

УДК 519.63 +532.5+539.3

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

В.Ф. Куропатенко, Ю.Н. Андреев

*Российский Федеральный Ядерный Центр – ВНИИ Технической Физики им. акад. Е.И. Забабахина,  
Снежинск, Челябинская обл., Россия*

Различия между результатами математического моделирования динамических процессов в сплошных средах и результатами физических экспериментов определяется тремя видами погрешности: погрешностью физической модели ( $\Delta_\Phi$ ), погрешностью математической модели ( $\Delta_M$ ) и погрешностью методов измерений ( $\Delta_M$ ). В статье на примере среды в сферически симметричной оболочке сравниваются  $\Delta_\Phi$  и  $\Delta_M$ . Показано, что в некотором диапазоне скоростей диссипация энергии, определяемая погрешностью конечно-разностной аппроксимации, может превосходить диссипацию энергии, порождаемую моделью идеальной пластичности.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, разностная схема, производство энтропии, вязкость Неймана–Рихтмайера, метод Куропатенко, сходящиеся и расходящиеся оболочки, идеальная пластичность

## SIMULATION OF DYNAMIC PROCESSES IN SPHERICAL AND CYLINDRICAL SHELLS

V.F. Kuropatenko and Yu.N. Andreyev

*Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Institute of Applied Physics,  
Snezhinsk, Chelyabinsk Region, Russia*

Differences between the results obtained in the numerical simulation of dynamic processes that occur in continua and the results obtained in physical experiments come from an error of three types: an error in the physical model ( $\Delta_{ph}$ ), an error in the mathematical model ( $\Delta_M$ ), and a measurement error ( $\Delta_m$ ). The paper focuses on the comparison of  $\Delta_M$  and  $\Delta_{ph}$  considering a medium placed in a spherically symmetric shell as an example. It is shown that within a certain velocity range the energy dissipation defined by an error in a finite-difference approximation may exceed the energy dissipation generated by a perfect plasticity model.

*Key words:* mathematical modeling, difference scheme, entropy generation, von Neumann–Richtmyer viscosity, Kuropatenko method, converging and diverging shells, perfect plasticity

### 1. Введение

Рост быстродействия и памяти ЭВМ привел к тому, что математическое моделирование стало основным способом исследования поведения различных конструкций под действием динамических нагрузок. Подавляющее большинство прикладных специалистов связывают надежды на повышение точности математического моделирования с увеличением числа точек сетки при аппроксимации непрерывных функций дискретными. Как правило, эти надежды основаны на том, что для математического моделирования поведения реальных физических систем применяются устойчивые разностные методы, в которых погрешности аппроксимации дифференциальных законов сохранения разностными стремятся к нулю при стремлении к нулю шагов сетки по пространственным переменным и по времени. Однако не все так

просто с численными методами. В [1–4] показано, что в то время когда адиабатическое ядро законов сохранения порождает следствие — сохранение энтропии вдоль траектории частиц, «адиабатическое ядро» разностных законов сохранения порождает изменение энтропии. Следствием этого является различие между точным решением задачи и численным решением при конечных шагах сетки.

Другим источником погрешности результатов математического моделирования служит погрешность физической модели  $\Delta_\phi$ . Она складывается из погрешностей: уравнения состояния; зависимости между компонентами девиатора тензора напряжений и девиатора тензора деформаций; способа моделирования метастабильных состояний (области отрицательных давлений, упругих сдвигов, полиморфных переходов, плавления и испарения). Различие между погрешностями двух физических моделей  $|\Delta_{\phi_1} - \Delta_{\phi_2}|$  может быть надежно определено с помощью расчетов лишь в том случае, когда погрешность алгоритма  $\Delta_M$  много меньше этого различия  $|\Delta_M| \ll |\Delta_{\phi_1} - \Delta_{\phi_2}|$ .

В случае идеальной среды и гладких течений погрешность математического моделирования неустановившихся течений сплошной среды удобно исследовать на примере энтропии, которая в такой физической модели остается постоянной вдоль траектории движения каждой частицы. Поэтому отличие ее расчетных значений от начального значения может быть использовано для анализа индивидуальных достоинств и недостатков конкретного численного метода. Но при другой физической модели в частности в реальных пластических течениях, которые, как известно, необратимы, энтропия изменяется. Таким образом, использование энтропии в качестве критерия точности позволяет разделить вклады, вносимые в погрешность математического эксперимента разностным методом и физической моделью.

Исследования нескольких моделей пластического течения, проведенные в 1973 году [5], показали, что характерные для них величины диссипации энергии различаются слабо. Однако с тех пор положение в математическом моделировании сплошных сред существенно изменилось. Появились новые численные методы и новые модели упругопластического деформирования, а значит, изменилось соотношение между  $\Delta_M$  и  $\Delta_\phi$ .

Рассмотрим частную задачу определения точности численного моделирования динамических процессов в оболочках несколькими разностными методами с применением разных моделей пластичности.

## 2. Основные уравнения

Физические процессы в сферически или цилиндрически симметричных оболочках описываются системой законов сохранения массы, количества движения и энергии. Из этих законов с помощью формальных преобразований получается ряд следствий. Вместе с исходными уравнениями они образуют переопределенную систему, в которой независимыми являются только три уравнения. Наиболее часто в качестве независимых выбираются уравнения неразрывности, движения и внутренней энергии:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} - \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{(\alpha-1)U}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{V} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial(P-S_1)}{\partial r} - \frac{(\alpha-1)(S_1-S_2)}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{V} \frac{dE}{dt} + \frac{P}{V} \frac{dV}{dt} = S_1 \frac{\partial U}{\partial r} + S_2 \frac{U(\alpha-1)}{r}. \quad (3)$$

Здесь  $U$  — радиальная скорость,  $V$  — удельный объем,  $E$  — удельная внутренняя энергия,  $r$  — расстояние от центра (оси) симметрии,  $\alpha$  — показатель симметрии ( $\alpha$  имеет, соответственно, значение 1, 2 или 3 в случае плоской, цилиндрической или сферической симметрии). В уравнении движения (2) и уравнении внутренней энергии (3) главные напряжения  $\sigma_i$ , представляются в виде разности девиатора  $S_i$  тензора напряжений и давления  $P$  (шаровой части тензора напряжений):  $\sigma_i = -P + S_i$ ,  $S_1 + S_2 + S_3 = 0$ . Вводя наибольшие касательные напряжения  $\tau_1 = 0,5(S_2 - S_3)$ ,  $\tau_2 = 0,5(S_3 - S_1)$ ,  $\tau_3 = 0,5(S_1 - S_2)$  и соответствующие деформации сдвига  $\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ ,  $\gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$ ,  $\gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ , запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} - \frac{2}{3} V \sum_{i=1}^3 \tau_i \frac{d\gamma_i}{dt} = 0. \quad (4)$$

Удельную внутреннюю энергию  $E$  представим в виде суммы

$$E = E_T + E_X + E_Y,$$

где  $E_X$  — холодная энергия, равная сумме энергии потенциального взаимодействия атомов и энергии их нулевых колебаний,  $E_T$  — тепловая энергия,  $E_Y$  — энергия упругих сдвигов. Деформации сдвига также представим в виде суммы упругих  $\gamma_i^e$  и пластических  $\gamma_i^p$  деформаций:

$$\gamma_i = \gamma_i^e + \gamma_i^p.$$

Поскольку  $P = P_T + P_X$ , то согласно с работой [6] запишем уравнение (4) в виде уравнений для тепловой, холодной и упругой энергий:

$$\frac{dE_T}{dt} + P_T \frac{dV}{dt} - \frac{2}{3} V \sum_{i=1}^3 \tau_i \frac{d\gamma_i^p}{dt} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dE_X}{dt} + P_X \frac{dV}{dt} = 0,$$

$$\frac{dE_Y}{dt} - \frac{2}{3} V \sum_{i=1}^3 \tau_i \frac{d\gamma_i^e}{dt} = 0. \quad (6)$$

Из (6) следует выражение для касательных напряжений в области упругих деформаций

$$\tau_i = \frac{3}{2V} \frac{\partial E_Y}{\partial \gamma_i^e}.$$

Из сравнения уравнения (5) со следствием основного уравнения термодинамики

$$\frac{dE_T}{dt} + P_T \frac{dV}{dt} - T \frac{dS}{dt} = 0$$

видно, что изменение энтропии определяется работой касательных напряжений на пластических деформациях сдвига

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{2}{3} V \sum_{i=1}^3 \tau_i \frac{d\gamma_i^p}{dt}. \quad (7)$$

Уравнение (7) означает, что в случае, когда компоненты девиатора тензора напряжений равны нулю ( $\tau_i = 0$ ), уравнение для внутренней энергии имеет вид

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = 0$$

и энтропия сохраняется вдоль траектории частицы

$$\frac{dS}{dt} = 0.$$

### 3. Численные методы

В работе [1] показано, что при замене трёх исходных независимых дифференциальных уравнений разностными погрешности аппроксимации  $\omega$  определяют производство энтропии:

$$T \frac{dS_M}{dt} = \omega.$$

Одним из важных требований, предъявляемых к разностной схеме, является требование, чтобы энтропия  $S_M$  была меньше физической энтропии  $S_\phi$ , определяемой конкретными физическими процессами. С этой точки зрения и рассмотрим, следуя [1–3], производство энтропии в разностной схеме адиабатического ядра [4] системы уравнений механики сплошной среды (1)–(3):

$$\frac{dV}{dt} - r^{\alpha-1} \frac{\partial U}{\partial m} - \frac{(\alpha-1)UV}{r} = \omega_1, \quad (8)$$

$$\frac{dU}{dt} + r^{\alpha-1} \frac{\partial P}{\partial m} = \omega_2,$$

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = \omega_7,$$

где  $m$  — лагранжева массовая переменная ( $dm = \rho r^{\alpha-1} dr$ ,  $\rho$  — плотность среды внутри оболочки). Номера у погрешностей аппроксимации  $\omega_k$  взяты в соответствии с [3]. В [2] показано, что для предложенного в [7] разностного уравнения внутренней энергии

$$E^{n+1} - E^n + \frac{1}{2}(P^{n+1} + P^n)(V^{n+1} - V^n) = 0 \quad (9)$$

уравнение производства энтропии имеет вид

$$T \frac{dS_M}{dt} = -\frac{\tau^2}{12} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S \left( \frac{dV}{dt} \right)^3 + O(\tau^3). \quad (10)$$

Поскольку все величины в выражении (9) относятся к одному сеточному интервалу с номером  $i - (1/2)$ , то для простоты здесь и далее нижний индекс будем опускать, оставляя верхний индекс  $n$ , отвечающий временному шагу.

Подставив производную  $dV/dt$  из (8) в (10), запишем уравнение производства энтропии следующим образом:

$$T \frac{dS_M}{dt} = -\frac{\tau^2}{12} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S \left( r^{\alpha-1} \frac{\partial U}{\partial m} + \frac{(\alpha-1)UV}{r} \right)^3 + O(\tau^3).$$

В сходящейся оболочке (внутренний радиус  $r \rightarrow 0$ ) радиальная скорость течения  $U \rightarrow -\infty$  и, таким образом, в некоторой массе вещества, примыкающего к внутренней границе, энтропия может возрасть. В расходящейся оболочке  $r$  возрастает,  $U > 0$ , и при  $\frac{\partial U}{\partial m} > 0$  энтропия, определяемая погрешностями аппроксимации дифференциальных уравнений разностными, со временем убывает.

В методе Неймана–Рихтмайера [7], который широко применяется в вычислительной механике сплошных сред, разностное уравнение для внутренней энергии в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{dE}{dt} + (P + q) \frac{dV}{dt} = \omega_7. \quad (11)$$

Величина  $q$  является псевдовязкостью. Она выбирается из различных соображений, но всегда так, чтобы для непрерывных течений выполнялось условие:  $q = 0$ . Авторы этого метода в разное время рекомендовали три формы записи псевдовязкости [7–9]:

$$q_1 = \begin{cases} \frac{kh^2}{\rho} \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 & \text{при } \frac{\partial U}{\partial r} < 0, \\ 0 & \text{при } \frac{\partial U}{\partial r} \geq 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$q_2 = \begin{cases} \frac{kh^2}{V} \left( \frac{dV}{dt} \right)^2 & \text{при } \frac{dV}{dt} < 0, \\ 0 & \text{при } \frac{dV}{dt} \geq 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$q_3 = \begin{cases} \frac{k(h_0)^2}{V} \left( \frac{dV}{dt} \right)^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2(\alpha-1)} & \text{при } \frac{dV}{dt} < 0, \\ 0 & \text{при } \frac{dV}{dt} \geq 0, \end{cases} \quad (14)$$

где  $h = \rho \Delta r$  — «плоская» масса сеточного интервала в момент времени  $t$ ;  $k$  — безразмерная эмпирическая постоянная; величины с индексом «0» отнесены к начальному моменту времени.

Разностный аналог уравнения (11) в соответствии с [7] записывается в следующем виде:

$$E^{n+1} - E^n + \frac{1}{2}(P^{n+1} + P^n + 2q^{n+1})(V^{n+1} - V^n) = 0. \quad (15)$$

Это уравнение вместе с произвольным уравнением состояния  $P = P(V, E)$  образует нелинейную систему двух уравнений, решение которой при заданном  $V^{n+1}$  находится посредством итераций.

Кроме метода Неймана–Рихтмайера для получения численного решения использовался также метод Куропатенко [10, 11], в котором уравнение для внутренней энергии в случае непрерывного решения записывается в виде

$$E^{n+1} - E^n + \int_{V^n}^{V^{n+1}} P(V, E) dV = 0 \quad (16)$$

и в последующем интеграл заменяется суммой, от числа слагаемых в которой и зависит точность определения энтропии.

В [10, 11] для разделения разрывных и непрерывных решений используется знак разностной производной скорости среды  $\frac{\Delta U}{\Delta r}$ , где  $\Delta U = U(r + \Delta r) - U(r)$ . Если  $\frac{\Delta U}{\Delta r} \geq 0$ ,

то считается, что решение непрерывно. Если же  $\frac{\Delta U}{\Delta r} < 0$ , то предполагается, что

в сеточном интервале на одном шаге по времени распространяется ударная волна, обеспечивающая диссипацию энергии. Критерий, основанный на анализе знака отношения  $\frac{\Delta U}{\Delta r}$ , не точен, так как при его использовании решения, в которых энтропия

должна сохраняться без изменения, могут попадать в разряд диссипативных решений. Это можно показать на примере уравнения (1), если записать его в виде

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} - \frac{(\alpha - 1)U}{r}.$$

Условие  $\frac{\partial U}{\partial r} < 0$  допускает такие решения, которые при  $U > 0$  удовлетворяют условию

$$0 < \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} < \frac{(\alpha - 1)U}{r}.$$

Это означает, что хотя траектории любых двух точек внутри оболочки и сближаются ( $\frac{\partial U}{\partial r} < 0$ ), плотность течения уменьшается. Включение в таких ситуациях сеточного диссипативного механизма является источником искусственных погрешностей.

Для предотвращения влияния этого источника диссипации энергии процесс определения термодинамических величин в случае  $\frac{\partial U}{\partial r} < 0$  разделяется на два этапа.

На первом этапе, исходя из уравнения

$$\frac{dV}{dt} = \frac{(\alpha - 1)UV}{r}$$

рассчитывается удельный объем  $V^*$ . Независимо от знака  $U$  значение  $V^*$  находится с помощью уравнения

$$V^* = V^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{(\alpha - 1)UV}{r} dt.$$

На втором этапе для полученного значения  $V^*$  по уравнению изэнтропы (16) и уравнению состояния  $P = P(V, E)$  находятся термодинамические величины  $P^*, E^*$  [11].

Поскольку  $\frac{\partial U}{\partial r} < 0$ , то вещество с параметрами  $P^*, V^*, E^*$  испытывает ударное нагружение в соответствии с «сеточной» ударной адиабатой. В итоге находятся окончательные значения  $P^{n+1}, E^{n+1}$ , отвечающие значению  $V^{n+1}$ . Использование «сеточной» ударной адиабаты обеспечивает необходимую диссипацию энергии.

Описанный выше алгоритм двухэтапного расчёта термодинамических величин в сеточном интервале реализован в программном продукте ВОЛНА [12].

#### 4. Постановка расчетов

Для описания свойств шаровой части тензора напряжений используется простейшее уравнение состояния конденсированного вещества

$$P = (\gamma - 1)\rho E + C_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k}), \quad (17)$$

где  $\gamma$  — безразмерная постоянная величина;  $\rho_{0k}$  и  $C_{0k}$  — теоретические значения кристаллической плотности и соответствующей скорости звука (в точке  $P = 0, T = 0, E = 0$ ). Переход к безразмерным переменным  $\frac{\rho}{\rho_{0k}} \rightarrow \rho, \frac{P}{\rho_{0k} C_{0k}^2} \rightarrow P,$

$\frac{E}{C_{0k}^2} \rightarrow E, \frac{U}{C_{0k}} \rightarrow U$  в уравнении (17) приводит его к виду

$$P = (\gamma - 1)\rho E + \rho - 1. \quad (18)$$

Принимается еще одно упрощение, а именно, полагается  $\gamma = 3$ , что близко к значению  $\gamma$  для большого числа реальных сред.

Давление  $P$  и удельная внутренняя энергия  $E$  представляются в виде сумм,  $P = P_X(\rho) + P_T(\rho, S), E = E_X(\rho) + E_T(\rho, S)$ , где холодные и тепловые составляющие  $P$  и  $E$  имеют вид

$$P_X = \frac{1}{3}(\rho^3 - 1), \quad P_T = \frac{1}{3}f(S)\rho^3, \quad (19)$$

$$E_X = \frac{1}{6}\rho^2 + \frac{1}{3\rho} - \frac{1}{2}, \quad E_T = \frac{1}{6}f(S)\rho^2. \quad (20)$$

Значение энтропийной функции  $f(S)$ , характеризующее отклонение от изоэнтропического течения, рассчитывается по формуле

$$f(S) = \frac{3(2E\rho + \rho - 1) + 1}{\rho^3} - 1. \quad (21)$$

В методе Неймана–Рихтмайера уравнение (15) дополняется уравнением состояния (18) в виде

$$P^{n+1} = 2\rho^{n+1}E^{n+1} + \rho^{n+1} - 1 \quad (22)$$

и из соотношений (15) и (22) исключается  $P^{n+1}$ . В результате получается зависимость  $E^{n+1}$  от  $E^n$ ,  $\rho^n$  и  $\rho^{n+1}$ :

$$E^{n+1} = aE^n + b + c,$$

где

$$a = \frac{\rho^n (4\rho^{n+1} - 2\rho^n)}{\rho^{n+1} (4\rho^n - 2\rho^{n+1})},$$

$$b = \frac{(\rho^{n+1} - \rho^n)(\rho^{n+1} + \rho^n - 2)}{\rho^{n+1} (4\rho^n - 2\rho^{n+1})},$$

$$c = \frac{q}{\rho^{n+1}} \frac{(\rho^{n+1} - \rho^n)}{(4\rho^n - 2\rho^{n+1})}.$$

После определения  $E^{n+1}$  давление  $P^{n+1}$  рассчитывается по уравнению состояния (22), а энтропийная функция — по формуле (21), в которой все величины берутся в момент  $t^{n+1}$ :

$$f(S^{n+1}) = \frac{3(2E^{n+1}\rho^{n+1} + \rho^{n+1} - 1) + 1}{(\rho^{n+1})^3} - 1.$$

Таким образом, в методе Неймана–Рихтмайера энтропия изменяется при изменении плотности  $\rho$  даже в случае, когда  $q = 0$ . Этот теоретический результат далее подтверждается практически с помощью расчетов сходящейся сферически симметричной оболочки с безразмерным уравнением состояния (18).

При  $t = 0$  безразмерные характеристики задачи таковы: радиус внутренней границы оболочки (ВГО)  $r_{ВГО} = 1$ , радиус наружной границы оболочки (НГО)  $r_{НГО} = 1,1$ ;



$\rho$ ,  $P$ ,  $E$  постоянны и равны:  $\rho = 1$ ,  $P = 0$ ,  $E = 0$ . Скорость среды в оболочке задана так, чтобы при  $t = 0$  выполнялось условие  $\frac{dV}{dt} = 0$ . В таком случае из (1) следует:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_t + \frac{(\alpha - 1)U}{r} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к следующему выражению для  $U(r)$  при  $t = 0$ :

$$U = U_{BГО} \left(\frac{r_{BГО}}{r}\right)^2. \quad (23)$$

При  $t \geq 0$  на внутренней и наружной границах оболочки задается условие  $P = 0$  (иными словами, рассматривается инерционное движение оболочки). Расчеты выполнены для трех оболочек, различающихся безразмерной начальной скоростью ( $U_{BГО} = -0,1; -1; -5$ ).

Следует заметить, что в оболочках, разгоняемых продуктами взрыва, скорость течения близка к звуковой:  $U_{BГО} \approx -1$ . При воздействии на оболочки излучения (например, лазерного) скорость существенно сверхзвуковая  $U_{BГО} = -7 \div -15$ . Такое разделение оболочек на «тихоходные» и «быстроходные», или «дозвуковые», «звуковые» и «сверхзвуковые», является условным, так как при схождении оболочек  $U_{BГО}(t) \rightarrow -\infty$  при  $r_{BГО}(t) \rightarrow 0$  и, таким образом, любая оболочка рано или поздно становится сверхзвуковой (по крайней мере, в окрестности ВГО). В процессе движения сходящейся оболочки с заданным начальным профилем скорости (23) профиль скорости в каждый фиксированный момент времени  $t^*$  —  $U(r, t^*)$ , является монотонным и удовлетворяет условию  $\frac{\partial U}{\partial r} > 0$ . В то же время профиль давления имеет немонотонный

характер. Максимальное давление достигается внутри оболочки в точке  $r_{\max}$ , и при уменьшении  $r_{BГО}$  расстояние  $r_{\max} - r_{BГО}$  сокращается, обращаясь в нуль при  $r_{BГО} = 0$ .

Далее приводятся результаты расчетов, выполненных по методу Неймана–Рихтмайера с использованием трех форм псевдовязкости (12)–(14) и по методу Куропатенко [10] с учетом введенных выше изменений. Далее этот метод будет называться методом «ВОЛНА», поскольку для расчетов использовался программный комплекс [12] с одноименным названием.

## 5. Результаты расчетов

В первой серии расчетов рассматривалось течение идеальной ( $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ ) конденсированной среды, описываемой уравнением состояния (18). Начальная плотность среды  $\rho = 1$ . Для дискретизации расчетной области во всех вычислительных экспериментах использовалась равномерная по радиусу сетка с числом интервалов 200. Решаемая тестовая задача сформулирована так, что при нулевом девиаторе тензора напряжений в оболочке от начала движения до момента фокусировки ( $r_{BГО}(t) \rightarrow 0$ ) выполняются условия:  $P_T = 0$ ;  $E_T = 0$ ;  $f(S) = 0$ .

Таблица 1. Средние и максимальные значения плотности и энтропийной функции, полученные в гидродинамическом приближении

Метод вычисления	Начальный профиль скорости											
	дозвуковой $U_{ВГО} = -0,1$				звуковой $U_{ВГО} = -1$				сверхзвуковой $U_{ВГО} = -5$			
	$\rho_{cp}$	$\rho_{max}$	$f_{cp}$	$f_{max}$	$\rho_{cp}$	$\rho_{max}$	$f_{cp}$	$f_{max}$	$\rho_{cp}$	$\rho_{max}$	$f_{cp}$	$f_{max}$
$q_1$	1,0188	1,453	$2,616 \cdot 10^{-8}$	$4,706 \cdot 10^{-6}$	1,2702	4,269	$2,143 \cdot 10^{-5}$	$3,030 \cdot 10^{-3}$	2,6082	13,539	$1,909 \cdot 10^{-4}$	$1,760 \cdot 10^{-2}$
$q_2$	1,0186	1,384	$4,734 \cdot 10^{-4}$	$6,740 \cdot 10^{-2}$	1,2622	2,806	$2,720 \cdot 10^{-2}$	4,409	2,5399	7,289	0,119	21,020
$q_3$	1,0187	1,412	$2,547 \cdot 10^{-4}$	$4,068 \cdot 10^{-2}$	1,2654	3,057	$2,180 \cdot 10^{-2}$	3,883	2,5627	8,206	$6,72 \cdot 10^{-2}$	12,154
ВОЛНА	1,0188	1,453	$3,670 \cdot 10^{-12}$	$1,483 \cdot 10^{-10}$	1,2702	4,270	$4,644 \cdot 10^{-13}$	$1,430 \cdot 10^{-10}$	2,6082	13,552	$1,008 \cdot 10^{-12}$	$1,181 \cdot 10^{-10}$

В таблице 1 приведены средние и максимальные значения энтропийной функции  $f(S)$  в момент фокусировки сферической оболочки, соответствующие трем различным начальным значениям  $U_{ВГО}$ . Среднее значение  $f(S)$  определялось по формуле

$$f_{cp} = \sum_{i=1}^N f_i(S) M_i / M, \text{ где } N \text{ — число интервалов сетки, } f_i(S), M_i \text{ — значение}$$

энтропийной функции и масса вещества в сеточном интервале с индексом  $i$ ,  $M$  — масса оболочки. Как видно из таблицы, метод ВОЛНА позволяет найти средние и максимальные значения энтропийной функции с высокой точностью. Можно считать, что версия метода Неймана–Рихтмайера с вязкостью  $q_1$  (формула (12)) также дает удовлетворительные значения энтропийной функции для всех трех оболочек. В случае использования вязкостей  $q_2$  и  $q_3$  (формулы (13) и (14)) энтропия определяется неудовлетворительно. Переход с нулевой изэнтропы на ненулевую чреват тем, что возникающие в веществе фазовые переходы будут рассчитываться неверно.

Таблица 1 содержит также средние и максимальные значения плотности среды в момент фокусировки оболочки. Расчеты показывают, что для «дозвуковой» и «звуковой» оболочек средние плотности, вычисленные различными методами, близки, а различия в значении максимальной плотности достигают 4,7% для «дозвуковой», 34,3% для «звуковой» и 46,2% для «сверхзвуковой» оболочек. Такие результаты объясняются тем, что при уменьшении с течением времени радиуса ВГО погрешности аппроксимации в окрестности внутренней границы возрастают сильнее, чем во всей оболочке. Это приводит к росту энтропии в соответствии с уравнением (10), что вызывает уменьшение сжатия, то есть снижение плотности.

Максимальные значения вклада теплового давления (см. (19)) в полное давление

$$v = \frac{P_T}{P_X + P_T}$$

и вклада тепловой энергии (см. (20)) в полную энергию

$$\mu = \frac{E_T}{E_T + E_X}$$

представлены в таблице 2.

Таблица 2. Максимальный вклад теплового давления и тепловой энергии в полное давление и полную внутреннюю энергию

Метод вычисления	Начальный профиль скорости					
	дозвуковой $U_{ВГО} = -0,1$		звуковой $U_{ВГО} = -1$		сверхзвуковой $U_{ВГО} = -5$	
	$v_{\max}$	$\mu_{\max}$	$v_{\max}$	$\mu_{\max}$	$v_{\max}$	$\mu_{\max}$
$q_1$	$6,979 \cdot 10^{-6}$	$2,0350 \cdot 10^{-5}$	0,00306	0,0035	0,0173	0,0176
$q_2$	$9,770 \cdot 10^{-2}$	$2,6360 \cdot 10^{-1}$	0,82400	0,7400	0,9550	0,9043
$q_3$	$5,930 \cdot 10^{-2}$	$1,6480 \cdot 10^{-1}$	0,80100	0,6454	0,9240	0,8326
ВОЛНА	$8,362 \cdot 10^{-7}$	$9,9733 \cdot 10^{-8}$	$4,568 \cdot 10^{-8}$	$3,4465 \cdot 10^{-14}$	$1,746 \cdot 10^{-9}$	$6,8395 \cdot 10^{-15}$

Следует заметить, что в точном решении задачи  $v = 0$ ,  $\mu = 0$ . Из таблицы видно, что метод Неймана–Рихтмайера [7] с псевдовязкостями  $q_2$  и  $q_3$  даёт неудовлетворительные результаты. Завышенные значения  $v$  и  $\mu$  коррелируют с завышенными значениями  $f(S)$  и заниженными значениями плотности. В «дозвуковой» оболочке максимальные значения  $v$  и  $\mu$  достигают значений  $\sim 0,098$  и  $0,264$ ; в «звуковой» и «сверхзвуковой» оболочках они неприемлемо высоки и достигают значений  $v_{\max} \sim 0,955$ ,  $\mu_{\max} \sim 0,904$ .

В первой серии расчетов определены различия в получаемых результатах, связанные с применением разных вычислительных алгоритмов — методические различия в случае одной и той же физической модели — идеальной жидкости. Чистота сравнения обеспечена таким выбором начального состояния и граничных условий оболочки, при котором от начала динамического процесса в оболочке вплоть до её фокусировки точное решение имеет вид  $P_T = 0$ ,  $E_T = 0$ ,  $f(S) = 0$ .

Во второй серии расчетов та же самая задача рассмотрена с добавлением в уравнения движения и энергии не равного нулю дивергенции тензора напряжений. Процессы в оболочке описываются в рамках моделей упругости (законом Гука с постоянным модулем сдвига) и пластичности (моделью идеальной пластичности [13]). Принято: коэффициент Пуассона  $\nu = 0,22$ ; безразмерный модуль сдвига  $\bar{G} = G/(\rho_0 C_0^2) = 0,510$ ; безразмерная величина предела текучести  $\bar{Y} = Y/(\rho_0 C_0^2) = 0,006$ ; число интервалов по радиусу 200.

В таблице 3 приведены результаты расчетов параметров среды на момент окончания процесса течения. Для оболочки с  $U_{ВГО} = -0,1$  — это время поворота ВГО, для остальных оболочек — время фокусировки. Следует отметить, что при снижении  $|U_{ВГО}|$  уменьшается начальная кинетическая энергия оболочки и возрастает время фокусировки. В гидродинамическом приближении время фокусировки всегда конечно при  $|U_{ВГО}| < 0$  и стремится к бесконечности при  $U_{ВГО} \rightarrow 0$ . В оболочке же с реальным веществом, имеющим отличный от нуля дивергенции тензора напряжений, время фокусировки стремится к бесконечности при  $U_{ВГО} \rightarrow -0,12037$ . При последующем увеличении безразмерной начальной скорости оболочки  $U_{ВГО}$  скорость ВГО обращается в нуль при некотором конечном значении радиуса ВГО в момент  $t_{ост}$  (оболочка останавливается, не сфокусировавшись). Значение  $t_{ост}$  зависит от  $U_{ВГО}$  таким образом, что  $t_{ост}$  стремится к нулю при  $U_{ВГО} \rightarrow 0$ .

Таблица 3. Средние и максимальные значения плотности и энтропийной функции, полученные с использованием модели идеальной пластичности

Метод вычисления	Начальный профиль скорости											
	дозвуковой $U_{BFO} = -0,1$				звуковой $U_{BFO} = -1$				сверхзвуковой $U_{BFO} = -5$			
	$\rho_{cp}$	$\rho_{max}$	$f_{cp}$	$f_{max}$	$\rho_{cp}$	$\rho_{max}$	$f_{cp}$	$f_{max}$	$\rho_{cp}$	$\rho_{max}$	$f_{cp}$	$f_{max}$
$q_1$	0,9946	0,997	0,0249	0,0329	1,2431	6,078	0,04950	0,211	2,5584	17,621	0,0298	0,177
$q_2$	0,9946	0,997	0,0249	0,0329	1,2392	3,534	0,05833	10,890	2,5311	9,364	0,0540	29,170
$q_3$	0,9946	0,997	0,0249	0,0329	1,2405	3,831	0,05618	8,756	2,5422	10,981	0,0436	17,278
ВОЛНА	0,9945	0,997	0,0252	0,0329	1,2431	6,093	0,04949	0,176	2,5584	17,668	0,0298	0,139

Таблица 3 содержит средние и максимальные значения плотности вещества и энтропийной функции  $f(S)$  для «звуковой» и «сверхзвуковой» оболочек в момент фокусировки, а также для «дозвуковой» оболочки в момент остановки ВГО. Видно, что независимо от метода вычисления средняя и максимальная плотности среды в остановившейся оболочке меньше, чем в исходном состоянии ( $\rho = 1$ ). Причиной этого является физическая диссипация энергии в пластическом течении вещества, заполняющего оболочку. Методическая (математическая) диссипация энергии заметно сказывается лишь на максимальной плотности «сверхзвуковой» оболочки, отличия значений которой друг от друга достигают 47%, в то время как значения средних плотностей отличаются на ~1%.

В оболочке с начальной скоростью  $U_{BFO} = -5$  средняя плотность оказалась почти в 2 раза выше, чем в оболочке с  $U_{BFO} = -1$ . В то же время среднее значение энтропийной функции здесь заметно меньше. Объяснение такого поведения функции  $f(S)$  можно получить, оценив диссипацию энергии на пластических деформациях.

По определению

$$T = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_V. \quad (24)$$

Поскольку  $E_x$  не зависит от  $S$ , то из (20) и (24) следует выражение

$$T = \frac{1}{6} \rho^2 \frac{df(S)}{dS}.$$

Подстановка  $T$  в левую часть уравнения (7) дает уравнение для определения  $f(S)$

$$\frac{df(S)}{dt} = 4V^3 \sum_{i=1}^3 \tau_i \frac{d\gamma_i}{dt}. \quad (25)$$

В модели идеальной пластичности при  $Y = \text{const}$  главные касательные напряжения и скорости деформации сдвига имеют вид

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_3 = -\tau_2 = 0,5Y, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = -\frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r}. \quad (26)$$

Подстановка (26) в (25) приводит к выражению

$$\frac{df(S)}{dt} = 4YV^2 \left( \frac{dV}{dt} - \frac{3UV}{r} \right). \quad (27)$$

Среднее значение энтропийной функции для оболочки в момент фокусировки  $t_\phi$  следует из (27):

$$f_{cp}^\phi = \frac{1}{M} \int_0^M \int_0^{t_\phi} 4YV^2 \left( \frac{dV}{dt} - \frac{3UV}{r} \right) dt dm. \quad (28)$$

Если к (28) дважды применить теорему о среднем, получится уравнение для  $f_{cp}^\phi$

$$f_{cp}^\phi = 4Y \left( \frac{V_{t_\phi}^3 - V_0^3}{3} - \frac{3U^*(V^3)^*}{r^*} t_\phi \right),$$

где  $U^* = U(t^*, m^*)$ ,  $(V^3)^* = V^3(t^*, m^*)$ ,  $r^* = r(t^*, m^*)$ ,  $0 \leq m^* \leq M$  и  $0 \leq t^* \leq t_\phi$  — некоторые промежуточные значения величин. Их замена следующими приближенными соотношениями

$$U^* = \frac{1}{2t_\phi} (r_{НГО}^\phi - r_{НГО}^0 - r_{ВГО}^0),$$

$$(V^3)^* = \frac{1}{2} \left( (V^\phi)^3 + (V^0)^3 \right),$$

$$r^* = \frac{1}{4} (r_{НГО}^\phi + r_{НГО}^0 + r_{ВГО}^0)$$

позволяет вычислить значение энтропийной функции в момент фокусировки. Отсюда следует, что  $f_{cp}^\phi = 0,0349$  для оболочки с  $U_{ВГО} = -1$  и  $f_{cp}^\phi = 0,0236$  для оболочки с  $U_{ВГО} = -5$ . Несмотря на грубые приближения, эти оценки точно передают порядок величины среднего значения энтропийной функции и отличаются от соответствующих значений, полученных методом ВОЛНА, соответственно, на ~30% и ~20% (Табл. 3).

Таким образом, с уверенностью можно говорить, что в быстроходной оболочке пластичность влияет на состояние вещества слабее, чем в тихоходной оболочке.

Из таблицы 3 следует, что в момент фокусировки максимальное значение энтропийной функции  $f_{cp}$ , определяемой пластическим течением, достигается в расчетах по методу Неймана–Рихтмайера с вязкостью  $q_2$ . Оно отличается от минимального значения  $f_{cp}$ , полученного по методу Куропатенко, на величину 0,00884 для «звуковой» оболочки и на величину 0,0242 для «сверхзвуковой» (7-й и 11-й столбцы, Табл. 3). В то же время различия значений  $f_{cp}$ , обусловленные выбором метода решения

Таблица 4. Среднее значение удельной тепловой энергии  $E_T$  в зависимости от предела текучести  $\bar{Y}$ 

Метод вычис- ления	Начальный профиль скорости					
	дозвуковой $U_{ВГО} = -0,1$		звуковой $U_{ВГО} = -1$		сверхзвуковой $U_{ВГО} = -5$	
	$\bar{Y} = 0,006$	$\bar{Y} = 0,004$	$\bar{Y} = 0,006$	$\bar{Y} = 0,004$	$\bar{Y} = 0,006$	$\bar{Y} = 0,004$
Среднее значение удельной тепловой энергии						
$q_1$	0,00411	0,00411	0,0181	0,0123	0,0797	0,0550
$q_2$	0,00411	0,00411	0,0223	0,0170	0,1362	0,1184
$q_3$	0,00411	0,00411	0,0226	0,0173	0,1380	0,1189
ВОЛНА	0,00415	0,00412	0,0180	0,0122	0,0778	0,0529

в гидродинамическом приближении, оказываются большими: 0,0272 для «звуковой» и 0,119 для «сверхзвуковой» оболочек (7-й и 11-й столбцы, Табл. 1). Максимальные значения  $f_{\max}$  отличаются еще сильнее: максимальное различие значений  $f_{\max}$ , связанное с учетом пластичности, составило 10,714 для «звуковой» и 29,03 для «сверхзвуковой» оболочек (8-й и 12-й столбцы, Табл. 3). Рост же различий максимальных значений  $f_{\max}$ , вызванных особенностями аппроксимации в гидродинамическом приближении, составляет 4,409 для «звуковой» и 21,02 — для «сверхзвуковой» оболочек, соответственно (8-й и 12-й столбцы, Табл. 1). Таким образом, различия максимальных значений  $f_{\max}$ , обусловленные учетом физического процесса — пластичности, оказались сравнимыми с максимальными различиями  $f_{\max}$ , определяемыми погрешностью конечно-разностной аппроксимации.

Третья серия расчетов оболочки выполнена на базе той же модели, что и вторая серия, но отличается значениями параметров девиатора тензора напряжений. Здесь принято: безразмерный модуль сдвига  $\bar{G} = 0,68852$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,282$ ; предел текучести  $\bar{Y} = 0,004$ .

Сравнение результатов, полученных во 2-й и 3-й сериях расчетов, даёт представление о влиянии на них параметров модели идеальной пластичности. Из таблицы 4 видно, что снижение предела текучести  $\bar{Y}$  в 1,5 раза (с 0,006 до 0,004) приводит к уменьшению среднего значения удельной тепловой энергии в оболочке примерно в 1,5 раза, то есть поведение тепловой энергии пропорционально поведению  $\bar{Y}$ . Таким образом, с помощью вариации предела текучести в рамках модели идеальной пластичности можно существенно изменить диссипацию энергии и, следовательно, погрешность, порождаемую физической моделью.

## 6. Заключение

Представленные в таблицах 1–4 результаты численных экспериментов показали, что при моделировании динамических процессов в оболочках алгоритм «ВОЛНА» [12], основанный на методе Куропатенко [10], обеспечивает наиболее высокую точность расчёта величин. Алгоритмы с искусственной вязкостью (типа Неймана–Рихтмайера) приводят к «математической» диссипации энергии даже в тех случаях, когда она должна отсутствовать. Разброс значений при наличии «математической» диссипации энергии сравним с разбросом, найденным с учетом диссипации энергии на пластическом участке деформирования. Таким образом, применение моделей с искусственной вязкостью для математического моделирования динамических процессов в реальных средах не позволяет достоверно определить величину физической диссипации энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00032).

## Литература

1. Куропатенко В.Ф. О точности вычисления энтропии в разностных схемах для уравнений газовой динамики. // Численные методы механики сплошной среды: сб. науч. тр. – Новосибирск, 1978. – Т. 9, № 7. – С. 49-59.
2. Куропатенко В.Ф. Связь дивергентности с консервативностью разностных схем для уравнений газовой динамики: Препр. № 192 / АН СССР. Ин-т прикладной математики. – М., 1982. – 26 с.
3. Куропатенко В.Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики // Ж. вычисл. математики и матем. физики. – 1985. – Т. 25, № 8. – С. 1176-1188.
4. Куропатенко В.Ф. Мезомеханика однокомпонентных и многокомпонентных материалов // Физич. мезомеханика. – 2001. – Т. 4, № 3. – С. 49-55.
5. Куропатенко В.Ф. Об одной модели упругопластического деформирования // Численные методы механики сплошной среды: сб. науч. тр. – Новосибирск, 1973. – Т. 4, № 5. – С. 189-194.
6. Глушак Б.Л., Куропатенко В.Ф., Новиков С.А. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках. – Новосибирск: Наука, 1992. – 393 с.
7. Neumann J., Richtmyer R. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks // J. Appl. Phys. – 1950. – V. 21, N. 3. – P. 232-237.
8. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
9. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1960. – 262 с.
10. Куропатенко В.Ф. Метод расчета ударных волн // ДАН СССР. – 1960. – Т. 133, № 4. – С. 771-772.
11. Алексеева Т.Н., Куропатенко В.Ф. Адаптивный безусловно устойчивый разностный метод расчета мелких неоднородностей гидродинамического потока // Численные методы механики сплошной среды: сб. науч. тр. – Новосибирск, 1981. – Т. 12, № 4. – С. 3-14.
12. Куропатенко В.Ф., Коваленко Г.В., Кузнецова В.И., Михайлова Г.И., Сапожникова Г.Н. Комплекс программ «Волна» и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. Часть 1. Неоднородный разностный метод // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 1989. – Вып. 2. – С. 9-17.
13. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. – М.: Мир, 1967. – С. 212-263.

Поступила в редакцию 29.04.10

---

### Сведения об авторах

Куропатенко Валентин Федорович, дфмн, проф., гнс, Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики им. акад. Е.И. Забабахина (РФЯЦ-ВНИИТФ), 456770, Снежинск, Челябинская обл., ул. Васильева, д. 13; E-mail: v.f.kuropatenko@rambler.ru

Андреев Юрий Николаевич, нс, РФЯЦ-ВНИИТФ; E-mail: YuriAndreev@mail.ru