

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ В ТЕРМИНАХ ЛОГАРИФМОВ ГЛАВНЫХ УДЛИНЕНИЙ

А.И. Голованов

Казанский федеральный университет, Казань, Россия

Предлагается численная методика решения задачи больших упругопластических деформаций трехмерных тел на базе метода конечных элементов. Используется оригинальный вариант мультипликативного разложения градиента деформации. Определяющие соотношения и закон пластического течения формулируются в терминах логарифмов главных удлинений и имеют скалярный вид. Решение задачи основывается на шаговом нагружении с итерационным уточнением. Строятся необходимые при расчете соотношения для среды Мизеса. Разделение упругих и пластических деформаций осуществляется путем интегрирования по неявной схеме Эйлера уравнений пластического течения. Приводится числовой пример.

Ключевые слова: конечные деформации, мультипликативное разложение, логарифмы главных удлинений, соотношения Прандля–Рейсса, метод «предиктор–корректор», линеаризованные физические соотношения

NUMERICAL MODELING OF LARGE DEFORMATIONS OF ELASTOPLASTIC SOLIDS IN TERMS OF LOGARITHMS OF PRINCIPAL STRETCHES

A.I. Golovanov

Kazan Federal University, Kazan, Russia

Numerical technique for solving the problem of large elastoplastic deformations of three-dimensional bodies based on the finite element method is proposed. The original variant of the multiplicative decomposition of the deformation gradient is used. Constitutive equations and the plastic flow law are formulated in terms of logarithms of principal stretches and have a scalar form. The solution of the problem is based on step-by-step loading with iteration refinement. The relationships for the Mises medium, necessary for calculations, are constructed. Separation of elastic and plastic deformations is realized using the implicit Euler integration scheme for plastic flow equations. A numerical example is presented.

Key words: finite deformations, multiplicative decomposition, logarithms of principal stretches, Prandtl–Reusse relations, method “predictor–corrector”, linearized physical relationships

1. Введение

В работе [1] рассматривался процесс моделирования гиперупругих тел в терминах главных удлинений и отмечалось, что вычислительных технологий решения задач в такой постановке крайне мало. Настоящая статья является продолжением этой работы и посвящена развитию предложенной методики решения задач моделирования конечных деформаций для упругопластических тел. Следует заметить, что литература, посвященная исследованию упругопластического деформирования, достаточна обширна. В качестве классических примеров можно привести монографии [2–7], в которых

рассматриваются в том числе и большие деформации. Список журнальных публикаций не поддается исчислению.

Одним из принципиальных вопросов построения вычислительного алгоритма является разложение полных деформаций или их скоростей на упругую и пластическую составляющие. Превалирующими способами является либо аддитивное разложение тензора деформаций скоростей, либо мультипликативное разложение тензора градиента деформаций. Хотя следует признать, что мультипликативный вариант при надлежащем выборе тензоров деформаций позволяет строить и аддитивные представления для соответствующих тензоров и соответствующих скоростей тензоров деформаций (см. обзор [8]). Публикаций на эту тему (особенно зарубежных) чрезвычайно много и они отличаются: выбором базиса, в котором описывается исследуемое явление (исходный базис, актуальный или так называемое «разгруженное состояние»); базовым тензором, описывающим большие деформации; алгоритмом разделения упругих и пластических состояний; учетом или игнорированием дополнительных физических нелинейностей (вязкости, пористости, повреждаемости, анизотропии и других). Некоторые сведения о современном состоянии вопроса представлены в монографии [9].

Наиболее близкими, а именно использующими представление основных тензоров в виде разложения по главным направлениям и главным удлинениям, работами, в которых представлены вычислительные методики и приводятся примеры вычислений, являются статьи [10–15]. Однако настоящая работа существенно отличается от вышеупомянутых. Здесь используется оригинальный вариант мультипликативного разложения упругих и пластических деформаций, в значительной степени упрощающий постановку задачи и ее реализацию. Предлагаемая методика частично была представлена в работе [16].

2. Мультипликативное разложение, закон пластического течения

Все обозначения работы [1] в полной мере сохраняются и здесь, поэтому предварительную часть опускаем и переходим к мультипликативному разложению градиента полных деформаций \mathbf{F} на упругую и пластическую составляющие, которое традиционно записывают в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p, \quad (1)$$

обеспечивающем справедливость базового соотношения

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (2)$$

где $\mathbf{C}_p^{-1} = \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = \sum_i (\lambda_i^p)^{-2} \mathbf{c}_i^p \mathbf{c}_i^p$.

В настоящей работе вместо (1) предлагается использовать разложение

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}_e \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}_p, \quad (3)$$

которое сохраняет соотношение (2). Здесь \mathbf{R} — ортогональный тензор, а также

$$\mathbf{U}_p = \sum_i \lambda_i^p \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i, \quad \mathbf{V}_e = \sum_i \lambda_i^e \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i. \quad (4)$$

Доказательства достаточности разложения (3) и справедливости (4) для полной эквивалентности разложений (1) и (3) приводятся в [8, 9]. Также весьма обширные рассуждения о справедливости разложений типа (3) можно найти в работах [6, 17, 18].

Интересно, что из (3) следует разложение для главных удлинений

$$\lambda_i = \lambda_i^e \lambda_i^p. \quad (5)$$

Если ввести логарифмы главных удлинений

$$H_i = \ln \lambda_i, \quad H_i^e = \ln \lambda_i^e, \quad H_i^p = \ln \lambda_i^p,$$

то из (5) получим

$$H_m = H_m^e + H_m^p, \quad (6)$$

то есть для логарифмов главных удлинений справедливо аддитивное разложение.

Введем в рассмотрение тензор напряжений Коши–Эйлера в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j$$

и выведем определяющие уравнения из второго уравнения термодинамики для изотермического процесса в форме

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} - \dot{\Psi} \geq 0. \quad (7)$$

Функционал свободной энергии Ψ зависит лишь от упругих деформаций, поэтому вполне возможно считать логарифмы главных упругих удлинений $H_i^e = \ln \lambda_i^e$ его аргументами

$$\Psi = \Psi(H_1^e, H_2^e, H_3^e), \quad (8)$$

что справедливо для изотропных материалов.

После несложных преобразований неравенство (7) приведем к форме

$$\sum_i \left[\sigma_{ii} - \frac{\partial \Psi}{\partial H_i^e} \right] d_{ii} + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} d_{ij} + \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial H_i^e} \dot{H}_i^p \geq 0.$$

Отсюда следуют физические соотношения

$$\sigma_{ii} = \sigma_i = \frac{\partial \Psi}{\partial H_i^e}, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j \quad (9)$$

и диссипативное неравенство

$$D_p = \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial H_i^e} \dot{H}_i^p = \sum_i \sigma_i \dot{H}_i^p \geq 0. \quad (10)$$

Условие упругого состояния примем в обычной форме

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \kappa) \leq 0, \quad (11)$$

где κ — параметр изотропного упрочнения.

Далее применим технологию, широко используемую в зарубежных публикациях, а именно составим функционал, в котором участвуют диссипативное неравенство (10) и условие предельного состояния (11)

$$\Upsilon(\sigma_i) = \dot{\lambda} \Phi(\sigma_i, \kappa) - D_p = \dot{\lambda} \Phi(\sigma_i, \kappa) - \sum_i \sigma_i \dot{H}_i^p \leq 0,$$

где $\dot{\lambda}$ имеет смысл функции Лагранжа. Считается, что истинное напряженно-деформированное состояние соответствует экстремуму этого функционала по напряжениям σ_i . Из этого условия получается закон пластического течения

$$\dot{H}_i^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i}. \quad (12)$$

Найденное соотношение применяется в многочисленных численных методиках (например [11, 13, 14, 20 и др.]). Отметим, что выясняется физический смысл функции $\dot{\lambda}$, которая является мерой скорости пластического деформирования. В частности, в качестве этой функции можно принять скорость роста интенсивности пластических деформаций. Введенный ранее параметр упрочнения имеет своим аргументом как раз эту величину, то есть $\kappa = \kappa(\lambda)$.

3. Соотношения типа Прандтля–Рейсса

Полученные в предыдущем разделе результаты позволяют построить соотношения типа Прандтля–Рейсса в логарифмах главных удлинений. Для этого составим условие стационарности для активного нагружения, при котором неравенство (11) переходит в равенство

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i + \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0, \quad (13)$$

вычислим производную напряжения (9) с учетом (12)

$$\dot{\sigma}_i = \sum_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i^e \partial H_j^e} (\dot{H}_j - \dot{H}_j^p) = \sum_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i^e \partial H_j^e} \left(\dot{H}_j - \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_j} \right) \quad (14)$$

и подставим ее в уравнение (13). В результате получим уравнение для определения $\dot{\lambda}$, которое легко разрешается:

$$\dot{\lambda} = \left\{ \sum_{i,j} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i^e \partial H_j^e} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_j} \right] - \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right\}^{-1} \left\{ \sum_{i,j} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i^e \partial H_j^e} \dot{H}_j \right] \right\}. \quad (15)$$

После подстановки этого выражения в (14) найдем зависимость скорости напряжений от скорости логарифмов главных деформаций (полных).

Запишем уравнение (15) в приращениях, что более актуально для практических реализаций. Для этого введем обозначения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} = \partial \Phi_i, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i^e \partial H_j^e} = \partial^2 \Psi_{ij}, \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} = \kappa'.$$

Итак, аналог уравнений (14) и (15) имеет вид:

$$\Delta \sigma_i = \sum_j \partial^2 \Psi_{ij} \left(\Delta H_j - \partial \Phi_j \frac{\sum_{m,n} [\partial \Phi_m \cdot \partial^2 \Psi_{mn} \cdot \Delta H_n]}{\sum_{m,n} [\partial \Phi_m \cdot \partial^2 \Psi_{mn} \cdot \partial \Phi_n]} - \kappa' \right). \quad (16)$$

Полученное уравнение вполне может быть использовано в практических расчетах. Однако применение такого рода соотношений не обеспечивает точного выполнения уравнения предельного состояния при активном нагружении.

4. Метод предиктор–корректор

Широкое распространение получил метод численного интегрирования уравнений (6), (12) по неявной схеме Эйлера. Базовым является уравнение на шаге нагружения $(k + 1)$

$${}^{k+1}H_m = {}^kH_m + \Delta {}^kH_m^e + \Delta^k \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial ({}^{k+1}\sigma_m)},$$

из которого следует

$${}^{k+1}H_m^e = {}^{k+1}H_m - \Delta^k \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial ({}^{k+1}\sigma_m)}. \quad (17)$$

Теперь уравнение (9) записывается как

$${}^{k+1}\sigma_m = \frac{\partial \Psi}{\partial {}^{k+1}H_m^e}, \quad (18)$$

а уравнение предельного состояния (11) для активного нагружения принимается в виде

$$\Phi({}^{k+1}\sigma_1, {}^{k+1}\sigma_2, {}^{k+1}\sigma_3, \kappa({}^{k+1}\lambda)) = 0. \quad (19)$$

Полученные уравнения представляют собой систему нелинейных уравнений для определения ${}^{k+1}H_m^e$, ${}^{k+1}\sigma_m$, ${}^{k+1}\lambda$, которая решается локально в каждой материальной точке.

Приведенная технология имеет различные названия: радиальное возвращение на поверхность текучести» (radial return algorithm) [19, 20], «метод проецирования

напряжений на поверхность текучести» (return mapping algorithm, projection method) [15, 21], метод предиктор-корректора [22, 23], метод расщепления [24, 25] и другие. Более детально рассмотрим ее для теории пластичности Мизеса. Для этого введем

интенсивность напряжений $\sigma_* = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_m \sigma'_m \sigma'_m}$, интенсивность деформаций пластичности

$\varepsilon_*^p = \sqrt{\frac{2}{3} \sum_m H_m'^p H_m'^p} = \lambda$, девиатор напряжений $\sigma'_m = \sigma_m - \frac{1}{3} \sum_n \sigma_n = \sigma_m - \sigma_0$, девиатор

логарифмических деформаций $H'_m = H_m - \frac{1}{3} \sum_n H_n = H_m - H_0$. В этом случае справедливо

соотношение $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} = \frac{3}{2\sigma_*} \sigma'_m$, что соответствует отсутствию пластических деформаций при гидростатическом обжатии (равностороннем растяжении).

В качестве упругого потенциала примем следующее выражение

$$\Psi = \Psi(H_1^e, H_2^e, H_3^e) = \mu \sum_m H_m^{e2} + \frac{\lambda}{2} \left[\sum_m H_m^e \right]^2, \quad (20)$$

которое используется в работах [13, 14, 20 и других].

Соотношения (17)–(20) приводят к системе уравнений

$${}^{k+1}H_m'^e = {}^{k+1}H'_m - \Delta^k \lambda \frac{3^{k+1} \sigma'_m}{2^{k+1} \sigma_*}, \quad (21)$$

$${}^{k+1}\sigma'_m = 2\mu {}^{k+1}H_m'^e, \quad (22)$$

$${}^{k+1}\sigma_* - \sigma_T^0 - \kappa \left({}^k\lambda + \Delta^k \lambda \right) = 0. \quad (23)$$

Если введем обозначения для так называемых «пробных» упругих удлинений и напряжений

$${}^{k+1}\widehat{H}_m'^e = {}^k H_m'^e + \Delta^k H'_m, \quad {}^{k+1}\widehat{\sigma}'_m = 2\mu {}^{k+1}\widehat{H}_m'^e,$$

то после несложных преобразований из системы (21)–(23) получим уравнение для определения $\Delta^k \lambda$:

$$3\mu \Delta^k \lambda + \kappa \left({}^k\lambda + \Delta^k \lambda \right) = {}^{k+1}\widehat{\sigma}_* - \sigma_T^0. \quad (24)$$

В общем случае это уравнение нелинейное и решается итерационным образом локально в каждой материальной точке.

После решения уравнения (24) переходим к определению значений предела текучести ${}^{k+1}\sigma_T = \sigma_T^0 + \kappa \left({}^k\lambda + \Delta^k \lambda \right)$, значений девиаторов упругих деформаций и напряжений

$${}^{k+1}H_m'^e = {}^{k+1}\widehat{H}_m'^e \left[1 + 3\mu \frac{\Delta^k \lambda}{{}^{k+1}\sigma_T} \right]^{-1}, \quad {}^{k+1}\sigma'_m = 2\mu {}^{k+1}H_m'^e. \quad (25)$$

Описанная процедура (в различных вариантах) широко используется в литературе и приводит к хорошим результатам. Отметим, что шаровая часть (в рамках рассмотренной модели) является упругой, то есть к уравнениям (25) следует добавить соотношение

$$\frac{1}{3} \sum_m^{k+1} \sigma_m = \left[\frac{2}{3} \mu + \lambda \right] \sum_m^{k+1} H_m,$$

которое на шаге нагружения $(k+1)$ дает значение среднего напряжения (гидростатического давления).

5. Вычислительный алгоритм

Вычислительная технология решения задачи с применением полученных соотношений представляет собой сочетание метода последовательных нагружений и итерационного процесса Ньютона на шаге нагружения. Подобная методика ранее использовалась автором в работах [1, 16] и подробно описана в [1]. Разрешающее уравнение в приращениях принимается в виде

$$\begin{aligned} & \int_{V^k} \left\{ \Delta_l^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_l^k \mathbf{d}_R + \left[\mathbf{I} \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R \right]_l^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_l^k \mathbf{d}_R - \frac{1}{2} {}_l^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\delta_l^k \mathbf{h}_R \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R + \Delta_l^k \mathbf{h}_R^T \cdot \delta_l^k \mathbf{h}_R^T \right] \right\} dV - \\ & - \int_{V^k} \left[\mathbf{I} \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R \right]^k \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^\sigma} \left[{}^k \mathbf{t}_n^* \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R^T - \left[\mathbf{I} \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R \right]^k \mathbf{t}_n^* \right] \cdot \delta \mathbf{v} dS = \\ & = \int_{V^k} {}^{k+1} \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^\sigma} {}^{k+1} \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_{V^k} {}_l^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_l^k \mathbf{d}_R dV, \end{aligned} \quad (26)$$

где k — номер шага нагружения, l — номер итерации. Расшифровка всех обозначений приведена в работах [1, 9].

Отличие методики, представленной в настоящей работе, состоит в процедуре вычисления приращения $\Delta^k \sigma'_m$. В качестве первого приближения можно воспользоваться чисто упругими приращениями, то есть

$$\Delta^k \sigma'_m = 2\mu \Delta^k H'_m = 2\mu \Delta^k d'_{mmR}. \quad (27)$$

Такой вариант является вполне работоспособным и использован автором в работах [25, 27] (без итерационного уточнения).

Интересно отметить, что изложенная методика разделения деформаций на упругие и неупругие плохо сочетается с соотношениями типа (16). Практика показывает, что сходимость вычислительного алгоритма либо чрезвычайно медленная, либо отсутствует вовсе. Этот факт подтверждается и в литературе (например, см. [28]). В этом случае предпочтительнее строить самостоятельные линеаризованные соотношения. Рассмотрим один из возможных вариантов.

Уравнение (23) представляет собой равенство

$${}^{k+1} \sigma_* = {}^{k+1} \sigma_T. \quad (28)$$

Справедливы приближенные соотношения

$${}^{k+1}\sigma_* \approx {}^k\sigma_* + \frac{3}{2} \frac{{}^k\sigma_n}{{}^k\sigma_*} \Delta^k \sigma_n, \quad {}^{k+1}\sigma_T \approx {}^k\sigma_T + \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \Delta^k \lambda,$$

с помощью которых из (28) получим линейризацию параметра $\Delta^k \lambda$ по приращениям напряжений:

$$\Delta^k \lambda = \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right)^{-1} \frac{3}{2} \frac{{}^k\sigma_n}{{}^k\sigma_*} \Delta^k \sigma_n. \quad (29)$$

Для «пробных» напряжений справедливо представление

$${}^{k+1}\widehat{\sigma}'_m = {}^k\sigma'_m + 2\mu \Delta^k H'_m.$$

Теперь, с учетом (29), проведем линейризацию соотношений (25):

$$\begin{aligned} {}^k\sigma'_m + \Delta^k \sigma'_m &= {}^{k+1}\widehat{\sigma}'_m \left[1 + 3\mu \frac{\Delta^k \lambda}{{}^{k+1}\sigma_T} \right]^{-1} = {}^{k+1}\widehat{\sigma}'_m \left[1 - 3\mu \frac{\Delta^k \lambda}{{}^{k+1}\sigma_T} \right] = \\ &= {}^k\sigma'_m + 2\mu \Delta^k H'_m - \frac{9}{2} \mu \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right)^{-1} \frac{{}^k\sigma'_m {}^k\sigma'_n}{{}^k\sigma_*^2} \Delta^k \sigma_n. \end{aligned}$$

Отсюда получим искомые линейризованные физические соотношения для девиаторной части

$$\Delta^k \sigma'_n = 2\mu \left[\delta_{mn} + \frac{9}{2} \mu \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right)^{-1} \frac{{}^k\sigma'_m {}^k\sigma'_n}{{}^k\sigma_*^2} \right]^{-1} \Delta^k H'_m. \quad (30)$$

Найденные соотношения (30) вполне уместно использовать вместо упрощенных соотношений (27). Подробное описание вычисления всех слагаемых, входящих в уравнение (26), и конечно-элементная дискретизация содержатся в [1]. Все эти построения справедливы и в настоящем случае, поэтому здесь не приводятся.

6. Числовой пример

В качестве числового примера рассматривается задача растяжения круглого стержня со следующими параметрами: длина — 53,334 мм; радиус — 6,413 мм; модуль упругости — 206,9 ГПа; коэффициент Пуассона — 0,29; начальный предел текучести — 0,45 ГПа; для функции упрочнения принимается выражение

$$\kappa(\lambda) = h\lambda + (\sigma_\infty - \sigma_T^0)(1 - e^{-\eta\lambda}),$$

в котором $h = 0,129$ ГПа, $\sigma_\infty = 0,715$ ГПа, $\eta = 16,92$. Эти значения используются многими авторами, поэтому для сравнения результатов в настоящей работе они принимаются такими же. Отметим, что для конкретизации места образования шейки в центре стержня задается снижение радиуса на 0,18% (до значения 6,297 мм). Для экономии времени расчета ввиду симметрии задачи непосредственно моделируется 1/8 часть всего стержня с наложением соответствующих условий симметрии.

На рисунке 1 приводится общий вид стержня с образовавшейся шейкой, на котором дается также сетка используемых 8-узловых полилинейных изопараметрических конечных элементов. На рисунке 2 представлена диаграмма сила – перемещение торца в сравнении с другими решениями. Большой разброс данных связан с тем, что в цитируемых работах используются различные тензоры, описывающие конечные деформации, различные методики разделения упругих и неупругих деформаций и так далее.

Также следует отметить, что влияние на поведение решения в пластической области оказывают граничные условия на торцах, а именно: допускаются или нет радиальные смещения, то есть уменьшается ли площадь поперечного сечения торца или нет. В работах об этом часто не говорится, однако численные исследования свидетельствуют, что недеформируемость торцов понижает кривую диаграммы. В данной работе используются условия возможности радиальных смещений торца и задаются значения его продольных смещений. Фактически в расчете реализуется «жесткое» нагружение.

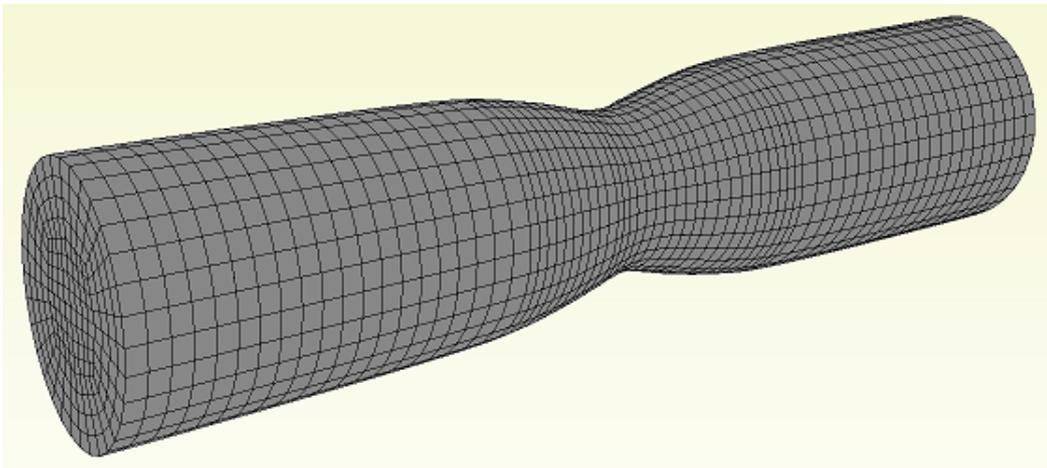


Рис. 1. Деформированное состояние стержня

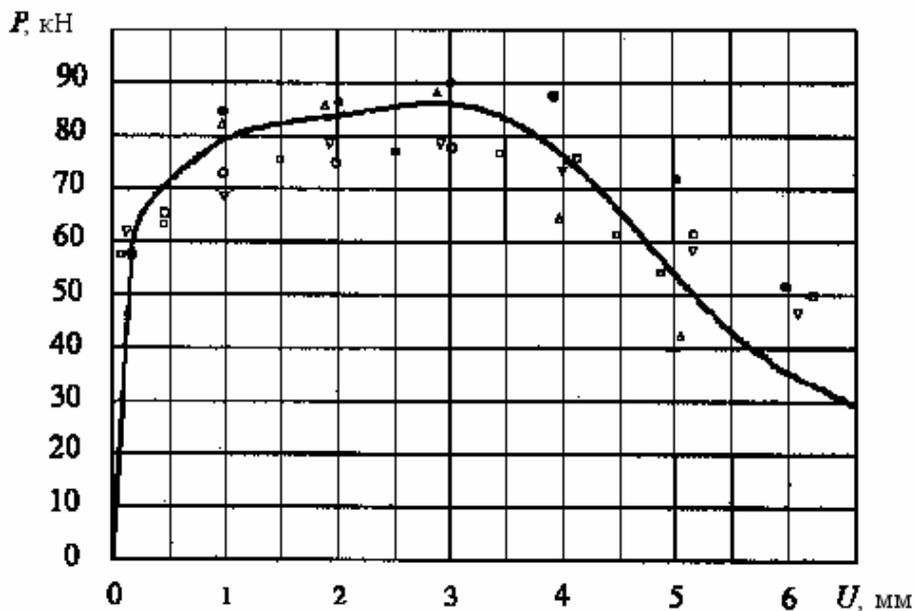


Рис. 2. Диаграмма сила – перемещение торца: сплошная кривая – решение по описанной методике, Δ – решение [29], \square – решение [30], \bullet – решение [14], \circ – решение [31], ∇ – решение [32].

7. Заключение

Предложенная методика решения задачи конечных деформаций упругопластических тел в значительной степени сводится к скалярным соотношениям относительно трех главных деформаций и трех главных напряжений. Предложенная форма мультипликативного разложения градиента деформаций на упругую и неупругую части позволяет получить математическую модель, вполне укладывающуюся во множество ранее предложенных вычислительных моделей. Вычислительная методика типа «предиктор–корректор», рассмотренная здесь, позволяет строить алгоритм, дающий вполне адекватные результаты для достаточно сложных задач конечных упругопластических деформаций.

Редколлегия благодарит Л.У. Султанова за помощь в завершении работы над статьей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00546).

Литература.

1. Голованов А.И. Конечно-элементное моделирование больших деформаций гиперупругих тел в терминах главных удлинений // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 19-37.
2. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
3. Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах Н., Габберт У., Данкерт Ю., Кеплер Х., Кочык З. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с.
4. Трусов П.В., Швейкин А.И. Теория определяющих соотношений: Ч. II. Теория пластичности. – Пермь: ПГТУ, 2008. – 243 с.
5. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск, 2000. – 262 с.
6. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. – Киев: Наукова думка, 1987. – 232 с.
7. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритм, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
8. Голованов А.И. Кинематика конечных упругопластических деформаций // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 7. – С. 16-31.
9. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2009. – 465 с.
10. Simo J.S., Taylor R.L. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches: continuum basis and numerical algorithms // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1991. – V. 85. – P. 273-310.
11. Simo J.S., Meschke G. A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials // Comput. Mech. – 1993. – V. 11. – P. 253-278.
12. Betsch P., Stein E. Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1999. – V. 179. – P. 215-245.
13. Ibrahimbegovic A., Gharzeddin F. Finite deformation plasticity in principal axes: from a manifold to the Euclidean setting // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1999. – V. 171. – P. 341-369.
14. Ibrahimbegovic A., Chorfi L. Covariant principal axes formulation of associated coupled thermoplasticity at finite strains and its numerical implementation // Int. J. Solids Struct. – 2002. – V. 39. – P. 499-528.
15. Rosati L., Varloso N. A return map algorithm for general isotropic elasto/visco-plastic materials in principal space // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2004. – V. 60. – P. 461-498.
16. Голованов А.И. Конечно-элементное моделирование больших упругопластических деформаций в терминах главных удлинений // Материалы Второй Межд. конф. «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела». – Казань, 2009. – С. 125-127.
17. Chatti S., Dogui A., Dubujet P., Sidoroff F. An objective incremental formulation for the solution of anisotropic elastoplastic problems at finite strain // Commun. Numer. Meth. Eng. – 2001. – V. 17. – P. 845-862.
18. Idesman A.V. Comparison of different isotropic elastoplastic models at finite strains used in numerical analysis // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2003. – V. 192. – P. 4659-4674.
19. Simo J.S., Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1985. – V. 49. – P. 221-245.

20. *Eterovic A.L., Bathe K.-J.* A hyperelastic – based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic–kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1990. – V. 30. – P. 1099-1114.
21. *Auricchio F., Taylor R.L.* A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes // *Int. J. Plasticity.* – 1999. – V. 15. – P. 1359-1378.
22. *Rouainia M., Wood D.M.* Computational aspects in finite strain plasticity analysis of geotechnical materials // *Mech. Res. Commun.* – 2006. – V. 33. – P. 123-133.
23. *Basar Y., Itskov M.* Constitutive model and finite element formulation for large strain elasto-plastic analysis of shell // *Comput. Mech.* – 1999. – V. 23. – P. 466-481.
24. *Кукуджанов В.Н.* Метод расщепления упругопластических уравнений // *Изв. РАН. МТТ.* – 2004. – № 1. – С. 98-108.
25. *Кукуджанов В.Н., Левитин А.Л., Синюк В.Л.* Численно-аналитический метод расщепления для моделирования квазистатических процессов деформирования повреждающихся материалов // *Проблемы прочности и пластичности.* – 2006. – Вып. 70. – С. 7-21.
26. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Большие вязкоупругопластические деформации трехмерных тел // *Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки.* – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 75–89.
27. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел МКЭ // *Прикладная механика.* – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 36-43.
28. *Simo J.S., Taylor R.L.* Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1985. – V. 48. – P. 101–118.
29. *Steinmann P., Miehe C., Stein E.* Comparison of different finite deformation inelastic damage models within multiplicative elastoplasticity for ductile materials // *Comput. Mech.* – 1994. – V. 13. – P. 458–474.
30. *Meggyes A.* Multiple decomposition in finite deformation theory // *Acte Mech.* – 2001. – V. 146. – P. 169-182.
31. *Schroder J., Gruttmann F., Loblein J.* A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures // *Comput. Mech.* – 2002. – V. 30. – P. 48-64.
32. *Eidel B., Gruttmann F.* Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // *Comput. Mater. Sci.* – 2003. – V. 28. – P. 732–742.

Поступила в редакцию 22.06.10