

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

В.И. Одинокоев, А.Н. Прокудин

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия*

Разработана численная процедура и на ее основе алгоритм определения напряженно-деформированного состояния (НДС) частей многокомпонентной системы, находящейся под действием динамической нагрузки. Система состоит из упругих твердых тел и несжимаемой ньютоновской жидкости. Эффективность метода проверена на примере процесса разрушения ледяного покрова. Приведены результаты вычислительных экспериментов

*Ключевые слова:* механика деформируемого твердого тела, краевая задача, динамическое деформирование, напряженно-деформированное состояние, уравнения Навье–Стокса, численное моделирование

## NUMERICAL MODELING OF DEFORMATION OF THE ELEMENTS OF A MULTICOMPONENT SYSTEM SUBJECTED TO DYNAMIC LOAD

V.I. Odinkov and A.N. Prokudin

*Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

We present a method for constructing a numerical procedure and an algorithm for its numerical realization in order to determine the strain-stress state of the elements of a multicomponent system subjected to dynamic load. The system consists of elastic solid bodies and an incompressible Newtonian fluid. The capabilities of the method have been verified by studying the ice field destruction process. The results of numerical experiments are given.

*Key words:* solid mechanics, boundary-value problem, dynamic deformation, stress-strain state, Navier–Stokes equations, numerical modeling

### 1. Введение

В статье исследуется запатентованный авторами способ разрушения ледяного покрова [1], при котором под лёд или его нагромождение заводится устройство (Рис. 1), состоящее из двух металлических цилиндров (стаканов) 1 и 2, вложенных один в другой и имеющих систему ограничения движения по вертикали. Верхний цилиндр 1 направлен дном в сторону нижней поверхности льда, а нижний 2 — в сторону дна водоёма и имеет каналы 3, по которым проходит гибкая система 4. Плавуемость и маневренность конструкции обеспечивается системой двигателей 5 и камерой 6.

Работа устройства осуществляется следующим образом:

1. Устройство заводится в необходимое место под ледяной покров с помощью двигательных механизмов 5 и камеры 6, управляемых с передвижной станции, которая может располагаться на берегу либо на судне.

2. С передвижной станции по гибкой системе в пространство между цилиндрами 1 и в полость 8 нижнего цилиндра поступает определенный объем газовой смеси.

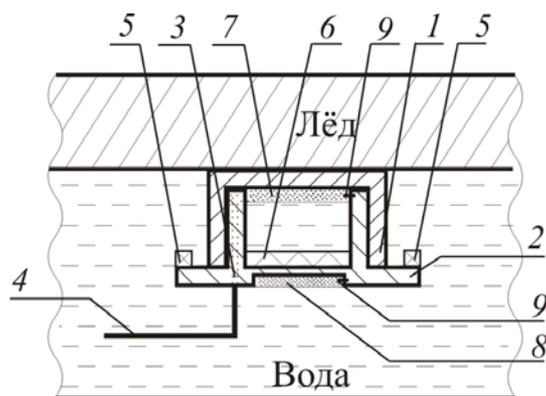


Рис. 1. Устройство для разрушения ледяного покрова

3. По гибкой системе подается искровой разряд от свечей 9. Происходит взрыв газовой смеси, в результате которого верхний цилиндр устремляется вверх, ломая локальную область ледяного покрова. Движению нижнего цилиндра препятствует давление, создаваемое взрывом газовой смеси в его нижней полости 8.

4. После взрыва продукты горения газовой смеси выходят через перфорацию в стенках цилиндра и устройство перемещается подо льдом в новое место.

В работе [2] численно исследовался способ разрушения ледяного покрова, предложенный в [3], где полагалось, что газоздушная смесь поступает только в пространство между цилиндрами 1 и 2 (Рис. 1). Результаты расчетов показали, что основным недостатком такого способа разрушения является высокая скорость движения цилиндра 2 вниз, что может привести к повреждению системы ограничения движения цилиндров по вертикали.

## 2. Математическая модель

Формализованная расчетная схема процесса разрушения приведена на рисунке 2.

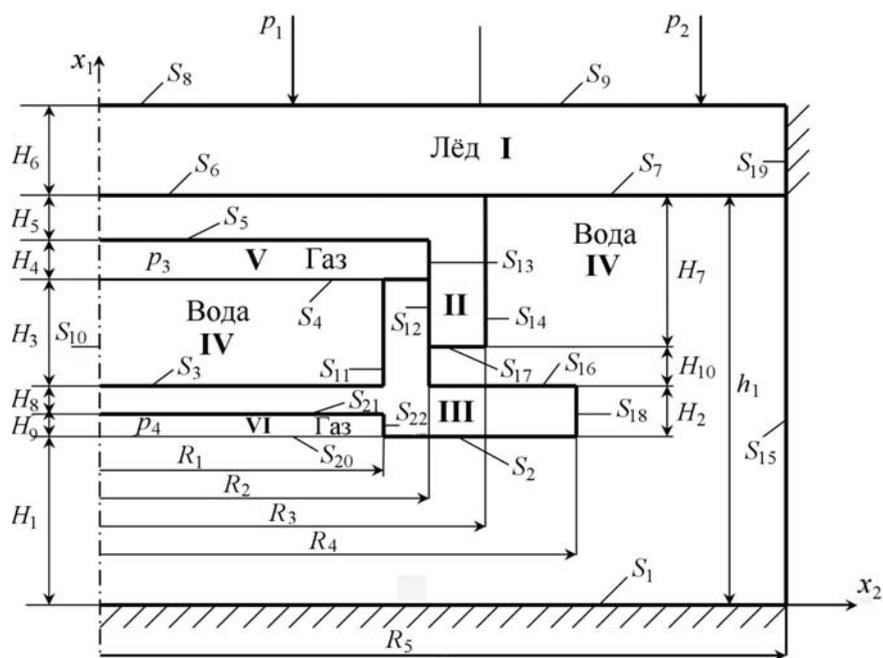


Рис. 2. Расчетная схема процесса

Здесь область I — лед, на который действуют нагрузки  $p_1, p_2$ , способные изменяться как по величине, так и по координате  $x_2$ :  $p_1 \geq p_{am}, p_2 \geq p_{am}$  ( $p_{am}$  — атмосферное давление). Области II и III отвечают верхнему и нижнему цилиндрам, область IV — воде, области V и VI — газовым подушкам, соответственно, в пространстве между стаканами и в днище нижнего стакана. Периферийная область, которой соответствует координата  $R_4 < x_2 < R_5$ , имеет существенно больший объем, чем цилиндры — области II, III.

Запишем систему разрешающих уравнений для обозначенных областей.

### 2.1. Области I, II, III (лёд, цилиндры)

При построении модели определения НДС в этих областях будем исходить из следующих допущений: среды являются упругими однородными изотропными несжимаемыми, а возникающие в них деформации — малыми. Тогда в декартовой системе координат описание НДС будет включать:

– уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i' = I_i', \quad I_i' = \rho_t \left( \dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3); \quad (1)$$

– закон Гука для малых деформаций

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2(G)_t \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, 2, 3); \quad (2)$$

– уравнение несжимаемости

$$v_{i,i} = 0. \quad (3)$$

Здесь:  $t$  — идентификатор области ( $t = I, II, III$ );  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $F_i'$  — проекция удельной объемной силы на координатные оси  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $I_i'$  — проекция инерционной силы на координатные оси  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), отнесенная к единице объема соответствующей области;  $\rho_t$  — плотность материала;  $v_i$  — проекции скоростей перемещений на координатные оси  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$ , где  $\tau$  — время;  $\sigma$  — гидростатическое напряжение;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $G_t$  — модуль сдвига среды в области  $t$ ;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций. Используется суммирование по повторяющимся индексам.

Для малых деформаций справедливы соотношения:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{d\tau} = \xi_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \int_{\tau} \xi_{ij} d\tau, \quad (4)$$

где  $[\xi_{ij}]$  — тензор скоростей деформаций,  $\xi_{ij} = 0,5(v_{i,j} + v_{j,i})$ .

В разностном виде при дискретном по времени ( $\tau = \sum_m \Delta\tau_m$ ) деформировании формула (4) принимает вид:

$$(\varepsilon_{ij})_m \cong \sum_m (\xi_{ij})_m \Delta\tau_m = (\varepsilon_{ij})_{m-1} + (\xi_{ij})_m \Delta\tau_m, \quad (5)$$

где  $\Delta\tau_m$  — величина  $m$ -го шага по времени;  $(\xi_{ij})_m$  и  $(\varepsilon_{ij})_m$  — компоненты тензоров скоростей деформаций и деформаций на  $m$ -м шаге;  $(\varepsilon_{ij})_{m-1}$  — компоненты тензора деформаций на  $(m - 1)$ -м шаге по времени.

### 2.2. Область IV (вода)

Положим, что вода является ньютоновской вязкой несжимаемой жидкостью. С учетом этих допущений, система дифференциальных уравнений для области IV будет включать:

– уравнения Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости

$$F_i^t - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i = I_i^t, \quad I_i^t = \rho_t \left( \dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3; \quad t = IV); \quad (6)$$

– уравнение несжимаемости

$$v_{i,i} = 0, \quad (7)$$

где  $p$  — давление,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа.

### 2.3. Области V и VI (газовоздушная смесь)

При моделировании газовой смеси используется ряд упрощающих предположений:

– ударно-волновые эффекты, возникающие в результате горения газовой смеси, не рассматриваются;

– влияние продуктов горения учитывается с помощью задания граничных условий для давления на поверхностях раздела продуктов горения с водой и цилиндрами: давление  $p_3, p_4$  (для областей V и VI соответственно) в ходе горения возрастает от некоторого начального значения  $p_{нач}$  до конечного  $p_{кон}$ ;

– поскольку продолжительность горения мала ( $< 0,1$  сек), процесс может считаться адиабатическим, и для продуктов горения допустим закон  $pV = \text{const}$ : давление продуктов горения, с одной стороны, возрастает по линейному закону, а с другой, — уменьшается вследствие расхождения цилиндров и увеличения объема области между ними.

Время горения  $\tau_2$  определяется толщиной газовой подушки  $H_4$  и скоростью горения  $v_2$ :  $\tau_2 = H_4/v_2$ . Величины  $p_{кон}, v_2$  задавались по экспериментальным данным работы [4].

#### 2.4. Приведение системы уравнений для областей I–IV к единому виду

Для удобства построения численной схемы приведем системы уравнений (1)–(3) (для областей I–III) и (6), (7) (для области IV) к единому виду:

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t, \quad I_i^t = \rho_t \left( \dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (t = I, II, III, IV), \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\lambda_t C_{ij}^t, \quad \begin{cases} \lambda_t = G_t, & C_{ij}^t = \varepsilon_{ij} & (t = I, II, III), \\ \lambda_t = \mu, & C_{ij}^t = \xi_{ij} & (t = IV), \end{cases} \quad (9)$$

$$v_{i,i} = 0. \quad (10)$$

Соответствие системы (8)–(10) системе (6), (7) нетрудно показать: выразим из уравнений (9) компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и подставим в уравнения (8), учитывая уравнение несжимаемости (10) и соотношение  $p = -\sigma$ ; в результате получим систему уравнений (6), (7).

#### 2.5. Граничные условия задачи

Задача решается в цилиндрической системе координат при следующих граничных условиях (Рис. 2):

– условия осевой симметрии

$$v_3 = 0; \quad \xi_{13} = 0; \quad \xi_{23} = 0; \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0; \quad (11)$$

– на поверхностях контакта и оси симметрии

$$\sigma_{21}|_{S_i} = 0 \quad (i = 10 \dots 15, 18, 22), \quad (12)$$

$$\sigma_{12}|_{S_i} = 0 \quad (i = 1 \dots 9, 16, 17, 20, 21), \quad (13)$$

$$v_2|_{S_{10}} = 0; \quad (14)$$

– внешние нагрузки, действующие на ледяную пластину

$$\sigma_{11}|_{S_8} = -p_1, \quad \sigma_{11}|_{S_9} = -p_2; \quad (15)$$

– давление продуктов горения газозвоздушной смеси в областях V и VI

$$\sigma_{11}|_{S_i} = -p_3 \quad (i = 4, 5), \quad \sigma_{22}|_{S_{13}} = -p_3, \quad (16)$$

$$\sigma_{11}|_{S_i} = -p_4 \quad (i = 20, 21), \quad \sigma_{22}|_{S_{22}} = -p_4; \quad (17)$$

– условие непротекания на дне водоема

$$v_1|_{S_1} = 0; \quad (18)$$

– условия на внешней границе расчетной области

$$v_2|_{S_{19}} = 0, \quad \sigma_{22}|_{S_{15}} = -p_1 - \gamma_1 H_6 - \gamma_2 h \quad (0 \leq h \leq h_1); \quad (19)$$

– сцепление ледяной пластины с основой на поверхности  $S_{19}$  задается с помощью закона трения

$$\sigma_{21}|_{S_{19}} = -\psi \sigma_s \frac{v_{ск}}{|v_u|}, \quad (20)$$

где  $v_{ск}$  — скорость скольжения области I относительно основы ( $v_{ск} = v_1|_{S_{19}} - v_1^*$ ),  $v_1^*$  — скорость основы ( $v_1^* = 0$ ),  $|v_u|$  — нормирующая скорость,  $\sigma_s$  — условный предел текучести льда,  $\psi$  — коэффициент трения (принималось  $\psi = 1000$ ).

В работах [5, 6] опубликованы результаты численного исследования процесса разрушения ледяного покрова речных [5] и морских [6] акваторий рассматриваемым здесь устройством [1], но в этих работах, в отличие от данной, на поверхности  $s_{15}$  задается значение скорости перемещений:  $v_2|_{s_{15}} = 0$ .

### 3. Численная процедура решения

В настоящее время одним из самых распространенных методов расчета НДС механических многокомпонентных систем, на которые действуют статические и динамические нагрузки, является метод конечных элементов. Результатом его развития стали многочисленные программные пакеты инженерных расчетов, такие как Ansys, MSC Nastran, Abaqus, SAMCEF и другие.

В данной работе рассматривается основанный на оригинальном численном методе [7, 8] подход, позволяющий исследовать многокомпонентные системы, состоящие не только из упругих тел, но также включающие вязкую несжимаемую жидкость.

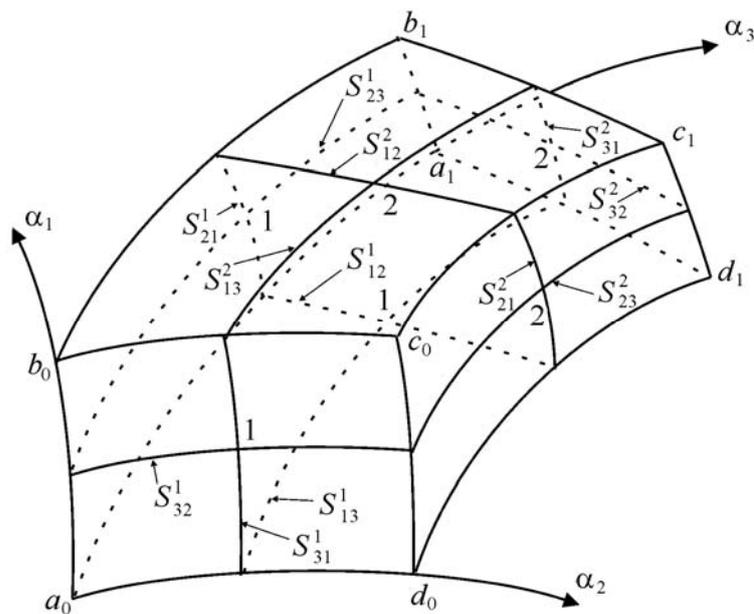


Рис. 3. Произвольный ортогональный элемент

Согласно методу [7, 8] расчетная область разбивается на ортогональные элементы конечных размеров (Рис. 3). Для каждого элемента записывается в разностном виде система (8)–(10), которая затем решается по разработанному в данной работе алгоритму с учетом граничных условий (11)–(20). В результате расчета получаются значения напряжений  $\sigma_{ij}$  и скоростей перемещений  $v_i$  на гранях каждого элемента. В основе численного метода лежит однородная разностная схема, при этом разностные уравнения удовлетворяются не в узлах сетки, а внутри элементов, составляющих область. Теоретические положения сходимости используемого численного метода рассматриваются в работе [7].

### 3.1. Конечно-разностное представление дифференциальных уравнений для произвольного ортогонального элемента

Сначала рассмотрим конечно-разностное представление дифференциальных уравнений (8)–(10) для произвольного ортогонального элемента. Далее записанные соотношения преобразуем с учетом осевой симметрии для ортогонального элемента в цилиндрической системе координат.

В соответствии с работой [9] уравнения движения (8) запишем в разностной форме для произвольного ортогонального криволинейного элемента (Рис. 3):

$$S_{ik}\Delta S_{ij}(\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + S_{ij}\Delta S_{ik}(\sigma_{ii} - \sigma_{kk}) + 1/2\Delta\sigma_{ii}S_{ij}S_{ik} + 1/2\Delta\sigma_{ik}S_{ki}S_{kj} + 1/2\Delta\sigma_{ij}S_{ji}S_{jk} + \\ + (S_{ji}\Delta S_{jk} + 2S_{jk}\Delta S_{ji})\sigma_{ij} + (S_{ki}\Delta S_{kj} + 2S_{kj}\Delta S_{ki})\sigma_{ik} + (F'_i - I'_i) \cdot 2V = 0. \quad (21)$$

Здесь  $i, j, k = 1, 2, 3$ ;  $i \neq j \neq k$ ;  $t = I, \dots, IV$ ;  $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$ ,  $\Delta S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1$ ,  $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1$  ( $i, j = 1, 2, 3$ );  $V = (1/8) \cdot S_{12} \cdot S_{13} \cdot S_{21}$ ; где  $S_{im}^r$  — величина дуги средней линии, располагающейся на грани  $r$  и перпендикулярной координатной оси  $\alpha_l$ , направленной вдоль  $\alpha_m$ ; значения  $S_{im}^r$  вычисляются как средние от значений дуг границ граней (ребер), например (см. Рис. 3),  $S_{32}^1 = 0,5 \left( \left| a_0 d_0 \right| + \left| b_0 c_0 \right| \right)$ ;  $\sigma_{ii}^d$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $d = 1, 2$ ) и

$\sigma_{ij}^c$  ( $i \neq j$ ) — нормальное и касательное напряжения, действующие на криволинейных поверхностях «d» и «c» элемента «n», нормалью к которым является касательная к координатной оси  $\alpha_i$ .

Уравнение (10) перепишем в виде:

$$(\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33}) = 0. \quad (22)$$

Выражения  $\xi_{ii}$  для ортогонального элемента «n» имеют вид [9]:

$$\xi_{ii} = \frac{2\Delta v_i}{S_{ji}} + \frac{2v_j}{S_{ji}} \cdot \frac{\Delta S_{ji}}{S_{ij}} + \frac{2v_k}{S_{ki}} \cdot \frac{\Delta S_{ki}}{S_{ik}} \quad (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k), \quad (23)$$

$$v_i = v_i^1 + v_i^2, \quad \Delta v_i = v_i^2 - v_i^1,$$

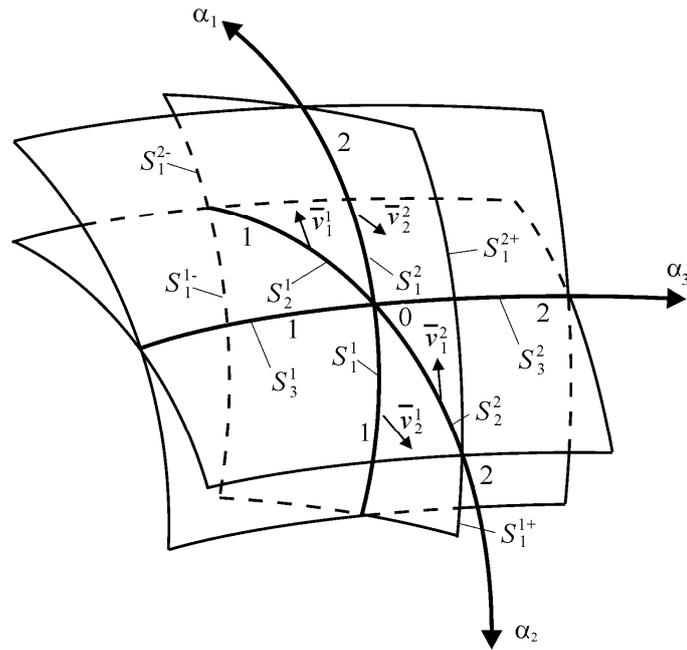


Рис. 4. Произвольный ортогональный элемент

где  $v_i^r$  ( $i=1,2,3; r=1,2$ ) — скорость перемещения на грани « $r$ » элемента « $n$ » в направлении  $\alpha_i$ . Скорости сдвиговых деформаций  $\xi_{ij}$  ( $i \neq j$ ) для элемента « $n$ » определяются как средние арифметические от значений скоростей деформаций в узлах элемента:

$$(\xi_{ij})_n = \frac{1}{8} (\xi_{ij}^{a_0} + \xi_{ij}^{b_0} + \xi_{ij}^{d_0} + \xi_{ij}^{c_0} + \xi_{ij}^{a_1} + \xi_{ij}^{b_1} + \xi_{ij}^{d_1} + \xi_{ij}^{c_1})$$

В свою очередь, скорости деформаций сдвига в узлах элемента (Рис. 4) определяются по формуле [9]:

$$\xi_{ij}^0 = \frac{2\Delta\bar{v}_j}{S_i} - 0,5\bar{v}_j \frac{S_j^+ - S_j^-}{S_i S_j} + \frac{2\Delta\bar{v}_i}{S_j} - 0,5\bar{v}_i \frac{S_i^+ - S_i^-}{S_i S_j} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j), \tag{24}$$

$$S_i = S_i^1 + S_i^2; \quad S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+}; \quad S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-}; \quad \Delta\bar{v}_i = \bar{v}_i^2 - \bar{v}_i^1;$$

где  $S_i^{r+}, S_i^{r-}$  — дуги граней элемента, следующие за  $S_i^r$  по координате  $j$  соответственно в положительную (+) и отрицательную (-) стороны; значения  $\bar{v}_i^j$  ( $j=1,2$ ) вычисляются как средние от значений  $v_i^j$  на гранях, примыкающих к данному ребру.

Рассмотренные выше соотношения (21)–(24) в конечно-разностной форме для произвольного ортогонального элемента позволяют решать задачи нахождения полей напряжений и скоростей перемещений в многокомпонентных системах, части которых описываются в различных системах координат. Система уравнений для всех компонент будет единой, что очень удобно для построения вычислительной процедуры решения задачи в целом.

С учетом осевой симметрии для цилиндрического элемента имеем (Рис. 5):

$$\Delta S_{12} = 0; \quad \Delta S_{32} = 0; \quad \Delta S_{31} = 0; \quad \Delta S_{21} = 0; \quad \Delta S_{13} = 0. \tag{25}$$

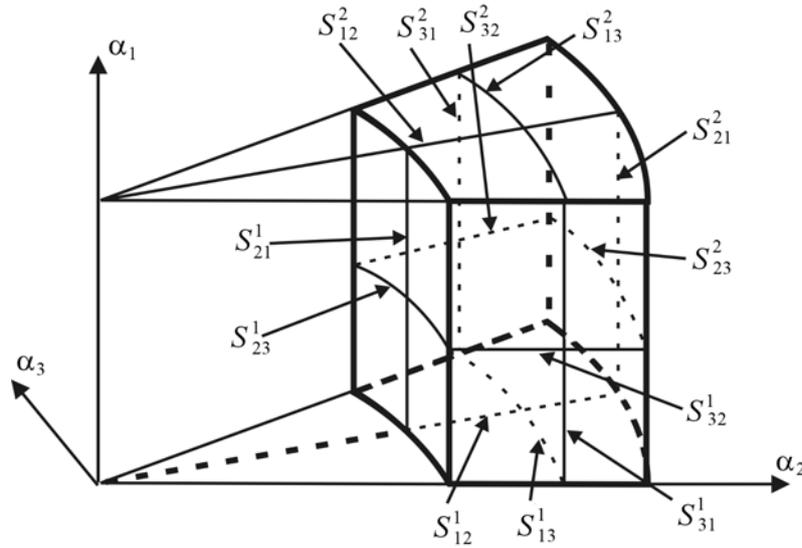


Рис. 5. Ортогональный цилиндрический элемент

Тогда, принимая во внимание граничные условия (11) и (25), перепишем уравнения для произвольного ортогонального элемента (21)–(24) в цилиндрической системе координат в следующем виде:

– уравнения (21)

$$\frac{1}{2} \Delta \sigma_{11} S_{12} S_{13} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{12} S_{21} S_{23} + \sigma_{12} S_{21} \Delta S_{23} + (F_1^t - I_1^t) \cdot 2V = 0, \quad (26)$$

$$S_{21} \Delta S_{23} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{22} S_{23} S_{21} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{21} S_{12} S_{13} - I_2^t \cdot 2V = 0; \quad (27)$$

– скорости деформаций (23)

$$\xi_{11} = \frac{2\Delta v_1}{S_{21}}, \quad (28)$$

$$\xi_{22} = \frac{2\Delta v_2}{S_{32}}, \quad (29)$$

$$\xi_{33} = \frac{2v_2}{S_{23}} \cdot \frac{\Delta S_{23}}{S_{32}}; \quad (30)$$

– уравнение несжимаемости (22)

$$\frac{2\Delta v_1}{S_{21}} + \frac{2\Delta v_2}{S_{32}} + \frac{2v_2}{S_{23}} \cdot \frac{\Delta S_{23}}{S_{32}} = 0; \quad (31)$$

– формула (24) для нахождения скорости сдвиговой деформации в узле

$$\xi_{12}^0 = \frac{2\Delta \bar{v}_2}{S_1} + \frac{2\Delta \bar{v}_1}{S_2}. \quad (32)$$

### 3.2. Зависимые и независимые неизвестные. Переход к эквивалентной системе алгебраических уравнений

Разобьем все неизвестные на два множества: зависимых и независимых неизвестных. Определим последовательность вычислений для множества зависимых неизвестных. Для этого перейдем к системе линейных алгебраических уравнений относительно независимых неизвестных.

Пусть  $\Gamma_i|_{\alpha_i=0}$ ,  $\Gamma_i^*|_{\alpha_i=\alpha_i^*}$  ( $i=1, 2, 3$ ) — поверхности, ограничивающие рассматриваемую область;  $\Gamma_{iv}$ ,  $\Gamma_{iv}^*$  и  $\Gamma_{i\sigma}$ ,  $\Gamma_{i\sigma}^*$  — поверхности, где заданы скорости перемещений  $v_i$  и напряжения  $\sigma_{ii}$ . При этом

$$\Gamma_i = \Gamma_{iv} + \Gamma_{i\sigma}, \quad \Gamma_i^* = \Gamma_{iv}^* + \Gamma_{i\sigma}^*.$$

Выразим  $v_1^2$ , исходя из уравнения (31):

$$v_1^2 = v_1^1 - (v_2^2 - v_2^1) C_1 - (v_2^1 + v_2^2) C_1 \cdot C_2, \tag{33}$$

где  $C_1 = \frac{S_{21}}{S_{32}}$ ,  $C_2 = \frac{\Delta S_{23}}{S_{23}}$ . Если примем неизвестные  $v_2^r$  ( $r=1, 2$ ) независимыми, то получим, что (33) является рекуррентным соотношением, определяющим  $v_1$  по всем элементам исследуемой области от  $\alpha_1 = 0$  до  $\alpha_1 = \alpha_1^*$ .

На поверхностях  $\Gamma_{iv}^*$  реализуются новые уравнения:

$$F_1^f = (v_1^2)^f |_{\Gamma_{iv}^*} - (v_1^1)^f = 0 \quad (f=1, \dots, f_1), \tag{34}$$

где  $(v_1^*)^f$  — скорости перемещения  $v_1$ , заданные граничными условиями на поверхности  $\Gamma_{iv}^*$ , а  $f_1$  — число элементов, примыкающих к поверхности  $\Gamma_{iv}^*$ . Первую группу независимых переменных, число которых в точности соответствует числу уравнений (34), образуют напряжения  $\sigma_{11}|_{\Gamma_{iv}^*}$ .

Рассмотрим уравнения (26), (27) и с учетом уравнения (17) выразим из них  $\sigma_{11}^1$  и  $\sigma_{22}^1$ :

$$\sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^2 + \frac{\Delta\sigma_{12}S_{21}}{S_{12}} + 2\sigma_{12} \frac{S_{21} \cdot \Delta S_{23}}{S_{12} \cdot S_{13}} + \frac{4V(F_1 - I_1)}{S_{12} \cdot S_{13}}, \tag{35}$$

$$\sigma_{22}^1 = \sigma_{22}^2 + \Delta\sigma_{21} \frac{S_{12}}{S_{21}} + 4 \frac{\Delta S_{23}}{S_{23}} \lambda_t (C_{22}^t - C_{11}^t) + \frac{4V(F_2^t - I_2^t)}{S_{23} \cdot S_{21}} \quad (t = I, \dots, IV), \tag{36}$$

где значения  $C_{11}$  и  $C_{22}$  вычисляются по формулам (5), (17), (28)–(30). Данные рекуррентные соотношения будем удовлетворять от  $\alpha_i = \alpha_i^*$  до  $\alpha_i = 0$ .

На поверхностях  $\Gamma_{i\sigma}$  ( $i=1, 2$ ) будут иметь место уравнения:

$$F_2^f = (\sigma_{ii}^1)^f \Big|_{\Gamma_{i\sigma}} - (\sigma_{ii}^*)^f = 0 \quad (f = 1, \dots, f_2), \quad (37)$$

где  $\sigma_{ii}^*$  — нормальные напряжения  $\sigma_{ii}$ , заданные на поверхностях  $\Gamma_{i\sigma}$  как граничные условия, а  $f_2$  — количество элементов, примыкающих к поверхностям  $\Gamma_{i\sigma}$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда вторую группу независимых переменных составят скорости  $v_i|_{\Gamma_{i\sigma}}$  ( $i = 1, 2$ ), число которых совпадает с числом уравнений (37).

Рассмотрим уравнения (17) при  $i = j$  ( $j = 1, 2$ ). Исключив гидростатическое напряжение  $\sigma$ , получим следующие уравнения для каждого элемента:

$$F_3^f = (\sigma_{11})^f - (\sigma_{22})^f - 2\lambda_t \left( (C_{11})^f - (C_{22})^f \right) = 0, \quad f = 2, \dots, f_3, \quad (38)$$

где  $f_3$  — количество элементов в расчетной области. Последней, третьей группой независимых переменных, будут скорости  $v_2$  на внутренних гранях элементов, а также напряжения  $\sigma_{22}|_{\Gamma_{2v}^*}$  и скорости  $v_2|_{\Gamma_{2\sigma}^*}$  на границе расчетной области  $\Gamma_2^*$ . Суммарное количество независимых неизвестных в третьей группе равно числу уравнений (38).

Таким образом, имеем следующее множество независимых переменных:

$$X \left\{ \left[ \sigma_{11}|_{\Gamma_{1u}^*} \right], \left[ v_i|_{\Gamma_{i\sigma}}, i = 1, 2 \right], [v_2], \left[ v_2|_{\Gamma_{2\sigma}^*} \right], \left[ \sigma_{22}|_{\Gamma_{2u}^*} \right] \right\}.$$

Входящее сюда выражение для проекции инерционной силы запишем в виде:

$$I_i^t = \rho_t \left( \frac{(v_i)_m - (v_i)_{m-1}}{\Delta\tau_m} + \bar{\bar{v}}_1 \frac{(\Delta v_i)_1}{\Delta x_1} + \bar{\bar{v}}_2 \frac{(\Delta v_i)_2}{\Delta x_2} \right), \quad (39)$$

где  $(\Delta v_i)_q$  — изменения скорости  $v_i$  ( $v_i = v_i^{\text{II}} - v_i^{\text{I}}$ ) вдоль координаты  $\alpha_q$ ;  $\frac{\Delta v_i}{\Delta x_i} = \frac{v_i^2 - v_i^1}{\Delta x_i}$ ;  $\bar{\bar{v}}_i$  — средние по элементу скорости  $v_i$ , «замороженные» на  $k$ -й итерации,  $(\bar{\bar{v}}_i)_k = (v_i)_{k-1}$ ;  $(v_i)_m$ ,  $(v_i)_{m-1}$  — средние по элементу скорости перемещения на временных шагах  $\Delta\tau_m$ ,  $\Delta\tau_{m-1}$ .

Определим порядок вычисления зависимых переменных. В формуле (39) положим  $\bar{\bar{v}}_i = \text{const}$  ( $i = 1, 2$ ); тогда система уравнений (34), (37), (38) с учетом (5) будет линейной. Далее:

- 1 Производим идентификацию многокомпонентной области с параметром  $t$ .
2. Удовлетворяем рекуррентному соотношению (33).
3. Вычисляем во внутренних узлах значения  $\xi_{12}^0$  по формулам (32) и значения  $\varepsilon_{12}^0$  по формулам (5).
4. Вычисляем во внутренних узлах касательные напряжения  $\sigma_{12}^0 = 2\lambda_t (C_{12}^t)^0$  ( $t = \text{I}, \dots, \text{IV}$ ).

5. Обнуляем касательные напряжения  $\sigma_{12}^0$  и деформации  $\varepsilon_{12}^0$  во внутренних узлах, лежащих на поверхностях контакта различных областей:  $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{16}, S_{17}, S_{18}, S_{20}, S_{21}, S_{22}$  (Рис. 2).

6. В соответствии с формулой (20) находим напряжения  $\sigma_{21}^0$  в узлах сетки на поверхности  $S_{19}$ .

7. Вычисляем напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2; i \neq j$ ) на каждой внутренней грани как средние арифметические от  $\sigma_{12}^0$  в узлах этой грани.

8. Удовлетворяем рекуррентным соотношениям (35), (36).

Таким образом, система дискретных уравнений, получающаяся непосредственной аппроксимацией исходных дифференциальных уравнений в частных производных конечными разностями, преобразуется в эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений (34), (37), (38). Число входящих в эквивалентную систему уравнений на порядок меньше, чем в исходной.

Коэффициенты и свободные члены эквивалентной системы (34), (37), (38) можно найти, проделав следующие действия.

Пусть эквивалентная система уравнений имеет вид:

$$\bar{F}_i = a_{ij}x_j + b_i = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (40)$$

Если положить все неизвестные равными нулю  $x_i = 0, i = 1, \dots, n$ , то, действуя в соответствии с порядком вычисления зависимых переменных (см. пункты 1–8) и вычислив  $\bar{F}_r^i$  ( $r = 1, 2, 3$ ) в (34), (37), (38), найдем свободные члены новой системы (40):  $\bar{F}_i^0 = b_i, i = 1, \dots, n$ . Для определения коэффициентов  $a_{ij}$  в (40) положим  $x_k = 1, x_i = 0$  ( $i \neq k, i = 1, \dots, n$ ). Опять, пробегаая выше указанную последовательность, находим  $\bar{F}_i^k$  и  $a_{ik}$  по формуле:  $a_{ik} = \frac{\bar{F}_i^k - \bar{F}_i^0}{1}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ).

Таким образом определяется вся матрица  $a_{ij}$  новой эквивалентной системы.

### 3.3. Алгоритм вычисления НДС

1. Весь процесс разрушения (время деформирования  $\tau$ ) разбиваем на  $m$  шагов.
2. Задаем начальные условия при  $\tau = 0$ , матрицу  $\lambda_t$  ( $t = I, \dots, IV$ ),  $(v_i)_{m=0} = 0$ ,  $(\varepsilon_{ij})_m|_{m=0} = 0$ .
3. Задаем шаг по времени  $\tau = \Delta\tau$ .
4. Исследуемую область разбиваем на элементы ортогональной формы. Рассчитываем матрицу длин дуг элементов.
5. В соответствии с формулами (14)–(19) задаем граничные условия для скоростей перемещений и нормальных напряжений на внешних гранях, а также на гранях принадлежащих поверхностям  $S_i$  ( $i = 4, 5, 20, 21$ )
6. Вычисляем матрицу коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы в соответствии с представляемой численной процедурой решения.
7. Решаем систему линейных уравнений по стандартной программе; в результате решения получаем значения независимых переменных.
8. В каждом элементе и на внутренних гранях определяем зависимые переменные  $\sigma_{ij}, v_i, (\xi_{ij})_m, (\varepsilon_{ij})_m$ .

9. Уточняем значения  $(\bar{v}_i)_k = (v_i)_{k-1}$ .

10. Производим сравнение  $(\bar{v}_i)_k$  и  $(\bar{v}_i)_{k-1}$ , где  $k$  — номер итерации. Если заданная точность соответствия  $(\bar{v}_i)_k$  и  $(\bar{v}_i)_{k-1}$  удовлетворяется, то переходим к пункту 11, в противном случае — к пункту 6.

11. Рассчитываем новые параметры зазора  $H_4$ , изменившегося вследствие расхождения стаканов. Корректируем ортогональную сетку.

12. Находим новые параметры давления в областях  $t = V$ ,  $t = VI$  исходя из принятого закона  $pV = \text{const}$ , где  $p$ ,  $V$  — соответственно, давление и объем газа в областях  $V$ ,  $VI$ .

13. Делаем шаг по времени  $\Delta\tau_m$ .

14. Если  $\tau < \sum_m \Delta\tau_m$ , то переходим к пункту 5, в противном случае — к пункту 15.

15. Окончание расчета.

#### 4. Результаты численных экспериментов

Расчеты проводились при следующих начальных значениях геометрических параметров устройства (в метрах) (Рис. 2):  $H_1 = 2$ ,  $H_2 = 0,1$ ,  $H_3 = 1$ ,  $H_4 = 0,03$ ,  $H_5 = 0,1$ ,  $H_6 = 1$ ,  $H_7 = 1$ ,  $H_8 = 0,07$ ,  $H_{10} = 0,4$ ,  $R_1 = 3$ ,  $R_2 = 3,1$ ,  $R_3 = 3,2$ ,  $R_4 = 4,2$ ,  $R_5 = 40$ ,  $H_9 = 0,03$ . Физико-механические характеристики были следующими: давления, действующие на ледяную пластину (МПа):  $p_1 = 0,1$ ;  $p_2 = 0,15$ ; в качестве газовой смеси выступал природный газ (9,9% метана), имеющий скорость  $V_s \cong 0,67$  м/с и давление в результате горения в замкнутом объеме  $p_{\text{кон}} \approx 0,7$  МПа [4], начальные давления в газовых областях  $p_3|_{\tau=0,01} = 0,4$  МПа,  $p_4|_{\tau=0,01} = 0,8$  МПа,  $p_5|_{\tau=0,01}$ .

Известно, что результаты экспериментов по определению физико-механических параметров льда, как правило, значительно отличаются друг от друга, что объясняется наличием большего числа факторов, влияющих на структуру и свойства льда [10, 11], поэтому в расчетах обычно используются некоторые их осредненные значения. По данным [10] модуль сдвига и удельный вес льда составляют  $G_1 = 29,2 \cdot 10^2$  МПа и  $\gamma_1 = 9200$  Н/м<sup>3</sup>.

Принималось, что цилиндры (стаканы) изготовлены из стали, которая имеет модуль сдвига  $G_2 = G_3 = 8 \cdot 10^4$  МПа, удельный вес  $\gamma_2 = \gamma_3 = 78000$  Н/м<sup>3</sup> (по данным работы [12]). Коэффициент вязкости воды при 0°C соответствовал данным [13]:  $\mu = 0,01789$  г·сек/см. Удельный вес воды равен  $\gamma_4 = 10000$  Н/м<sup>3</sup>. Задача решалась для шагов по времени  $\tau = 0,01$ ;  $0,02$ ;  $0,04$  с. В качестве критерия разрушения льда использовался критерий максимального значения растягивающих и сжимающих напряжений, которые для льда равны соответственно  $\sigma_p = 1,5$  МПа и  $\sigma_c = -2,5$  МПа [10].

Результаты расчетов приведены на рисунках 6–8 в виде эпюр скоростей перемещений  $v_1$ , напряжений  $\sigma_{22}$  на временном шаге  $\tau = 0,02$  с, а также перемещений  $u_1$  на временном шаге  $\tau = 0,03$  с.

В ходе процесса разрушения (Рис. 6) скорость движения верхнего цилиндра монотонно возрастает и на временном шаге  $\tau = 0,02$  с составляет 0,7 м/с в центральной области ( $R \approx 0$ ) и 0,5 м/с — в периферийной ( $R \approx R_4$ ); за пределами конструкции устройства ( $R > R_4$ ) вертикальная скорость ледяной пластины стремится к нулю. В результате такого распределения скоростей в центральной части ледяной пластины

( $R < R_4$ ) верхние слои растягиваются, нижние — сжимаются, а максимум напряжений достигается на оси симметрии (Рис. 7). В периферийной области ( $R > R_4$ ) напряжения меняют знак и быстро убывают по абсолютной величине. Видно (Рис. 7), что на временном шаге  $\tau = 0,02$  с напряжения в области ледяного покрова  $R < R_3$  превосходят

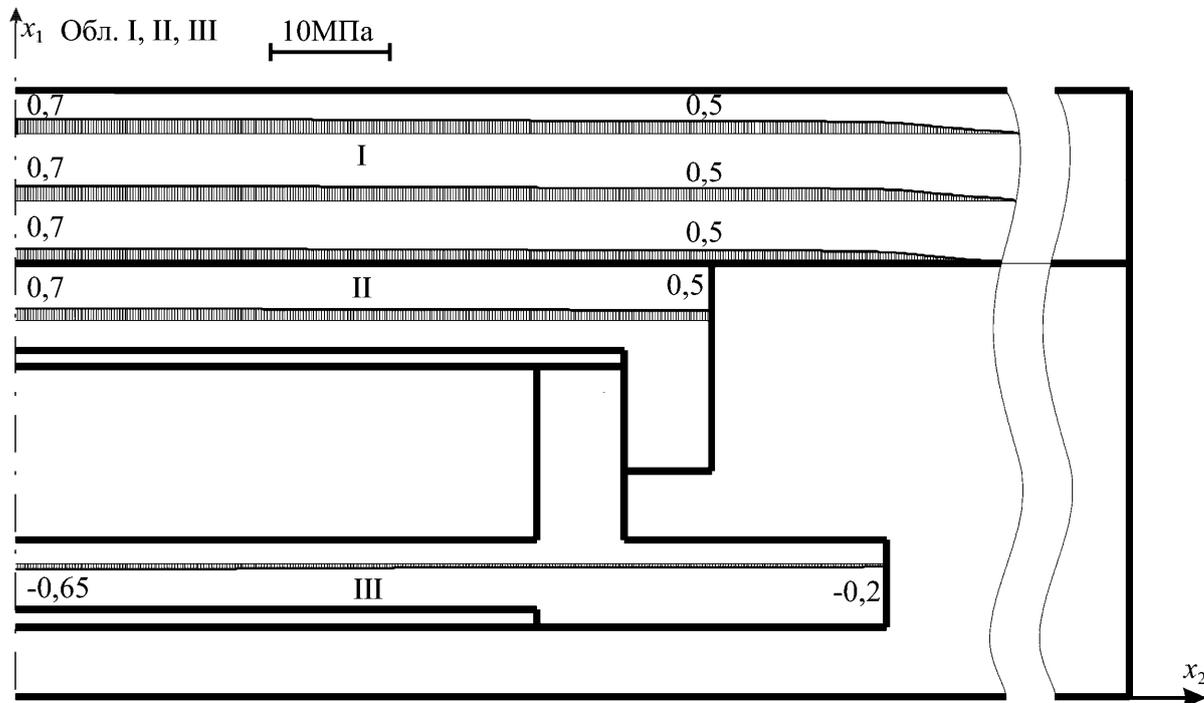


Рис. 6. Эпюры скоростей перемещений  $v_1$  (м/с) для  $\tau = 0,02$  с

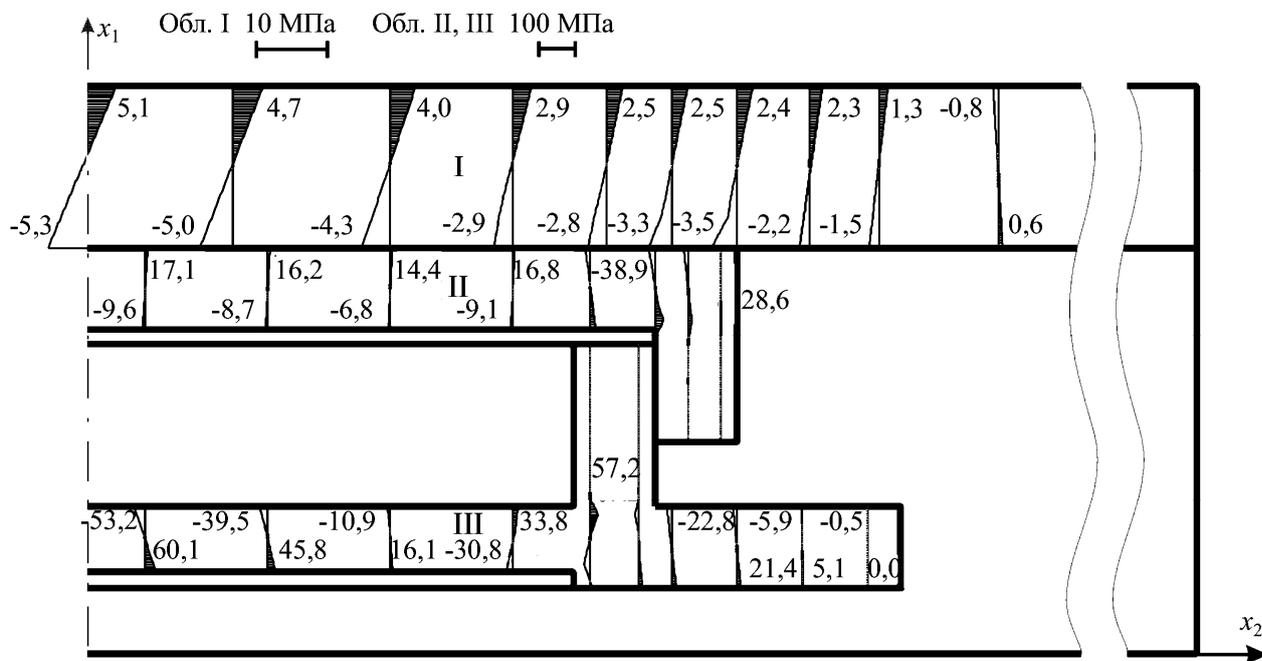


Рис. 7. Эпюры напряжений  $\sigma_{22}$  (МПа) для  $\tau = 0,02$  с

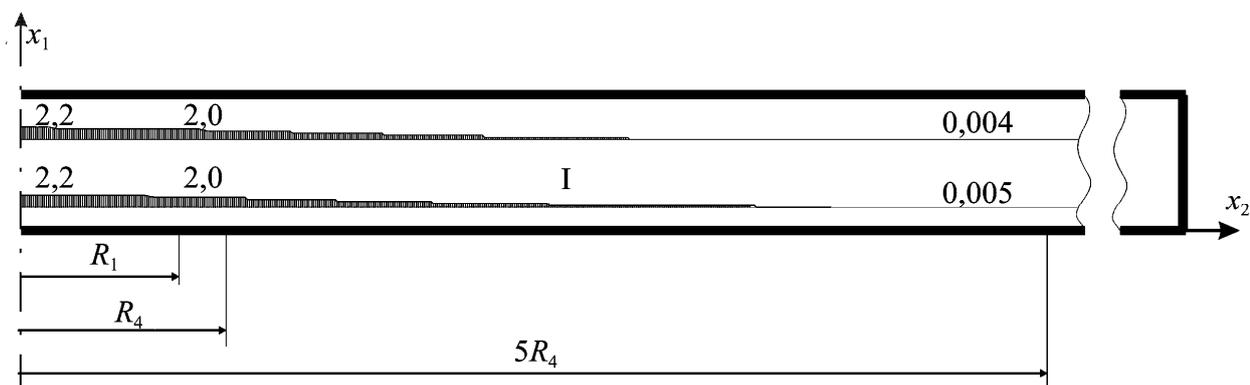


Рис. 8. Эпюры перемещений (см)  $u_1$  ледяной пластины для  $\tau = 0,03$  с

соответствующие предельные значения  $\sigma_p$  и  $\sigma_c$ , следовательно, исходя из принятого критерия, происходит разрушение ледяного покрова. Радиус разрушения в данном случае примерно равен радиусу  $R_3$ . Напряжения  $\sigma_{33}$  практически совпадают с напряжениями  $\sigma_{22}$ , поэтому можно предположить, что разрушение будет происходить не только в тангенциальном, но и в радиальном направлении.

Напряжения в цилиндрах далеки от предела текучести стали  $\sigma_m$ , который, по данным [12], составляет 300 МПа. Увеличение радиуса расчетной области  $R_5$ , как и ожидалось, не сказывается на характере разрушения ледяного покрова, поскольку уже на расстоянии  $5R_4$  перемещения ледяной пластины практически равны нулю (Рис. 8).

## 5. Заключение

Построены численная процедура и на ее основе алгоритм определения полей напряжений и скоростей перемещений в многокомпонентной системе, включающей лёд, устройство для разрушения ледяного покрова и воду. Система находится под действием динамической нагрузки — давления продуктов взрыва газозвушной смеси. Результаты численных экспериментов показали, что при использовании рассматриваемого устройства происходит разрушение ледяного покрова в радиусе  $\approx R_3$ , а конструкция устройства испытывает значительные напряжения, не выходящие, однако, за рамки предела текучести стали  $\sigma_m$ . Полученные результаты могут использоваться при выборе способов технической реализации разрушения ледяного покрова и соответствующих устройств [1]. Построенная численная процедура и алгоритм также могут применяться для определения оптимальных параметров устройства при конструировании опытного образца.

Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (проект № 09-П-УО-03-002).

## Литература

1. Устройство для ликвидации заторообразования: патент РФ №2397911 Российская Федерация / Одинок В.И., Прокудин А.Н. – 2008145808/11; заявл. 19.11.2008; опубл. 27.08.2010, Бюл. № 24. – 5 с.
2. Одинок В.И., Прокудин А.Н. Моделирование процесса разрушения ледяных заторов // Прикл. механика и техн. физика. – 2010. – Т. 51, № 1. – С. 110-116.

3. Способ ликвидации заторообразований: патент РФ №2356777 Российская Федерация / Одинокоев В.И., Сергеева А.М. – 2008109786/11; заявл. 13.03.2008; опубл. 27.09.2009, Бюл. №15 – 3 с.
4. *Равич М.Б.* Беспламенное поверхностное горение. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – 372 с
5. *Одинокоев В.И., Прокудин А.Н.* Численный анализ процесса разрушения ледяного покрова в условиях динамического воздействия // Безопасность критических инфраструктур и территорий. – 2010. – Т. 2, № 1. – С. 84-93.
6. *Odinokov V.I., Prokudin A.N.* Computational investigation of new ice breaking method // Proc. of twentieth Int. offshore and polar engineering conference, June 20-25, Beijing, China. – Int. Society of Offshore and Polar Engineers, Cupertino, California, USA, 2010. – V. 1. – P. 1148-1154.
7. *Одинокоев В.И., Каплунов Б.Г., Песков А.В., Баков А.А.* Математическое моделирование сложных технологических процессов. – М.: Наука, 2008. – 176 с.
8. *Сергеева А.М., Одинокоев В.И., Марченко О.В.* Определение напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при движении под ним ледокольной приставки // Матем. моделирование. – 2009. – Т. 21. № 10. – С. 47-57.
9. *Одинокоев В.И.* О конечно-разностном представлении дифференциальных соотношений теории пластичности // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 97-102.
10. *Богородский В.В., Гаврило В.П.* Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 384 с.
11. *Ионов Б.П., Грамузов Е.М.* Ледовая ходкость судов. – СПб.: Судостроение, 2001. – 510 с.
12. *Кроха В.А.* Упрочнение металлов при холодной пластической деформации. Справочник. – М.: Машиностроение, 1980. – 157 с.
13. *Кикоин И.К.* Таблицы физических величин. Справочник. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.

*Поступила в редакцию 01.06.10*

---

*Сведения об авторах*

*Одинокоев Валерий Иванович*, д-р, проф., директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН (ИМиМ ДВО РАН), 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, д. 1; E-mail: mail@imim.ru  
*Прокудин Александр Николаевич*, асп., ИМиМ ДВО РАН; E-mail: sunbeam\_85@mail.ru