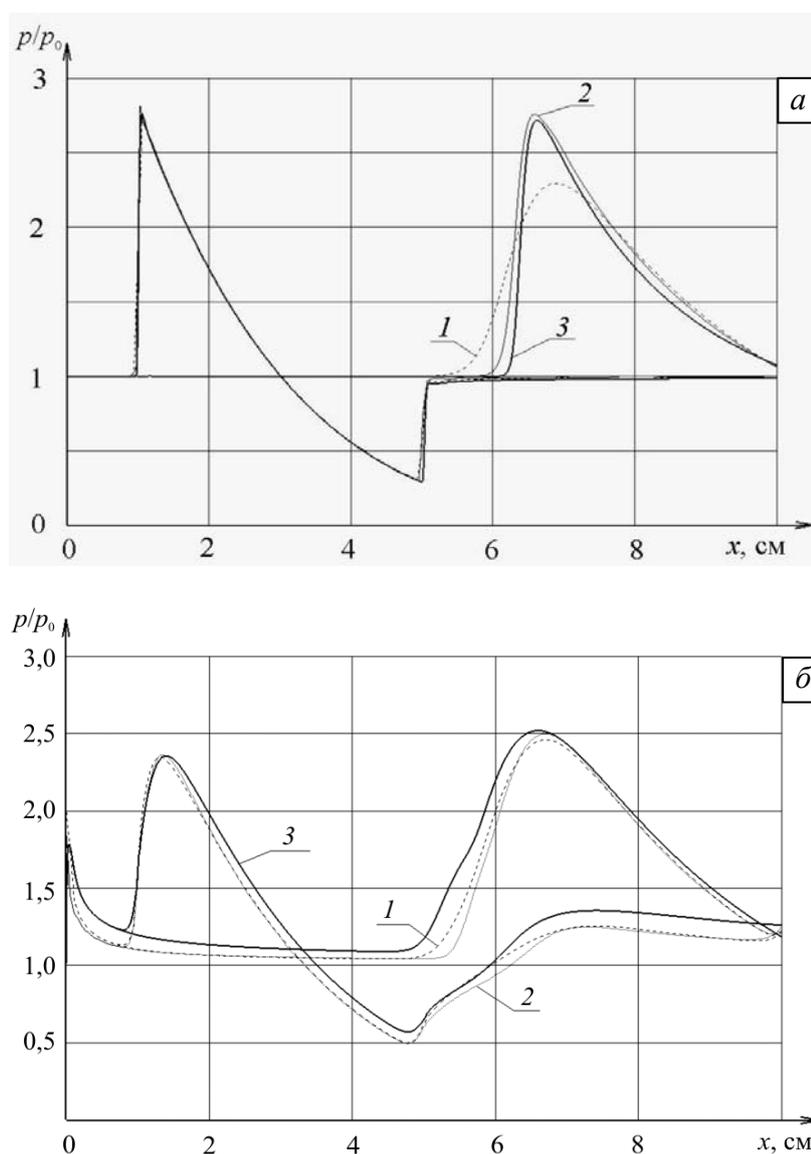


Рис. 13. Число Маха. Расчет по уравнениям Навье-Стокса



**Рис. 14.** Распределение давления вдоль стенок при невязком (а) и вязком (б) течении, полученное на разных сетках: 1 – 23000 ячеек, первый порядок аппроксимации, 2 – 95200 ячеек, второй порядок аппроксимации, 3 – структурированная сетка [25]

приведены результаты вычислений одного из авторов на структурированной сетке [25]. При расчетах вязкого газа виден резкий рост давления на входе в канал. Этот эффект, связанный с неприменимостью уравнений Навье-Стокса для расчета обтекания абсолютно тонкой стенки, обсуждался в предыдущем параграфе. Видно (Рис. 14, а), что различия между расчетами на разных сетках вполне закономерны: на более грубой сетке наблюдается уменьшение амплитудных значений давления в месте падения на поверхность ударной волны. При внимательном рассмотрении кривой, отвечающей решению, полученному при расчете со вторым порядком аппроксимации, на некоторых участках заметны малые колебания, характерные для схем с повышенным порядком. Незначительные расхождения с расчетом на структурированной сетке, особенно заметные в случае вязкого течения (Рис. 14, б), могут быть связаны с тем, что расчет в работе [25] произведен на очень подробной сетке из  $1301 \times 201$  узлов, что соответствует 523002 треугольникам.

## 6. Выводы

Разработан численный подход к решению двумерных уравнений течения вязкого совершенного газа с использованием неструктурированных треугольных сеток. В рамках разработанного кода проведено сравнение результатов решения тестовой задачи (задачи Римана) на основе схем Годунова и AUSM. Сравнение показало преимущества AUSM в скорости и гладкости невязки и незначительные отклонения от «точного» решения.

На неструктурированной сетке проведены расчеты невязкого течения в плоском канале в присутствии утолщения в форме сегмента. Результаты расчетов соответствуют расчетам на структурированной сетке, приведённым в [22]. При этом в расчете на неструктурированной сетке наблюдаются колебания численного решения.

На неструктурированной сетке проведены расчеты течения вязкого газа в канале. Сравнение с результатами расчетов на структурированной сетке [23] показало их удовлетворительное соответствие. На основе этой задачи проведено исследование влияния детализации геометрии неструктурированной сетки на гладкость решения. Показано, что для получения гладкого решения полезным может оказаться построение «квазиструктурированной» сетки вблизи стенок расчетной области.

Выполнен расчет вязкого и невязкого течения в канале с утолщением в виде сегмента. Проведено исследование влияния порядка пространственной аппроксимации на качество численного решения, показавшее, что повышение порядка позволяет получить более качественное решение. В проведенных расчетах улучшение качества решения соответствовало примерно четырехкратному измельчению сетки. Использование схемы второго порядка позволило выявить побочный эффект — присутствие малых колебаний в некоторых участках расчетной области.

Результаты исследований, проведенных в данной работе, были применены в расчете тепловых потоков к стенкам модельного прямоточного воздушно-реактивного двигателя [27].

Авторы благодарят В.В. Кузенова и И.А. Крюкова за плодотворные обсуждения и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00544), Программ фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы механики взаимодействий в технических и природных системах, материалах и средах» и «Фундаментальные проблемы горения и детонации в энергоустановках».

## Литература

1. Сакович В.С., Сорокин А.М. Применение неструктурированных сеток для расчета вязкого обтекания многоэлементных профилей // Выч. мат. и мат. физ. – 1997. – Т. 37, № 10. – С. 1269-1280.
2. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Матем. сб. – 1959. – Т. 47(89), № 3. – С. 271-306.
3. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
4. Сафронов А.В. Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах // Матем. моделирование. – 2008. – Т. 20, № 2. – С. 76-84.
5. Liou M.-S., Steffen C. A new flux splitting scheme // J. Comput. Phys. – 1993. – V. 107. – P. 23-39.
6. Shang J.S. Three decades of accomplishments in computational fluid dynamics // Progress in Aerospace Sciences. – 2004. – V. 40. – P. 173-197.
7. John C. Tannehill, Dale A. Anderson, Richard H. Pletcher. Computational fluid mechanics and heat transfer. – Taylor & Frances, 1997. – 792 p.
8. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.
9. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. – М.: Физматлит, 2010. – 488 с.

10. Суржиков С.Т. Тепловое излучение газов и плазмы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 544 с.
11. Боровиков С.Н., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование пространственных течений идеального газа с использованием тетраэдральных сеток // Матем. моделирование. – 2006. – Т. 18, №. 8. – С. 37-48
12. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation // SIAM J. Numer. Anal. – 1984. – V. 21, N. 2. – P. 217-235.
13. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. – 1981. – V. 43. – P. 357–372.
14. Van Leer B. Flux-vector splitting for the Euler equations / 8th Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dyn. Lecture Notes in Physics. – Berlin: Springer, 1982. – V. 170. – P. 507-512.
15. Liou M.-S. A Sequel to AUSM: AUSM+ // J. Comput. Phys. – 1996. – V. 129. – P. 364-382.
16. Wada Y., Liou M.-S. An accurate and robust flux splitting scheme for shock and contact discontinuities // SIAM J. Scientific Computing. – 1997. – V. 18. – P. 633-657.
17. Liou M.-S. A Sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up // J. Comput. Phys. – 2006. – V. 214. – P. 137-170.
18. Edwards J. R., Franklin R., Liou M.-S. Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Real Fluid Flows with Phase Transitions // AIAA J. – 2000. – V. 38, N. 9. – P. 1624-1633.
19. Chang C.-H., Liou M.-S. A New approach to the simulation of compressible multifluid flows with AUSM+ scheme / 16th AIAA CFD Conference, Orlando, FL, June 23-26, 2003. – AIAA Paper 2003-4107.
20. Edwards J. R., Liou M.-S. Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds // AIAA J. – 1998. – V. 36, N. 9. – P. 1610-1617.
21. Kim K.H., Kim C., Rho O. Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ scheme // J. Comput. Phys. – 2001. – V. 174, N. 1. – P. 38-80.
22. Issa R.I., Javareshkian M.H. Pressure-based compressible calculation method utilizing total variation diminishing schemes // AIAA J. – 1998. – V. 36, N. 9. – P. 1652-1657.
23. Суржиков С.Т., Шенг Дж.С. Вязкое взаимодействие на плоской пластине с поверхностным разрядом в магнитном поле // Теплофизика высоких температур. – 2005. – Т. 43, № 1. – С. 21-31.
24. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. – М.: Изд-во ИЛ, 1962. – 607 с.
25. Суржиков С.Т. Взаимодействие тлеющего разряда с разреженным гиперзвуковым потоком в криволинейном канале // Хим. физика. – 2009. – Т. 28, № 5. – С. 56-63.
26. <http://www.fluent.com> (Дата обращения 15.07.2010)
27. Котов Д.В., Суржиков С.Т. Расчет гиперзвукового течения и излучения вязкого химически реагирующего газа в канале, моделирующем участок ГПВРД: Препр. №. 940 / ИПМех РАН. – М., 2010. – 32 с.

Поступила в редакцию 02.09.10

---

Сведения об авторах

Котов Дмитрий Владимирович, асп., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), 119526, Москва, пр. Вернадского, д. 101-1; E-mail: kotov-d-v@yandex.ru

Суржиков Сергей Тимофеевич, дфмн, проф., чл.-корр. РАН, зам.дир., ИПМех РАН; E-mail: surg@ipmnet.ru