УДК 539.3

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

И.В. Киреев[1], Ю.В. Немировский[2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*
[2]*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия*

В работе предлагается метод построения определяющих соотношений линейной теории оболочек вращения в комплексной гамильтоновой форме. На основе вариационного принципа Лагранжа построена модель упругой многослойной ортотропной оболочки вращения, в которой кинематические гипотезы принимаются отдельно для каждой из амплитуд гармоник в разложении в комплексный ряд Фурье полевых функций механической задачи. Получены явные выражения коэффициентов и правых частей комплексной гамильтоновой системы уравнений статики оболочки вращения через её жесткостные характеристики и действующие нагрузки.

Ключевые слова: упругость; теория оболочек; гамильтонова система

HAMILTONIAN FORMALIZATION OF CONSTITUTIVE RELATIONS OF THE LINEAR THEORY OF ELASTIC SHELLS OF REVOLUTION

I.V. Kireev[1] and Yu.V. Nemirovskii[2]

[1]*Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia*
[2]*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

We propose a method to construct constitutive relations of the linear theory of shells of revolution in the complex Hamiltonian form. Based on Lagrange's variational principle, a model of an elastic multilayer orthotropic shell of revolution has been constructed. In this model, kinematic assumptions are made separately for each of the amplitudes of the harmonics in expansion of the field functions of the mechanical problem in a complex Fourier series. Explicit expressions have been obtained for the coefficients and right-hand sides of the complex Hamiltonian system of equations of the statics of the shell of revolution using its rigidity characteristics and acting forces.

Key words: elasticity, theory of shells, Hamiltonian system

1. Введение

Широкое применение в технике тонкостенных оболочечных конструкций из композиционных материалов и необходимость прогнозирования их поведения при сложном нагружении еще долго будет определять актуальность исследований в этой области вычислительной механики. Задачи, возникающие при расчете оболочек, можно рассматривать на основе различных подходов. Во многих случаях применение классической теории недеформируемых нормалей приводит к удовлетворительным результатам. Однако для оболочек, обладающих значительной анизотропией механических и теплофизических свойств, для нетонких оболочек и тому подобное, предположения классической теории требуют уточнения, так как факторы, которыми она пренебрегает, могут существенно влиять на напряженно-деформированное состояние

(НДС) оболочек. Так, например, особенности работы оболочек, состоящих из слоев с сильно различающимися упругими свойствами, характеризуются значительными возникающими в маложестких слоях поперечными деформациями, которые могут существенно повлиять на распределение напряжений и перемещений в оболочке в целом. Получить решение в трехмерной постановке даже упругих задач для подобных оболочек чрезвычайно сложно, и это вынуждает обращаться к различным теориям оболочек, преобразующим исходные трехмерные задачи к двумерным.

На сегодняшний день существует столь большое количество работ по моделированию упругого поведения оболочек, что при известном желании можно найти работу, в которой моделируется (более или менее точно по сравнению с теорией упругости) НДС оболочки вращения для заданного класса нагружений. Поэтому основной проблемой вычислительной механики применительно к теории оболочек становится не моделирование, а расчёт по оболочечным моделям, что представляет собой очень сложную вычислительную задачу.

Одним из факторов, оказывающих решающее влияние на сложность и надёжность численных алгоритмов решения оболочечных задач, является выбор искомых полевых функций. Так в случае тонкой классической оболочки вращения выбором неизвестных [1] можно не только значительно ослабить требования к гладкости исходных данных, но и сформировать разрешающую систему линейных дифференциальных уравнений в гамильтоновом виде, который обладает целым рядом специфических свойств [2], существенно облегчающих как аналитическое [3], так и численное исследование [4], [5] системы.

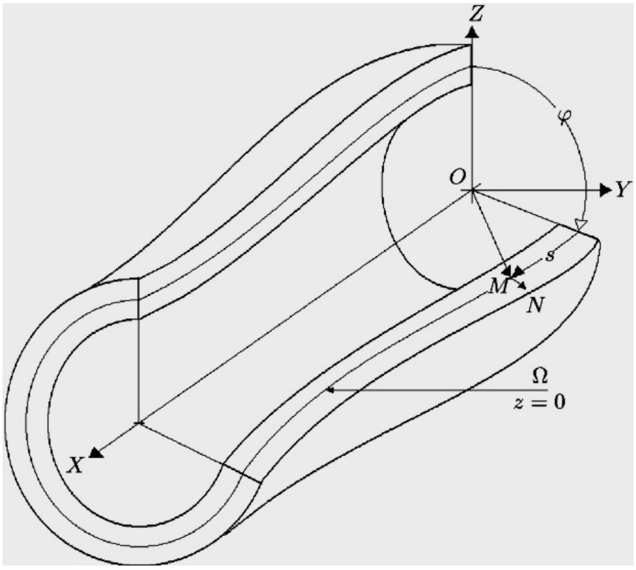
В данной работе предлагается метод построения определяющих соотношений линейной теории оболочек вращения в комплексной гамильтоновой форме. На основе вариационного принципа Лагранжа проводится уточнение сдвиговой модели из работы [6] для случая упругой многослойной ортотропной оболочки вращения. Под уточнением понимается то, что кинематические гипотезы принимаются отдельно для каждой из амплитуд гармоник в разложении полевых функций исходной упругой задачи в комплексный ряд Фурье. В результате возникает краевая задача для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 12-го порядка относительно комплекснозначного вектора амплитуд перемещений. Получены явные выражения коэффициентов и правых частей комплексной гамильтоновой системы уравнений статики оболочки вращения через её жесткостные характеристики и действующие нагрузки.

2. Геометрия поверхностей вращения

Положение точки M на отсчётной поверхности вращения Ω задается [7] как её декартовыми (X,Y,Z), так и цилиндрическими (X,φ,R) координатами (см. рисунок). Здесь $\mathbf{R}=\mathbf{OM}(X,Y,Z)$ — радиус-вектор рассматриваемой точки M поверхности вращения Ω; $R(s)$ — расстояние от точки M до оси вращения, $R=\sqrt{X^2+Y^2}$; φ — угол, образуемый YZ проекцией вектора $\mathbf{R}$ и осью OZ; s — длина дуги меридиана, отсчитываемая от плоскости YOZ до точки M. Пара чисел (s,φ) образует криволинейные координаты точки M на рассматриваемой поверхности вращения.

Координатные векторы введенной криволинейной системы координат

$$\mathbf{R}_s=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial s}=\mathbf{e}_s,\qquad \mathbf{R}_\varphi=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\varphi}=R\cdot\mathbf{e}_\varphi,$$



$$X = X(s);$$
$$Y = R(s)\sin\varphi;$$
$$Z = R(s)\cos\varphi;$$
$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = 1.$$

Геометрия оболочки вращения

ортогональны между собой $\left(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_\varphi\right) = 0,$ а единичные векторы $\mathbf{e}_s$ и $\mathbf{e}_\varphi$ $(|\mathbf{e}_s| = 1,\ |\mathbf{e}_\varphi| = 1)$ имеют следующие декартовы координаты: $\mathbf{e}_s\left(X'(s),\ R'(s)\sin\varphi,\ R'(s)\cos\varphi\right)$, $\mathbf{e}_\varphi(0,\ \cos\varphi,\ -\sin\varphi)$. Здесь и далее через $F'(s)$ обозначается производная от функции $F(s)$ по s.

Координаты внешней нормали $\mathbf{n} = \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_\varphi$ к поверхности вращения Ω равны $\mathbf{n}\left(-R'(s),\ X'(s)\sin\varphi,\ X'(s)\cos\varphi\right)$. Координатные направления s и φ являются главными для поверхности вращения Ω, а потому её геометрия полностью определяется параметрами Ламе [8] $|\mathbf{R}_s| = 1,\ |\mathbf{R}_\varphi| = R$ и главными кривизнами $B_s = R''X' - X''R'$, $B_\varphi = -X'/R$, которые связаны между собой соотношениями Кодацци–Гаусса [7]: $(RB_\varphi)' = R'B_s,\quad R'' = -RB_\varphi B_s$. С поверхностью Ω и введёнными криволинейными координатами (s, φ) ассоциируется координатная трёхмерная система (s, φ, z) некоторой пространственной окрестности Ω, в которой радиус-вектор близкой к Ω точки M задается соотношением $\mathbf{R}(s, \varphi, z) = \mathbf{R}(s, \varphi) + z \cdot \mathbf{n}(s, \varphi)$. Предполагая, что $|zB_s| < 1$ и $|zB_\varphi| < 1$ для всех рассматриваемых значений координаты z, имеем следующие выражения для параметров Ламе трёхмерной ортогональной системы координат (s, φ, z): $A_s = 1 - zB_s,\ A_\varphi = R(1 - zB_\varphi),\ A_z = 1.$

В заключение приведём прямую и обратную зависимости единичного вектора $\mathbf{e}_X$ — направляющего вектора оси OX, и единичного вектора $\mathbf{e}_R$, задающего радиальное направление, от векторов $\mathbf{e}_s$ и $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{e}_X = -RB_\varphi \mathbf{e}_s - R'\mathbf{n}, \qquad \mathbf{e}_s = -RB_\varphi \mathbf{e}_X + R'\mathbf{e}_R, \qquad \mathbf{e}_R = R'\mathbf{e}_s - RB_\varphi \mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} = -R'\mathbf{e}_X + RB_\varphi \mathbf{e}_R\,.$$

3. Комплексная форма соотношений линейной теории упругости для замкнутых оболочек вращения

Под оболочкой вращения будем понимать трёхмерное упругое тело вращения, криволинейные координаты (s, φ, z) которого принадлежат параллелепипеду

$[s_l, s_r]\times[0,2\pi]\times[z_l, z_r]$. Поверхность вращения Ω $(z=0)$ принято называть отсчётной поверхностью оболочки вращения.

Точка M, имеющая радиус-вектор $\mathbf{R}$, при деформировании перемещается в положение M^* с радиус-вектором $\mathbf{R}^*$: $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \mathbf{U}$. Вектор $\mathbf{U}$ называется вектором перемещений. В базисе $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{n}$ его координаты обозначим как U_s, U_φ, U_z — меридиональное, окружное и нормальное перемещения соответственно:

$$\mathbf{U} = U_s \mathbf{e}_s + U_\varphi \mathbf{e}_\varphi + U_z \mathbf{n}\,.$$

С целью явного выделения перемещений оболочки как твёрдого тела вектор смещений иногда задается в виде:

$$\mathbf{U} = U_X \mathbf{e}_X + U_R \mathbf{e}_R + \Psi A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

Здесь U_X и U_R — осевая и радиальная составляющие вектора перемещений, Ψ — изменение угловой координаты φ при деформировании. При этом перемещению оболочки вращения как твёрдого тела отвечают следующие значения компонент:

$$U_X(s,\varphi,z) \equiv \text{const}, \qquad U_R(s,\varphi,z) \equiv 0, \qquad \Psi(s,\varphi,z) \equiv \text{const}.$$

Связь между координатами U_s, U_φ, U_z и U_X, Ψ, U_R вектора перемещений $\mathbf{U}$ определяется формулами [7]:

$$\begin{aligned}
&U_X = -RB_\varphi U_s - R'U_z; &\quad &U_s = -RB_\varphi U_X + R'U_R;\\
&\Psi = U_\varphi / A_\varphi; & &U_\varphi = A_\varphi \Psi;\\
&U_R = R'U_s - RB_\varphi U_z; & &U_z = -R'U_X - RB_\varphi U_R.
\end{aligned} \tag{1}$$

Физические компоненты тензора линейных деформаций [8] определяют как

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_\alpha A_\beta}\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \beta}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha}\right)\right\} \quad (\alpha, \beta = s, \varphi, z).$$

Вводя обозначения $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha}$, $\gamma_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}$, связь между физическими компонентами тензоров напряжений и деформаций (закон Дюгамеля–Неймана) запишем в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_\sigma(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta), \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_\tau \boldsymbol{\gamma}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z)$ — вектор нормальных, а $\boldsymbol{\gamma}(\gamma_{s\varphi}, \gamma_{sz}, \gamma_{\varphi z})$ — вектор касательных деформаций; $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_s, \sigma_\varphi, \sigma_z)$, $\boldsymbol{\tau}(\tau_{s\varphi}, \tau_{sz}, \tau_{\varphi z})$ — векторы нормальных и скалывающих напряжений соответственно; $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ — температурные деформации. Применяя соотношения Кодацци–Гаусса, легко получить выражения векторов деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ и $\boldsymbol{\gamma}$ через функции U_s, U_z и Ψ :

$$\varepsilon_s = \frac{1}{A_s}\left(\frac{\partial U_s}{\partial s} - B_s U_z\right), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_\varphi}\left(R' U_s - R B_\varphi U_z\right), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \tag{3}$$

$$\gamma_{s\varphi} = \frac{1}{A_\varphi}\frac{\partial U_s}{\partial \varphi} + \frac{A_\varphi}{A_s}\frac{\partial \Psi}{\partial s}, \quad \gamma_{sz} = \frac{\partial U_s}{\partial z} + \frac{1}{A_s}\left(\frac{\partial U_z}{\partial s} + B_s U_s\right), \quad \gamma_{\varphi z} = A_\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{A_\varphi}\frac{\partial U_z}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

Уравнения равновесия следуют из вариационного принципа Лагранжа; функционал Лагранжа упругой ортотропной оболочки вращения примем в виде:

$$\Phi = \int_{s_l}^{s_r}\int_{z_l}^{z_r}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta\right) + \left(\tau, \boldsymbol{\gamma}\right) - 2\left(\mathbf{F}, \mathbf{U}\right)\right\} A_s A_\varphi ds dz d\varphi -$$
$$-\sum_{k=l}^{k=r}\left\{\int_{s_l}^{s_r}\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{F}_k^z, \mathbf{U}(z_k)\right) A_{sk} A_s(z_k) A_\varphi(z_k) ds d\varphi + \int_{z_l}^{z_r}\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{F}_k^s, \mathbf{U}(s_k)\right) A_s(s_k) A_\varphi(s_k) dz d\varphi\right\}. \tag{5}$$

Здесь $A_{sk} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{z_k'}{A_s(z_k)}\right)^2}$, $z_k' = \dfrac{dz_k}{ds}$; $\mathbf{F}$ — вектор массовых сил; $\mathbf{F}_k^z$ — вектор внешних сил, действующий на поверхности $z = z_k$, $k = l, r$; $\mathbf{F}_k^s$ — вектор внешних сил, действующий на поверхности $s = s_k$, $k = l, r$.

Поверхностные нагрузки можно выразить через значения напряжений на соответствующей поверхности. Так для векторов поверхностных сил $\mathbf{F}_k^z(F_{ks}^z, F_{k\varphi}^z, F_{kz}^z)$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{z_k'}{A_s(z_k)}\sigma_s(z_k) + \tau_{sz}(z_k) = \mathrm{sgn}(k) A_{sk} F_{ks}^z;\\
&\frac{z_k'}{A_s(z_k)}\tau_{s\varphi}(z_k) + \tau_{\varphi z}(z_k) = \mathrm{sgn}(k) A_{sk} F_{k\varphi}^z;\\
&\frac{z_k'}{A_s(z_k)}\tau_{sz}(z_k) + \sigma_z(z_k) = \mathrm{sgn}(k) A_{sk} F_{kz}^z;
\end{aligned} \tag{6}$$

здесь $k = l, r$ и

$$\mathrm{sgn}(l) = -1, \quad \mathrm{sgn}(r) = 1. \tag{7}$$

Торцевые же усилия $\mathbf{F}_k^s(F_{ks}^s, F_{k\varphi}^s, F_{kz}^s)$ связаны со значениями напряжений на торце $s = s_k$ выражениями: $\sigma_s(s_k) = \mathrm{sgn}(k) F_{ks}^s$; $\tau_{s\varphi}(s_k) = \mathrm{sgn}(k) F_{k\varphi}^s$; $\tau_{sz}(z_k) = \mathrm{sgn}(k) F_{kz}^s$. В случае, когда на части торцевой поверхности оболочки краевые условия заданы в смещениях, последнее слагаемое в (5) модифицируется естественным образом.

Уравнения равновесия для оболочки вращения являются условиями стационарности [9] функционала Лагранжа Ф, рассматриваемого как функционал от поля смещений $\mathbf{U}$. В проекциях на координатные направления s, z, φ уравнения равновесия имеют вид:

$$-\frac{\partial}{\partial s}(A_\varphi \sigma_s) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_s \tau_{s\varphi}) - \frac{\partial}{\partial z}(A_s A_\varphi \tau_{sz}) + R' A_s \sigma_\varphi + B_s A_\varphi \tau_{sz} - A_s A_\varphi F_s = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}(A_\varphi \tau_{sz}) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_s \tau_{\varphi z}) - \frac{\partial}{\partial z}(A_s A_\varphi \sigma_z) - B_s A_\varphi \sigma_s - R B_\varphi A_s \sigma_\varphi - A_s A_\varphi F_z = 0, \qquad (8)$$
$$-\frac{\partial}{\partial s}(A_\varphi^2 \tau_{s\varphi}) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_s A_\varphi \varphi \sigma_\varphi) - \frac{\partial}{\partial z}(A_s A_\varphi^2 \tau_{\varphi z}) - A_s A_\varphi^2 F_\varphi = 0.$$

В случае независимости от координаты φ матриц жесткости $\mathbf{D}_\sigma$ и $\mathbf{D}_\tau$ (см. соотношения (2)) решение $\mathbf{U}$ трёхмерной упругой задачи для оболочки вращения может быть представлено в виде ряда Фурье

$$\mathbf{U}(s,\varphi,z) = \sum_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} \mathbf{U}^\omega(s,z)\exp(i\,\omega\,\varphi),$$

причём $\mathbf{U}^{(-\omega)} = \overline{\mathbf{U}^\omega}$, поскольку решение $\mathbf{U}(s,\varphi,z)$ исходной задачи вещественно.

Предполагая, что действующие нагрузки и начальные деформации разлагаются в ряды Фурье, введём в рассмотрение вектор-функции $\boldsymbol{\varepsilon}^\omega(s,z)$, $\boldsymbol{\gamma}^\omega(s,z)$, $\boldsymbol{\sigma}^\omega(s,z)$, $\boldsymbol{\tau}^\omega(s,z)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_\vartheta^\omega(s,z)$, $\mathbf{F}^\omega(s,z)$, $\mathbf{F}_k^{\alpha\omega}(s,z)$, являющиеся коэффициентами Фурье соответствующих функций ($\omega = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Связи между введёнными вектор-функциями аналогичны соотношениям (2)–(4), (8) и получаются из них заменой оператора дифференцирования $\partial/\partial\varphi$ умножением на мнимое число $i\omega$.

Модифицированные уравнения равновесия можно получить и из вариационного принципа Лагранжа с функционалом вида [10]:

$$\Phi_\omega\left(\mathbf{U}^\omega\right) = \frac{1}{2}\int_{s_l}^{s_r}\int_{z_l}^{z_r}\left\{\left(\boldsymbol{\sigma}^\omega, \boldsymbol{\varepsilon}^\omega - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta^\omega\right) + \left(\boldsymbol{\tau}^\omega, \boldsymbol{\gamma}^\omega\right) - 2\mathrm{Re}\left(\mathbf{F}^\omega, \mathbf{U}^\omega\right)\right\} A_s A_\varphi ds dz -$$
$$-\sum_{k=l}^{k=r}\left\{\int_{s_l}^{s_r}\mathrm{Re}\left(\mathbf{F}_k^{z\omega}, \mathbf{U}^\omega(z_k)\right) A_{sk} A_s(z_k) A_\varphi(z_k)\, ds + \int_{z_l}^{z_r}\mathrm{Re}\left(\mathbf{F}_k^{s\omega}, \mathbf{U}^\omega(s_k)\right) A_s(s_k) A_\varphi(s_k) dz\right\}. \qquad (9)$$

Здесь $(*,*)$ — эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^3$, а $\mathrm{Re}(c)$ — действительная часть комплексного числа c. Дальнейшее упрощение разрешающих соотношений связано с переходом к оболочечным теориям. Один из возможных вариантов рассматривается ниже.

4. Основные соотношения линейной теории упругих ортотропных многослойных оболочек вращения для коэффициентов Фурье полевых функций

Рассмотрим ортотропную многослойную оболочку вращения. Будем предполагать, что она замкнута в окружном направлении, а также:

а) упругие свойства оболочки не зависят от окружной координаты φ; материал оболочки ортотропен, и оси ортотропии совпадают с координатными направлениями s, φ, z, то есть матрица $\mathbf{D}_\tau$ диагональна; элементы симметричных положительно определённых матриц $\mathbf{D}_\sigma$ и $\mathbf{D}_\tau$ обозначаются следующим образом: $(\mathbf{D}_\sigma)_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = s, \varphi, z$), $(\mathbf{D}_\tau)_{11} = D_\gamma$, $(\mathbf{D}_\tau)_{22} = D_s$, $(\mathbf{D}_\tau)_{33} = D_\varphi$;

б) z_l и z_r постоянны, то есть не зависят ни от s, ни от φ; на основании этого и соотношений (6) получается, что задание поверхностных нагрузок $\mathbf{F}_k^z(F_{ks}^z, F_{k\varphi}^z, F_{kz}^z)$

эквивалентно заданию краевых значений для напряжений, поскольку $z_k' = 0$; используются обозначения: $\sigma^{\omega}_{ks}(s) = \sigma^{\omega}_{s}(s, z_k)$, $\tau^{\omega}_{k\alpha z}(s) = \tau^{\omega}_{\alpha z}(s, z_k)$ $\left(\alpha = s, \varphi; \quad k = l, r\right)$.

Тогда, согласно работе [6], примем следующий закон распределения поперечных компонент тензора деформаций по толщине:

$$\varepsilon^{\omega}_{z}(s, z) \equiv 0. \tag{10}$$

$$\tau^{\omega}_{\alpha z}(s, z) = \tau^{\omega}_{l\alpha z} + \frac{z - z_l}{z_r - z_l}(\tau^{\omega}_{r\alpha z} - \tau^{\omega}_{l\alpha z}) + f^{\omega}_{\alpha}(z)\pi^{\omega}_{\alpha}(s), \quad f^{\omega}_{\alpha}(z_l) = f^{\omega}_{\alpha}(z_r) = 0. \tag{11}$$

Здесь $\alpha = s, \varphi$.

В силу соотношений (3) гипотеза (10) даёт тождество $\dfrac{\partial U^{\omega}_{z}(s, z)}{\partial z} \equiv 0,$ то есть $U^{\omega}_{z}(s, z) \equiv w^{\omega}(s)$, а из гипотезы (11) для меридионального смещения получаем: $\dfrac{\partial U^{\omega}_{s}(s, z)}{\partial z} + \dfrac{1}{A_s}\left(\dfrac{\partial w^{\omega}}{\partial s} + B_s U^{\omega}_{s}(s, z)\right) = \gamma^{\omega}_{sz}(s, z).$ Поделив это равенство на A_s и проинтегрировав по z, придём к следующей аппроксимации по z для смещения $U^{\omega}_{s}(s, z)$:

$$U^{\omega}_{s}(s, z) = u^{\omega} - z\left(\frac{dw^{\omega}}{ds} + B_s u^{\omega}\right) + A_s(s, z)\int_0^z \frac{\gamma^{\omega}_{sz}(s, \zeta)}{A_s(s, \zeta)} d\zeta.$$

Здесь $u^{\omega}(s)$ — значение смещения $U^{\omega}_{s}(s, z)$ на поверхности $z = 0$.

Аналогично приходим к закону распределения окружного смещения по толщине оболочки:

$$\Psi^{\omega}(s, z) = \psi^{\omega} - z\frac{i\omega}{RA_{\varphi}} w^{\omega} + \int_0^z \frac{\gamma^{\omega}_{\phi z}(s, \zeta)}{A_{\varphi}(s, \zeta)} d\zeta; \qquad \psi^{\omega}(s) = \Psi^{\omega}(s, 0).$$

Теперь, используя представление для поперечных деформаций (11), найдем распределение полей смещений и деформаций. Для этого введём обозначения

$$\lambda^{\omega}_{\alpha}(s, z) = A_{\alpha}(s, z)\int_0^z \frac{\tau^{\omega}_{l\alpha z}(s) + \dfrac{\zeta - z_l}{z_r - z_l}\left(\tau^{\omega}_{r\alpha z}(s) - \tau^{\omega}_{l\alpha z}(s)\right)}{D_{\alpha}(s, \zeta)A_{\alpha}(s, \zeta)} d\zeta,$$

$$\mu^{\omega}_{\alpha}(s, z) = A_{\alpha}(s, z)\int_0^z \frac{f^{\omega}_{\alpha}(\zeta)}{D_{\alpha}(s, \zeta)A_{\alpha}(s, \zeta)} d\zeta. \qquad \left(\alpha = s, \varphi\right) \tag{12}$$

Тогда

$$U^{\omega}_{s}(s, z) = u^{\omega}(s) + z\eta^{\omega}_{s}(s) + \mu^{\omega}_{s}(s, z)\pi^{\omega}_{s}(s) + \lambda^{\omega}_{s}(s, z),$$

$$U^{\omega}_{z}(s, z) = w^{\omega}(s), \tag{13}$$

$$\Psi^{\omega}(s,z)=\psi^{\omega}(s)+\frac{z\eta_{\varphi}^{\omega}(s)+\mu_{\varphi}^{\omega}(s,z)\pi_{\varphi}^{\omega}(s)+\lambda_{\varphi}^{\omega}(s,z)}{A_{\varphi}(s,z)}.$$

Здесь

$$\eta_s^{\omega}(s)=-\frac{dw^{\omega}(s)}{ds}-B_s(s)u^{\omega}(s),\qquad \eta_{\varphi}^{\omega}(s)=-\frac{i\omega}{R}w^{\omega}(s) \tag{14}$$

есть углы поворота нормали к поверхности Ω при деформировании.

После подстановки (13) в выражения (3)–(4) получим:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_s^{\omega}=\frac{1}{A_s}\left[\frac{du^{\omega}}{ds}-B_s w^{\omega}+z\frac{d\eta_s^{\omega}}{ds}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_s^{\omega}\pi_s^{\omega}+\lambda_s^{\omega}\right)\right];\\
&\varepsilon_{\varphi}^{\omega}=\frac{1}{A_{\varphi}}\left[R'u^{\omega}-RB_{\varphi}w^{\omega}+i\omega A_{\varphi}\psi^{\omega}+z(R'\eta_s^{\omega}+i\omega\eta_{\varphi}^{\omega})+R'(\mu_s^{\omega}\pi_s^{\omega}+\lambda_s^{\omega})+i\omega(\mu_{\varphi}^{\omega}\pi_{\varphi}^{\omega}+\lambda_{\varphi}^{\omega})\right];\\
&\varepsilon_z^{\omega}=0;\\
&\gamma_{s\varphi}^{\omega}=\frac{A_{\varphi}}{A_s}\left\{\frac{d\psi^{\omega}}{ds}+\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{A_{\varphi}}\left(z\eta_{\varphi}^{\omega}+\mu_{\varphi}^{\omega}\pi_{\varphi}^{\omega}+\lambda_{\varphi}^{\omega}\right)\right]\right\}+\frac{i\omega}{A_{\varphi}}\left(u^{\omega}+z\eta_s^{\omega}+\mu_s^{\omega}\pi_s^{\omega}+\lambda_s^{\omega}\right);\\
&\gamma_{sz}^{\omega}=\frac{1}{D_s}\left[\tau_{lsz}^{\omega}+\frac{z-z_l}{z_r-z_l}\left(\tau_{rsz}^{\omega}-\tau_{lsz}^{\omega}\right)+f_s^{\omega}\pi_s^{\omega}\right];\\
&\gamma_{\varphi z}^{\omega}=\frac{1}{D_{\varphi}}\left[\tau_{l\varphi z}^{\omega}+\frac{z-z_l}{z_r-z_l}\left(\tau_{r\varphi z}^{\omega}-\tau_{l\varphi z}^{\omega}\right)+f_{\varphi}^{\omega}\pi_{\varphi}^{\omega}\right].
\end{aligned}\tag{15}$$

Теперь, варьируя функционал $\Phi_{\omega}\left(\mathbf{U}^{\omega}\right)$ из (9) по функциям $w^{\omega}(s)$, $u^{\omega}(s)$, $\pi_s^{\omega}(s)$, $\psi^{\omega}(s)$ и $\pi_{\varphi}^{\omega}(s)$, придём к пяти уравнениям равновесия. Если точно провести все выкладки, то коэффициенты разрешающей системы линейных дифференциальных уравнений будут иметь очень сложную структуру [6]. Поэтому сделаем следующие упрощающие предположения, характерные для технической линейной теории тонких оболочек.

Предположение 1. Толщина оболочки мала по сравнению с характерными линейными размерами оболочки вращения, то есть

$$\left|zB_s\right|\ll 1,\quad \left|zB_{\varphi}\right|\ll 1,\quad z\in[z_l,z_r]; \tag{16}$$

Предположение 2. Сдвиговые жесткости D_s и D_{φ} не зависят от координаты s.

Тогда в (9), (12) и (13) полагаем $A_s(s,z)\equiv 1$ и $A_{\varphi}(s,z)\equiv R(s)$, а для компонент тензора деформаций ε_s^{ω}, $\varepsilon_{\varphi}^{\omega}$, $\gamma_{s\varphi}^{\omega}$ примем следующие приближённые выражения:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_s^{\omega}=\frac{du^{\omega}}{ds}-B_s w^{\omega}+z\frac{d\eta_s^{\omega}}{ds}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_s^{\omega}\pi_s^{\omega}+\lambda_s^{\omega}\right);\\
&\varepsilon_{\varphi}^{\omega}=\frac{R'}{R}(u^{\omega}+\mu_s^{\omega}\pi_s^{\omega}+\lambda_s^{\omega})-B_{\varphi}w^{\omega}+z\left(\frac{\omega^2}{R^2}w^{\omega}+\frac{R'}{R}\eta_s^{\omega}\right)+\frac{i\omega}{R}(R\psi^{\omega}+\mu_{\varphi}^{\omega}\pi_{\varphi}^{\omega}+\lambda_{\varphi}^{\omega});
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\gamma_{s\varphi}^{\omega} = R\frac{\partial}{\partial s}\left[\psi^{\omega} + \frac{\mu_{\varphi}^{\omega}\pi_{\varphi}^{\omega} + \lambda_{\varphi}^{\omega}}{R}\right] + \frac{i\omega}{R}\left(u^{\omega} + \mu_{s}^{\omega}\pi_{s}^{\omega} + \lambda_{s}^{\omega}\right) + \frac{2i\omega z}{R^2}\left(R'w + R\eta_{s}^{\omega}\right).$$

После варьирования упрощенного функционала Лагранжа получим уравнения равновесия тонкой оболочки вращения

$$\begin{aligned}
&-B_s(RT_s^{\omega}) - \frac{d}{ds}(RQ_s^{\omega}) - RB_{\varphi}T_{\varphi}^{\omega} + \frac{\omega^2}{R}M_{\varphi}^{\omega} - \frac{2i\omega R'}{R}M^{\omega} - R\Upsilon_z^{\omega} = 0\,,\\
&-\frac{d}{ds}(RT_s^{\omega}) + B_s(RQ_s^{\omega}) + R'T_{\varphi}^{\omega} - i\omega T^{\omega} - R\Upsilon_s^{\omega} = 0\,,\\
&-\frac{d}{ds}(RM_s^{\omega}) + R'M_{\varphi}^{\omega} - 2i\omega M^{\omega} + RQ_s^{\omega} - R\Upsilon_q^{\omega} = 0\,,\\
&-\frac{d}{ds}(R\Pi_{ss}^{\omega}) + R'\Pi_{s\varphi}^{\omega} - i\omega\Pi_s^{\omega} + R\Gamma_s^{\omega} - R\Upsilon_{\pi s}^{\omega} = 0\,,\\
&-\frac{d}{ds}(R^2T^{\omega}) - i\omega RT_{\varphi}^{\omega} - R^2\Upsilon_{\varphi}^{\omega} = 0\,,\\
&-\frac{d}{Rds}(R^2\Pi_{\varphi}^{\omega}) - i\omega\Pi_{\varphi\varphi}^{\omega} + R\Gamma_{\varphi}^{\omega} - R\Upsilon_{\pi\varphi}^{\omega} = 0
\end{aligned}\tag{18}$$

и систему естественных краевых условий

$$\begin{aligned}
&w^{\omega}(s_k) = w_k^{\omega} \quad \text{или} \quad Q_s^{\omega}(s_k) = Q_{sk}^{\omega}; \qquad u^{\omega}(s_k) = u_k^{\omega} \quad \text{или} \quad T_s^{\omega}(s_k) = T_{sk}^{\omega};\\
&\eta_s^{\omega}(s_k) = \eta_{sk}^{\omega} \quad \text{или} \quad M_s^{\omega}(s_k) = M_{sk}^{\omega}; \qquad \pi_s^{\omega}(s_k) = \pi_{sk}^{\omega} \quad \text{или} \quad \Pi_{ss}^{\omega}(s_k) = \Pi_{ssk}^{\omega};\\
&\psi^{\omega}(s_k) = \psi_k^{\omega} \quad \text{или} \quad T^{\omega}(s_k) = T_k^{\omega}; \qquad \pi_{\varphi}^{\omega}(s_k) = \pi_{\varphi k}^{\omega} \quad \text{или} \quad \Pi_{\varphi}^{\omega}(s_k) = \Pi_{\varphi k}^{\omega},
\end{aligned}\tag{19}$$

задаваемых на торце $s = s_k \quad \left(k = l, r\right)$.

Первое из уравнений равновесия (18) соответствует варьированию упрощенного лагранжиана для оболочки вращения по функции $\overline{w^{\omega}}$, второе — по функции $\overline{u^{\omega}}$, третье — по функции $\overline{\eta_s^{\omega}}$, четвёртое — по функции $\overline{\pi_s^{\omega}}$, пятое — по функции $\overline{\psi^{\omega}}$ и шестое — результат варьирования по функции $\overline{\pi_{\varphi}^{\omega}}$.

В соотношениях (18), (19) введены обобщённые усилия и моменты согласно формулам:

$$\begin{aligned}
&T_s^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}\sigma_s^{\omega}dz; \qquad T_{\varphi}^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}\sigma_{\varphi}^{\omega}dz; \qquad T^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}\tau_{s\varphi}^{\omega}dz;\\
&M_s^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}z\sigma_s^{\omega}dz; \qquad M_{\varphi}^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}z\sigma_{\varphi}^{\omega}dz; \qquad M^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}z\tau_{s\varphi}^{\omega}dz;\\
&\Gamma_s^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}\overline{f_s^{\omega}(z)}\gamma_{sz}^{\omega}dz; \quad \Gamma_{\varphi}^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}\overline{f_{\varphi}^{\omega}(z)}\gamma_{\varphi z}^{\omega}dz;\\
&\Pi_{ss}^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}\overline{\mu_s^{\omega}}\sigma_s^{\omega}dz; \qquad \Pi_{s\varphi}^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}\overline{\mu_s^{\omega}}\sigma_{\varphi}^{\omega}dz; \qquad \Pi_s^{\omega} = \int_{z_l}^{z_r}\overline{\mu_s^{\omega}}\tau_{s\varphi}^{\omega}dz;
\end{aligned}\tag{20}$$

$$\mathit{\Pi}^{\omega}_{\varphi s}=\int_{z_l}^{z_r}\overline{\mu^{\omega}_{\varphi}}\sigma^{\omega}_{s}dz;\qquad \mathit{\Pi}^{\omega}_{\varphi\varphi}=\int_{z_l}^{z_r}\overline{\mu^{\omega}_{\varphi}}\sigma^{\omega}_{\varphi}dz;\qquad \mathit{\Pi}^{\omega}_{\varphi}=\int_{z_l}^{z_r}\overline{\mu^{\omega}_{\varphi}}\tau^{\omega}_{s\varphi}dz.$$

Компоненты же Υ^{ω}_{s}, Υ^{ω}_{z}, Υ^{ω}_{q}, $\Upsilon^{\omega}_{\pi s}$, $\Upsilon^{\omega}_{\varphi}$, $\Upsilon^{\omega}_{\pi\varphi}$ обобщённого вектора усилий Υ следующим образом выражаются через нагрузки, действующие на оболочку:

$$\Upsilon^{\omega}_{z}=\int_{z_l}^{z_r}\left[F^{\omega}_{z}(z)-\frac{i\omega}{R}F^{\omega}_{\varphi}(z)\right]dz+\sigma^{\omega}_{rsz}-\sigma^{\omega}_{lsz}-\frac{i\omega}{R}\left(z_r\tau^{\omega}_{r\varphi z}-z_l\tau^{\omega}_{l\varphi z}\right);$$

$$\Upsilon^{\omega}_{s}(s)=\int_{z_l}^{z_r}F^{\omega}_{s}(z)dz+\tau^{\omega}_{rsz}-\tau^{\omega}_{lsz};\qquad \Upsilon^{\omega}_{q}(s)=\int_{z_l}^{z_r}zF^{\omega}_{s}(z)dz+z_r\tau^{\omega}_{rsz}-z_l\tau^{\omega}_{lsz};$$

$$\Upsilon^{\omega}_{\pi s}(s)=\int_{z_l}^{z_r}\overline{\mu^{\omega}_{s}(z)}F^{\omega}_{s}(z)dz+\overline{\mu^{\omega}_{s}(z_r)}\tau^{\omega}_{rsz}-\overline{\mu^{\omega}_{s}(z_l)}\tau^{\omega}_{lsz};\qquad \Upsilon^{\omega}_{\varphi}(s)=\int_{z_l}^{z_r}F^{\omega}_{\varphi}(z)dz+\tau^{\omega}_{r\varphi z}-\tau^{\omega}_{l\varphi z};$$

$$\Upsilon^{\omega}_{\pi\varphi}(s)=\int_{z_l}^{z_r}\overline{\mu^{\omega}_{\varphi}(z)}F^{\omega}_{\varphi}(z)dz+\overline{\mu^{\omega}_{\varphi}(z_r)}\tau^{\omega}_{r\varphi z}-\overline{\mu^{\omega}_{\varphi}(z_l)}\tau^{\omega}_{l\varphi z}.$$

Входящие в краевые условия величины Q^{ω}_{ks}, T^{ω}_{ks}, M^{ω}_{ks}, $\mathit{\Pi}^{\omega}_{kss}$, T^{ω}_{k}, $\mathit{\Pi}^{\omega}_{k\varphi}$ находятся по заданным торцевым и поверхностным нагрузкам. Например, если на торец $s=s_k$ $(k=l,r)$ действует усилие $\mathbf{F}^{s\omega}_{k}\left(z\right)=F^{s\omega}_{ks}(z)\cdot\mathbf{e}_s(s_k)+F^{s\omega}_{k\varphi}(z)\cdot\mathbf{e}_{\varphi}(s_k)+F^{s\omega}_{kz}(z)\cdot\mathbf{n}(s_k)$, то

$$Q^{\omega}_{ks}=\operatorname{sgn}(k)\int_{z_l}^{z_r}F^{s\omega}_{kz}(z)dz,\qquad T^{\omega}_{ks}=\operatorname{sgn}(k)\int_{z_l}^{z_r}F^{s\omega}_{ks}(z)dz,$$

$$M^{\omega}_{ks}=\operatorname{sgn}(k)\int_{z_l}^{z_r}zF^{s\omega}_{ks}(z)dz,\qquad \mathit{\Pi}^{\omega}_{ks}=\operatorname{sgn}(k)\int_{z_l}^{z_r}\mu^{\omega}_{s}(z)F^{s\omega}_{ks}(z)dz,$$

$$T^{\omega}_{k}=\operatorname{sgn}(k)\int_{z_l}^{z_r}F^{s\omega}_{k\phi}(z)dz,\qquad \mathit{\Pi}^{\omega}_{k\varphi}=\operatorname{sgn}(k)\int_{z_l}^{z_r}\mu^{\omega}_{\varphi}(z)F^{s\omega}_{k\varphi}(z)dz.$$

Величина $\operatorname{sgn}(k)$ определена в (7).

Соотношения (14)–(20) образуют линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 12-го порядка относительно шести искомых комплекснозначных функций $w^{\omega}(s)$, $u^{\omega}(s)$, $\eta^{\omega}_{s}(s)$, $\pi^{\omega}_{s}(s)$, $\psi^{\omega}(s)$, $\pi^{\omega}_{\varphi}(s)$. Если же перейти к вещественным искомым функциям, то порядок разрешающей системы обыкновенных дифференциальных уравнений будет равен 24, и в некоторых случаях он может быть понижен. Рассмотрим эти случаи.

Случай $\omega=0$ соответствует задаче определения осесимметричного напряжённо-деформированном состоянии замкнутой в окружном направлении оболочки вращения. При этом разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений распадается на две подсистемы [10], одна из которых имеет 8-й (вещественный) порядок и описывает изгиб оболочки, а другая — 4-й порядок и отвечает задаче кручения. Каждая из подсистем имеет по два первых интеграла, механический смысл которых разъясняется, например, в [1].

Случай $\omega=1$ в отечественной научной литературе называется обратно симметричным [7] и связывается с поведением оболочки вращения под действием ветровой нагрузки [1]. Разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет здесь 12-й (комплексный) порядок. Если при выводе разрешающих соотношений (20) не вводить упрощающие предположения 1 и 2, то можно было бы понизить комплексный порядок получающейся при этом системы на два [1]. В рассматриваемом упрощенном случае (при $\omega = 1$) понижение порядка также возможно, если при получении первых интегралов системы по-прежнему (см. Предположения) отождествлять A_s с единицей, а A_φ — с радиусом R.

5. Комплексная гамильтонова форма системы линейных дифференциальных уравнений статики упругой оболочки вращения

Система разрешающих соотношений статики замкнутых в окружном направлении упругих оболочек вращения, полученная в предыдущем разделе, сложна для аналитического исследования и громоздка для численного решения. Вопрос о наиболее рациональном выборе формы разрешающей системы дифференциальных уравнений, то есть вопрос о выборе искомых функций обсуждается, начиная с работ Мейснера, почти столетие [1], [7], [8]. Предлагаемая ниже векторно-матричная форма системы уравнений статики упругих оболочек вращения аналогична гамильтоновой форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений в лагранжевой механике системы материальных точек [2].

Как следует из предыдущего раздела, линейные дифференциальные уравнения, определяющие НДС оболочки вращения, являются условиями стационарности функционала Лагранжа Φ_ω, определённого в (9), по вектор-функции $\mathbf{v}^\omega \in \mathbf{C}^6$:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{v}^\omega(s)\right)^{\mathrm{T}} &= \left(v_1^\omega(s),\, v_2^\omega(s),\, v_3^\omega(s),\, v_4^\omega(s),\, v_5^\omega(s),\, v_6^\omega(s)\right) = \\ &= \left(w^\omega(s), u^\omega(s), \eta_s^\omega(s), \pi_s^\omega(s), \psi^\omega(s), \pi_\varphi^\omega(s)\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Компоненты $v_1^\omega, v_2^\omega, v_3^\omega$ должны удовлетворять первому из ограничений (14), которое здесь представим в виде

$$\frac{dv_1^\omega(s)}{ds} + \left(\mathbf{v}^\omega(s),\, \mathbf{l}_0^\omega(s)\right) = 0, \tag{22}$$

где $\mathbf{l}_0^\omega$ — вещественный вектор из $\mathbf{R}^6$: $\left(\mathbf{l}_0^\omega(s)\right)^{\mathrm{T}} = \left(0,\, B_s(s),\, 1,\, 0,\, 0,\, 0\right)$.

Непосредственно из определения функционала Лагранжа и соотношений (15) следует, что функция Лагранжа $L^\omega(d\mathbf{v}^\omega/ds, \mathbf{v}^\omega)$ квадратична по совокупности переменных $d\mathbf{v}^\omega/ds$ и $\mathbf{v}^\omega$, но не зависит от dv_1^ω/ds. Следовательно, функцию Лагранжа упругой оболочки вращения можно представить в виде:

$$\begin{aligned}L^\omega\!\left(\frac{d}{ds}\mathbf{v}^\omega, \mathbf{v}^\omega\right) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_{11}^\omega \frac{d}{ds}\mathbf{v}_1^\omega, \frac{d}{ds}\mathbf{v}_1^\omega\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_{22}^\omega \mathbf{v}^\omega, \mathbf{v}^\omega\right) + \\ &+ \mathrm{Re}\left[\left(\mathbf{L}_{12}^\omega \mathbf{v}^\omega, \frac{d}{ds}\mathbf{v}_1^\omega\right) + \left(\mathbf{l}_1^\omega, \frac{d}{ds}\mathbf{v}_1^\omega\right) + \left(\mathbf{l}_2^\omega, \mathbf{v}^\omega\right)\right];\end{aligned} \tag{23}$$

здесь $\mathbf{v}_1^\omega$ — вектор-функция со значениями в $\mathbf{C}^5$, $(\mathbf{v}_1^\omega(s))^{\mathrm{T}} = \left(v_2^\omega(s), v_3^\omega(s), v_4^\omega(s), v_5^\omega(s), v_6^\omega(s)\right)$; $\mathbf{L}_1^\omega$ и $\mathbf{L}_2^\omega$ — самосопряжённые матрицы порядков 5 и 6 соответственно, а $\mathbf{l}_1^\omega$ и $\mathbf{l}_2^\omega$ — векторы размерностей 5 и 6, полностью определяемые действующими на оболочку нагрузками.

Поскольку в рассматриваемом случае функция Лагранжа — это энергия деформации, приходящаяся на единицу длины меридиана оболочки, и, в силу её механического смысла, являющаяся величиной неотрицательной, то самосопряжённая матрица

$$\mathbf{L}^\omega = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11}^\omega & \mathbf{L}_{12}^\omega \\ \left(\mathbf{L}_{12}^\omega\right)^* & \mathbf{L}_{22}^\omega \end{pmatrix} \tag{24}$$

квадратичной формы L неотрицательно определена.

Используя метод множителей Лагранжа [11], при ограничении (22) получим условие стационарности для функционала Φ_ω. Отбросим в (9) слагаемые, связанные с торцевыми нагрузками, поскольку они не влияют на вид разрешающих уравнений внутри отрезка $[s_l, s_r]$, и запишем выражение для вариации Φ_ω через функцию Лагранжа (23):

$$\delta\Phi_\omega = \delta\int_{s_l}^{s_r}\left\{L\left(\frac{d\mathbf{v}^\omega}{ds},\mathbf{v}^\omega\right)+\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{dv_1^\omega}{ds}+(\mathbf{v}^\omega,\mathbf{l}_0^\omega)\right]\overline{q_1^\omega}\right\}\right\}ds =$$

$$= \mathrm{Re}\int_{s_l}^{s_r}\left\{\left(-\frac{d}{ds}q^\omega+(L_{12}^\omega)^*\frac{d}{ds}v_1^\omega+L_{22}^\omega v^\omega+q_1^\omega l_0^\omega+l_2^\omega,\delta v^\omega\right)+\left[\frac{dv_1^\omega}{ds}+(\mathbf{v}^\omega,\mathbf{l}_0^\omega)\right]\delta\overline{q_1^\omega}\right\}ds.$$

Здесь $q_1^\omega(s)$ — множитель Лагранжа, связанный с ограничением (22); $\mathbf{q}^\omega(s)$ — вектор-функция со значениями в $\mathbf{C}^6$: $\left(\mathbf{q}^\omega(s)\right)^{\mathrm{T}} = \left(q_1^\omega(s), \left(\mathbf{q}_1^\omega(s)\right)^{\mathrm{T}}\right) = \left(q_1^\omega(s), q_2^\omega(s), \ldots, q_6^\omega(s)\right)$; $\mathbf{q}_1^\omega(s)$ — вектор из $\mathbf{C}^5$, определяемый выражением $\mathbf{q}_1^\omega(s) = \mathbf{L}_{11}^\omega(s)\dfrac{d}{ds}\mathbf{v}_1^\omega(s) + \mathbf{L}_{12}^\omega(s)\mathbf{v}^\omega(s) + \mathbf{l}_1^\omega(s)$; сравнив это выражение с соотношениями (17) и (18), получим следующее соответствие между усилиями, моментами и вектором $\mathbf{q}^\omega(s)$:

$$\left(\mathbf{q}^\omega\right)^{\mathrm{T}} = \left(RQ_s^\omega,\ RT_s^\omega,\ RM_s^\omega,\ R\Pi_{ss}^\omega,\ R^2T^\omega,\ R\Pi_{\varphi\varphi}^\omega\right). \tag{25}$$

Разрешив последние соотношения относительно $\left(\mathbf{v}_1^\omega\right)'$ и подставив найденные выражения в вариацию функционала Лагранжа, после приравнивания её нулю придём к системе уравнений:

$$\frac{dv_1^\omega}{ds} = -(\mathbf{v}^\omega,\mathbf{l}_0^\omega);$$

$$\frac{d\mathbf{v}_1^\omega}{ds} = -(\mathbf{L}_{11}^\omega)^{-1}\mathbf{L}_{12}^\omega\mathbf{v}^\omega + (\mathbf{L}_{11}^\omega)^{-1}\mathbf{q}_1^\omega - (\mathbf{L}_{11}^\omega)^{-1}\mathbf{l}_1^\omega;$$

$$\frac{d\mathbf{q}^\omega}{ds} = (\mathbf{L}_{22}^\omega - (\mathbf{L}_{12}^\omega)^*(\mathbf{L}_{11}^\omega)^{-1}\mathbf{L}_{12}^\omega)\mathbf{v}^\omega + (\mathbf{L}_{12}^\omega)^*(\mathbf{L}_{11}^\omega)^{-1}\mathbf{q}_1^\omega + \mathbf{l}_0^\omega q_1^\omega + \mathbf{l}_2^\omega - (\mathbf{L}_{12}^\omega)^*(\mathbf{L}_{11}^\omega)^{-1}\mathbf{l}_1^\omega.$$

Для того чтобы явно выделить характерные значения величин, определяющих коэффициенты этой системы уравнений, перейдём к безразмерным переменным. Если R_* — характерный линейный размер оболочки, $D_{*\sigma}$ — характерная жесткость оболочки в плоскости (s,φ), $D_{*\tau}=\delta D_{*\sigma}$ — характерная сдвиговая жесткость оболочки в плоскостях (s,z) и (φ,z), $\varepsilon R_*=z_r-z_l$ — толщина оболочки, то безразмерные переменные и функции будут следующими:

$$\begin{aligned}
&t=s/R_*; \qquad \nu=z/(z_r-z_l); \qquad r(t)=R(s)/R_*; \qquad b_\alpha(t)=B_\alpha(s)R_*;\\
&w(t)=w^\omega(s)/(z_r-z_l); \quad u(t)=u^\omega(s)/(z_r-z_l); \quad \eta(t)=\eta_s^\omega(s); \quad \psi(t)=\psi_s^\omega(s)/\varepsilon;\\
&\pi_\alpha(t)=\pi_\alpha^\omega(s)/D_{*\tau}; \qquad D_{\alpha\beta}=D_{\alpha\beta}/D_{*\sigma}; \qquad D_\gamma=D_\gamma/D_{*\sigma}; \qquad D_\alpha=D_\alpha/D_{*\tau};\\
&f_\alpha(\nu)=f_\alpha^\omega(z), \qquad \mu_\alpha(\nu)=\mu_\alpha^\omega(z)\frac{D_{*\tau}}{z_r-z_l}=\int_0^\nu\frac{f_\alpha(\nu)}{D_\alpha}d\nu \qquad (\alpha=s,\varphi);\\
&\tau_{k\alpha}(t,\nu)=\tau_{k\alpha z}^\omega(s,z)/D_{*\tau}; \qquad \sigma_{k\alpha}(t,\nu)=\sigma_{k\alpha z}^\omega(s,z)/D_{*\sigma} \qquad (k=l,r);\\
&F_m(t,\nu)=F_m^\omega(s,z)\frac{R_*}{\varepsilon D_{*\sigma}} \qquad m=s,\varphi,z.
\end{aligned} \tag{26}$$

По аналогии с (21) введём безразмерные вектор-функции $\mathbf{v}(t)\in\mathbf{C}^6$ и $\mathbf{v}_1(t)\in\mathbf{C}^5$:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{v}(t)\right)^{\mathrm{T}}=\left(w(t),u(t),\eta(t),\pi_s(t),\psi(t),\pi_\varphi(t)\right)=\\
&=\left(v_1(t),v_2(t),v_3(t),v_4(t),v_5(t),v_6(t)\right)=\left(v_1(t),\left(\mathbf{v}_1(t)\right)^{\mathrm{T}}\right);\\
&\left(\mathbf{v}_1(t)\right)^{\mathrm{T}}=\left(v_2(t),v_3(t),v_4(t),v_5(t),v_6(t)\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

Функция $\mathbf{v}(t)$ должна удовлетворять безразмерному аналогу первого из равенств (14), которое представим в виде

$$\frac{dv_1(t)}{ds}+(\,\mathbf{v}(t),\mathbf{l}_0(t)\,)=0, \tag{28}$$

где $\mathbf{l}_0$ — вещественный вектор из $\mathbf{R}^6$: $\left(\mathbf{l}_0(t)\right)^{\mathrm{T}}=\left(0,\ b_s(t),\ \varepsilon^{-1},\ 0,\ 0,\ 0\right)$.

В качестве функции Лагранжа возьмём обезразмеренную функцию (23)

$$L\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v},\mathbf{v}\right)=L^\omega\left(\frac{d}{ds}\mathbf{v}^\omega,\mathbf{v}^\omega\right)\Big/\left(D_{*\sigma}\varepsilon^3R_*^2\right)$$

Тогда функционал Лагранжа (9) приобретёт вид:

$$\Phi_\omega\left(\mathbf{U}^\omega\right)=\Phi(\mathbf{v})\cdot\left(D_{*\sigma}(R_*\varepsilon)^3\right), \tag{29}$$

где

$$\Phi(\mathbf{v})=\int_{t_l}^{t_r}L\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dt,$$

$$L\left(\frac{d}{ds}\mathbf{v},\mathbf{v}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_{11}\frac{d}{ds}\mathbf{v}_1,\frac{d}{ds}\mathbf{v}_1\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_{22}\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+$$
$$+\mathrm{Re}\left[\left(\mathbf{L}_{12}\mathbf{v},\frac{d}{ds}\mathbf{v}_1\right)+\left(\mathbf{l}_1,\frac{d}{ds}\mathbf{v}_1\right)+\left(\mathbf{l}_2,\mathbf{v}\right)\right].$$

Введём следующие обозначения для моментов от функции $F(\nu)$:

$$F^0=\int_{\nu_l}^{\nu_r}F(\nu)d\nu;\quad F^{\nu}=\int_{\nu_l}^{\nu_r}\nu F(\nu)d\nu;\quad F^{\nu\nu}=\int_{\nu_l}^{\nu_r}\nu^2F(\nu)d\nu;$$
$$F^{\alpha}=\int_{\nu_l}^{\nu_r}\overline{\mu_\alpha(\nu)}F(\nu)d\nu;\quad F^{\alpha\beta}=\int_{\nu_l}^{\nu_r}\mu_\alpha(\nu)\overline{\mu_\beta(\nu)}F(\nu)d\nu;$$
$$F^{\nu\alpha}=\int_{\nu_l}^{\nu_r}\nu\overline{\mu_\alpha(\nu)}F(\nu)d\nu;\quad F_\alpha=\int_{\nu_l}^{\nu_r}\frac{\overline{f_\alpha(\nu)}}{D_\alpha}F(\nu)d\nu\quad(\alpha,\beta=s,\varphi).$$

Непосредственные вычисления дают следующие выражения элементов матриц $\mathbf{L}_{11},\mathbf{L}_{12},\mathbf{L}_{22}$ через геометрические характеристики оболочки и моменты от её жесткостей — функций нормальной координаты ν:

$\mathbf{L}_{11}=(\mathbf{L}_{11})^*$:

$$L_{11}^{11}=r(t)D_{ss}^0,\quad L_{11}^{12}=r(t)D_{ss}^{\nu},\quad L_{11}^{13}=r(t)D_{ss}^{s},\quad L_{11}^{14}=L_{11}^{15}=0,$$
$$L_{11}^{22}=r(t)D_{ss}^{\nu\nu},\quad L_{11}^{23}=r(t)D_{ss}^{\nu s},\quad L_{11}^{24}=L_{11}^{25}=0,$$
$$L_{11}^{33}=r(t)D_{ss}^{ss},\quad L_{11}^{34}=L_{11}^{35}=0,$$
$$L_{11}^{44}=r^3(t)D_{\gamma}^0,\quad L_{11}^{45}=r(t)^2D_{\gamma}^{\varphi},$$
$$L_{11}^{55}=r(t)D_{\gamma}^{\varphi\varphi};$$

$\mathbf{L}_{12}=(\mathbf{L}_{12})^*$:

$$L_{12}^{11}=-r(t)b_s(t)D_{ss}^0-r(t)b_\varphi(t)D_{s\varphi}^0+\frac{\varepsilon\omega^2}{r(t)}D_{s\varphi}^{\nu},\quad L_{12}^{21}=-r(t)b_s(t)D_{ss}^{\nu}-r(t)b_\varphi(t)D_{s\varphi}^{\nu}+\frac{\varepsilon\omega^2}{r(t)}D_{s\varphi}^{\nu\nu},$$
$$L_{12}^{31}=-r(t)b_s(t)D_{ss}^{s}-r(t)b_\varphi(t)D_{s\varphi}^{s}+\frac{\varepsilon\omega^2}{r(t)}D_{s\varphi}^{\nu s},\quad L_{12}^{41}=i2\dot r(t)\varepsilon\omega D_{\gamma}^{\nu},\quad L_{12}^{51}=i2\frac{\dot r(t)}{r(t)}\varepsilon\omega D_{\gamma}^{\nu\varphi},$$
$$L_{12}^{12}=\dot rD_{s\varphi}^0,\ L_{12}^{13}=\dot rD_{s\varphi}^{\nu},\ L_{12}^{14}=\dot r\overline{D_{s\varphi}^{s}},\ L_{12}^{15}=i\omega rD_{s\varphi}^0,\ L_{12}^{16}=i\omega\overline{D_{s\varphi}^{\varphi}},$$
$$L_{12}^{22}=\dot rD_{s\varphi}^{\nu},\ L_{12}^{23}=\dot rD_{s\varphi}^{\nu\nu},\ L_{12}^{24}=\dot r\overline{D_{s\varphi}^{\nu s}},\ L_{12}^{25}=i\omega rD_{s\varphi}^{\nu},\ L_{12}^{26}=i\omega\overline{D_{s\varphi}^{\nu\varphi}},$$
$$L_{12}^{32}=\dot rD_{s\varphi}^{s},\ L_{12}^{33}=\dot rD_{s\varphi}^{\nu s},\ L_{12}^{34}=\dot rD_{s\varphi}^{ss},\ L_{12}^{35}=i\omega rD_{s\varphi}^{s},\ L_{12}^{36}=i\omega\overline{D_{s\varphi}^{s\varphi}},\tag{31}$$
$$L_{12}^{42}=i\omega rD_{\gamma}^0,\ L_{12}^{43}=i2\omega rD_{\gamma}^{\nu},\ L_{12}^{44}=i\omega r\overline{D_{\gamma}^{s}},\ L_{12}^{45}=0,\ L_{12}^{46}=-r\dot r\overline{D_{\gamma}^{\varphi}},$$
$$L_{12}^{52}=i\omega D_{\gamma}^{\varphi},\ L_{12}^{53}=i2\omega D_{\gamma}^{\nu\varphi},\ L_{12}^{54}=i\omega D_{\gamma}^{s\varphi},\ L_{12}^{55}=0,\ L_{12}^{56}=-\dot rD_{\gamma}^{\varphi\varphi};$$

$\mathbf{L}_{22}=(\mathbf{L}_{22})^*$:

$$L_{22}^{11}=rb_s^2D_{ss}^0+2rb_sb_\varphi D_{s\varphi}^0+rb_\varphi^2D_{\varphi\varphi}^0-2\frac{\varepsilon\omega^2b_s}{r}D_{s\varphi}^{\nu}-2\frac{\varepsilon\omega^2b_\varphi}{r}D_{\varphi\varphi}^{\nu}+\frac{\varepsilon^2\omega^4}{r^3}D_{\varphi\varphi}^{\nu\nu}+4\frac{\varepsilon^2\omega^2(\dot r)^2}{r^3}D_{\gamma}^{\nu\nu},$$

$$L_{22}^{12} = -\dot{r}b_s D_{s\varphi}^0 - \dot{r}b_\varphi D_{\varphi\varphi}^0 + \frac{\varepsilon\omega^2\dot{r}}{r^2} D_{\varphi\varphi}^\nu + 2\frac{\varepsilon\omega^2\dot{r}}{r^2} D_\gamma^\nu,$$

$$L_{22}^{13} = -\dot{r}b_s D_{s\varphi}^\nu - \dot{r}b_\varphi D_{\varphi\varphi}^\nu + \frac{\varepsilon\omega^2\dot{r}}{r^2} D_{\varphi\varphi}^{\nu\nu} + 4\frac{\varepsilon\omega^2\dot{r}}{r^2} D_\gamma^{\nu\nu},$$

$$L_{22}^{14} = -\dot{r}b_s D_{s\varphi}^s - \dot{r}b_\varphi D_{\varphi\varphi}^s + \frac{\varepsilon\omega^2\dot{r}}{r^2} D_{\varphi\varphi}^{\nu s} + 2\frac{\varepsilon\omega^2\dot{r}}{r^2} D_\gamma^{\nu s},$$

$$L_{22}^{15} = ir\omega b_s D_{s\varphi}^0 + ir\omega b_\varphi D_{\varphi\varphi}^0 - i\frac{\varepsilon\omega^3}{r} D_{\varphi\varphi}^\nu,$$

$$L_{22}^{16} = i\omega b_s D_{s\varphi}^\varphi + i\omega b_\varphi D_{\varphi\varphi}^\varphi - i\frac{\varepsilon\omega^3}{r^2} D_{\varphi\varphi}^{\nu\varphi} - i\frac{2\varepsilon\omega(\dot{r})^2}{r^2} D_\gamma^{\nu\varphi},$$

$$L_{22}^{22} = \frac{(\dot{r})^2}{r} D_{\varphi\varphi}^0 + \frac{\omega^2}{r} D_\gamma^0, \qquad L_{22}^{23} = \frac{(\dot{r})^2}{r} D_{\varphi\varphi}^\nu + 2\frac{\omega^2}{r} D_\gamma^\nu, \qquad L_{22}^{24} = \frac{(\dot{r})^2}{r} D_{\varphi\varphi}^s + 2\frac{\omega^2}{r} D_\gamma^s,$$

$$L_{22}^{25} = -i\omega\dot{r}D_{\varphi\varphi}^0, \qquad L_{22}^{26} = -i\frac{\omega\dot{r}}{r} D_{\varphi\varphi}^\varphi - i\frac{\omega\dot{r}}{r} D_\gamma^\varphi,$$

$$L_{22}^{33} = \frac{\dot{r}^2}{r} D_{\varphi\varphi}^{\nu\nu} + 4\frac{\omega^2}{r} D_\gamma^{\nu\nu}, \qquad L_{22}^{34} = \frac{\dot{r}^2}{r} D_{\varphi\varphi}^{\nu s} + 2\frac{\omega^2}{r} D_\gamma^{\nu s},$$

$$L_{22}^{35} = -i\omega\dot{r}D_{\varphi\varphi}^\nu, \qquad L_{22}^{36} = -i\frac{\omega\dot{r}}{r} D_{\varphi\varphi}^{\nu\varphi} - i2\frac{\omega\dot{r}}{r} D_\gamma^{\nu\varphi},$$

$$L_{22}^{44} = \frac{\dot{r}^2}{r} D_{\varphi\varphi}^{ss} + \frac{\omega^2}{r} D_\gamma^0 + \frac{r\delta}{\varepsilon^2} f_{ss}, \qquad L_{22}^{45} = -i\omega\dot{r}D_{\varphi\varphi}^s, \qquad L_{22}^{46} = -i\omega\frac{\dot{r}}{r} D_{\varphi\varphi}^{s\varphi} - i\frac{\omega\dot{r}}{r} D_\gamma^{s\varphi},$$

$$L_{22}^{55} = r\omega^2 D_{\varphi\varphi}^0, \qquad L_{22}^{56} = \omega^2 D_{\varphi\varphi}^\varphi, \qquad L_{22}^{66} = \frac{\omega^2}{r} D_{\varphi\varphi}^{\varphi\varphi} + \frac{\dot{r}^2}{r} D_\gamma^{\varphi\varphi} + \frac{r\delta}{\varepsilon^2} f_{\varphi\varphi};$$

здесь и далее через $\dot{r}$ обозначается производная от функции $r(t)$ по t.

Для того чтобы выразить векторы $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ через действующие нагрузки и температурные деформации, введём в рассмотрение «начальные» напряжения и деформации:

$$\begin{aligned}
&\tau_{*\alpha}(t,\nu) = \tau_{l\alpha} + (\nu - \nu_l)(\tau_{r\alpha} - \tau_{l\alpha}); && \lambda_\alpha(t,\nu) = \int_0^\nu \frac{\tau_{*\alpha}(t,\zeta)}{D_\alpha} d\zeta \quad (\alpha = s,\varphi);\\
&\varepsilon_{*s}(t,\nu) = \frac{\partial}{\partial t}\lambda_s - \frac{\varepsilon_{s\theta}}{\varepsilon}; && \varepsilon_{*\varphi}(t,\nu) = \frac{\dot{r}}{r}\lambda_s - \frac{\varepsilon_{\varphi\theta}}{\varepsilon} + i\frac{\omega}{r}\lambda_\varphi;\\
&\gamma_*(t,\nu) = r\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda_\varphi}{r}\right) + i\frac{\omega}{r}\lambda_s; && \sigma_{*s}(t,\nu) = D_{ss}\varepsilon_{*s}(t,\nu) + D_{s\varphi}\varepsilon_{*\varphi}(t,\nu);\\
&\sigma_{*\varphi}(t,\nu) = D_{s\varphi}\varepsilon_{*s}(t,\nu) + D_{\varphi\varphi}\varepsilon_{*\varphi}(t,\nu); && \tau_*(t,\nu) = D_\gamma\gamma_*(t,\nu).
\end{aligned} \tag{32}$$

Тогда компоненты вектора $\mathbf{l}_1$ примут следующий вид:

$$l_{11} = r\sigma_{*s}^0; \quad l_{12} = r\sigma_{*s}^\nu; \quad l_{13} = r\sigma_{*s}^s; \quad l_{14} = r^2\tau_*^0; \quad l_{15} = r\tau_*^\varphi. \tag{33}$$

Компоненты вектора $\mathbf{l}_2$ связываются с заданными нагрузками более сложными соотношениями:

$$l_{21} = -rF_z^0 - rb_s\sigma_{*s}^0 - rb_\varphi\sigma_{*\varphi}^0 + \frac{\varepsilon\omega^2}{r}\sigma_{*\varphi}^\nu - \frac{r}{\varepsilon}\left(\sigma_{rz} - \sigma_{lz}\right) - i\frac{2\varepsilon\omega\dot{r}}{r}\tau_*^\nu;$$

$$
\begin{aligned}
&l_{22}=-rF_s^0+\dot r\sigma_{*\varphi}^0-\frac{\delta r}{\varepsilon}\left(\tau_{rs}-\tau_{ls}\right)-i\omega\tau_*^0;\\
&l_{23}=-rF_s^\nu+\dot r\sigma_{*\varphi}^\nu-\frac{\delta r}{\varepsilon}\left(\nu_r\tau_{rs}-\nu_l\tau_{ls}\right)-i2\omega\tau_*^\nu;\\
&l_{24}=-rF_s^s+\dot r\sigma_{*\varphi}^s+\frac{r\delta}{\varepsilon^2}\tau_{*ss}-\frac{\delta r}{\varepsilon}\left(\overline{\mu_s(\nu_r)}\tau_{rs}-\overline{\mu_s(\nu_l)}\tau_{ls}\right)-i\omega\tau_*^s;\\
&l_{25}=-r^2F_\varphi^0-\frac{\delta r^2}{\varepsilon}\left(\tau_{r\varphi}-\tau_{l\varphi}\right)-i\omega r\sigma_{*\varphi}^0;\\
&l_{26}=-rF_\varphi^\varphi-\dot r\tau_*^\varphi+\frac{r\delta}{\varepsilon^2}\tau_{*\varphi\varphi}-\frac{\delta r}{\varepsilon}\left(\overline{\mu_\varphi(\nu_r)}\tau_{r\varphi}-\overline{\mu_\varphi(\nu_l)}\tau_{l\varphi}\right)-i\omega\sigma_{*\varphi}^\varphi.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Предположив, что матрица $\mathbf{L}_{11}$ невырождена, после варьирования функционала (29) по $\mathbf{v}$ придём к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}=\mathbf{H}(t)\mathbf{y}(t)+\mathbf{h}(t), \tag{35}
$$

где матрица $\mathbf{H}$ и векторы $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$ имеют следующий блочный вид:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_{vv} & \mathbf{H}_{vq}\\ \mathbf{H}_{qv} & \mathbf{H}_{qq}\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h}=\begin{pmatrix}\mathbf{h}_v\\ \mathbf{h}_q\end{pmatrix};\\
&\mathbf{h}_v=\begin{pmatrix}0\\ -(\mathbf{L}_{11})^{-1}\mathbf{l}_1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h}_q=\mathbf{l}_2-(\mathbf{L}_{12})^*(\mathbf{L}_{11})^{-1}\mathbf{l}_1;\\
&\mathbf{H}_{qv}=\mathbf{L}_{22}-(\mathbf{L}_{12})^*(\mathbf{L}_{11})^{-1}\mathbf{L}_{12}, \quad \mathbf{H}_{qq}=\left(\mathbf{l}_0(\mathbf{L}_{12})^*(\mathbf{L}_{11})^{-1}\right);\\
&\mathbf{H}_{vv}=\begin{pmatrix}-(\mathbf{l}_0)^{\mathrm{T}}\\ -(\mathbf{L}_{11})^{-1}\mathbf{L}_{12}\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{H}_{vq}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (\mathbf{L}_{11})^{-1}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Теперь докажем, что самосопряжённая матрица $\mathbf{L}_{11}$ положительно определена, а потому невырождена. В силу (31) и обозначений (30) непосредственные вычисления значения квадратичной формы $\left(\mathbf{L}_{11}\mathbf{c},\mathbf{c}\right)$ с матрицей $\mathbf{L}_{11}$ на векторе $\mathbf{c}\in\mathbf{C}^5$ дают для $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ соотношение

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{L}_{11}\mathbf{c},\mathbf{c}\right)&=r(t)\Big\{\Big(D_{ss}^0c_1\overline{c_1}+D_{ss}^{\nu\nu}c_2\overline{c_2}+D_{ss}^{ss}c_3\overline{c_3}+r^2D_\gamma^0c_4\overline{c_4}+\\
&+D_\gamma^{\varphi\varphi}c_5\overline{c_5}+2\mathrm{Re}\Big(D_{ss}^\nu c_1\overline{c_2}+D_{ss}^sc_1\overline{c_3}+D_{ss}^{\nu s}c_2\overline{c_3}+rD_\gamma^\varphi c_4\overline{c_5}\Big)\Big)\Big\}=\\
&=r(t)\int_{\nu_l}^{\nu_r}\left\{D_{ss}\left|c_1+c_2\nu+c_3\mu_s(\nu)\right|^2+D_\gamma\left|c_5r(t)+c_6\mu_\varphi(\nu)\right|^2\right\}d\nu>0,
\end{aligned}
$$

поскольку $\mu_s(\nu)$, ν и функция, тождественно равная 1, линейно независимы на отрезке $\left[\nu_l,\nu_r\right]$; здесь $(\mathbf{u},\mathbf{c})$ — скалярное произведение векторов эрмитового пространства $\mathbf{C}^5$. Но полученное неравенство означает положительную определённость квадратичной формы $\left(\mathbf{L}_{11}\mathbf{c},\mathbf{c}\right)$, что эквивалентно положительной определённости матрицы $\mathbf{L}_{11}$.

Поэтому блок $\mathbf{H}_{vq}$ матрицы $\mathbf{H}$ неотрицательно определён. Покажем, что и блок $\mathbf{H}_{qv}$ неотрицателен.

В силу (24), матрица $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ (\mathbf{L}_{12})^* & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix}$ неотрицательно определена, а потому для любых $\mathbf{c}_1 \in \mathbf{C}^5$ и $\mathbf{c}_2 \in \mathbf{C}^6$ неотрицательна и квадратичная функция $L(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = (\mathbf{L}_{11}\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1) + (\mathbf{L}_{12}\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1) + (\mathbf{L}_{12}^*\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) + (\mathbf{L}_{22}\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2)$. Но для произвольного вектора $\mathbf{c} \in \mathbf{C}^6$ имеем $(\mathbf{H}_{qv}\mathbf{c}, \mathbf{c}) = (\mathbf{L}_{22}\mathbf{c}, \mathbf{c}) - (\mathbf{L}_{12}^*(\mathbf{L}_{11})^{-1}\mathbf{L}_{12}\mathbf{c}, \mathbf{c}) = L(-(\mathbf{L}_{11})^{-1}\mathbf{L}_{12}\mathbf{c}, \mathbf{c})$, что и означает неотрицательную определённость матрицы H_{qv}.

Связь между безразмерным вектором обобщённых усилий $\mathbf{q}$ и введёнными в (20) усилиями и моментами восстанавливается с помощью соотношений (25):

$$\begin{aligned} &Q_s^{\omega}(s) = D_{*\sigma} R_*^2 \varepsilon^2 \times \frac{q_1(t)}{r(t)}; && T_s^{\omega}(s) = D_{*\sigma} R_*^2 \varepsilon^2 \times \frac{q_2(t)}{r(t)}; \\ &M_s^{\omega}(s) = D_{*\sigma} R_*^2 \varepsilon^3 \times \frac{q_3(t)}{r(t)}; && \Pi_s^{\omega}(s) = \delta R_*^2 \varepsilon^3 \times \frac{q_4(t)}{r(t)}; \\ &T^{\omega}(s) = D_{*\sigma} R_* \varepsilon^2 \times \frac{q_5(t)}{r^2(t)}; && \Pi_{\varphi}^{\omega}(s) = \delta R_*^2 \varepsilon^3 \times \frac{q_6(t)}{r(t)}. \end{aligned} \tag{37}$$

Эти выражения и формулы «перехода» (26) позволяют «замкнуть» систему (35) краевыми условиями типа (19): на каждом из торцов $t = t_k$ $(k = l, r)$ и для каждого $j = 1, ..., n$ $(n = 6)$ задаётся одно из двух краевых условий: $v_j(t_k) = v_{jk}$ или $q_j(t_k) = q_{jk}$, где v_{jk}, q_{jk} — заданные величины.

Непосредственно из соотношений (36) следует, что для блоков матрицы $\mathbf{H}$ справедливы соотношения

$$\mathbf{H}_{vv} = -\mathbf{H}_{qq}^*, \quad \mathbf{H}_{vq} = \mathbf{H}_{vq}^*, \quad \mathbf{H}_{qv} = \mathbf{H}_{qv}^*, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{vv} & \mathbf{H}_{vq} \\ \mathbf{H}_{qv} & \mathbf{H}_{qq} \end{pmatrix},$$

которые эквивалентны одному матричному равенству:

$$\mathbf{J}_n \mathbf{H} + \mathbf{H}^* \mathbf{J}_n = \mathbf{0}, \tag{38}$$

где $n = 6$, $\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Здесь $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица размерности n. Напомним, что комплекснозначная матрица $\mathbf{H}$, имеющая размерность $2n \times 2n$, называется гамильтоновой [2], если для неё справедливо равенство (38). В свою очередь, система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений будет гамильтоновой [2], если гамильтонова её матрица.

Гамильтоновы системы уравнений обладают рядом специфических свойств, которые существенно облегчают их численное и аналитическое исследование. Однако комплексная форма гамильтоновых систем не всегда удобна для их приближённого численного решения, поскольку связана с арифметическими операциями над комплексными числами. Поэтому приведём одну из возможных вещественных форм исходной комплексной гамильтоновой системы уравнений (35). Для этого рассмотрим вещественные векторы $\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t) \in \mathbf{R}^{24}$ и матрицу $\mathbf{\Gamma}$ с размерностью 24×24, которые связаны с векторами $\mathbf{y}(t), \mathbf{h}(t) \in \mathbf{C}^{12}$ и матрицей $\mathbf{H}$ из (36) соотношениями:

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{v}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{v}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{q}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u(t) \\ \mathbf{r}_p(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_u(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{h}_v) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{h}_v) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_p(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{h}_q) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{h}_q) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{uu} & \mathbf{\Gamma}_{up} \\ \mathbf{\Gamma}_{pu} & \mathbf{\Gamma}_{pp} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{\Gamma}_{uu} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{H}_{vv}) & -\mathrm{Im}(\mathbf{H}_{vv}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{H}_{vv}) & \mathrm{Re}(\mathbf{H}_{vv}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_{up} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{H}_{vq}) & -\mathrm{Im}(\mathbf{H}_{vq}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{H}_{vq}) & \mathrm{Re}(\mathbf{H}_{vq}) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{\Gamma}_{pu} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{H}_{qv}) & -\mathrm{Im}(\mathbf{H}_{qv}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{H}_{qv}) & \mathrm{Re}(\mathbf{H}_{qv}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_{pp} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{H}_{qq}) & -\mathrm{Im}(\mathbf{H}_{qq}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{H}_{qq}) & \mathrm{Re}(\mathbf{H}_{qq}) \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{39}$$

Тогда, в силу (35), вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t), \tag{40}$$

причём блоки $\mathbf{\Gamma}_{up}$ и $\mathbf{\Gamma}_{pu}$ матрицы $\mathbf{\Gamma}$ неотрицательно определены, а сама она удовлетворяет матричному соотношению

$$\mathbf{J\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} = \mathbf{0}, \tag{41}$$

где $\mathbf{J}$ — любая вещественная матрица 24×24 вида $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\mathbf{E}_{12} - \beta\mathbf{J}_6 \\ \alpha\mathbf{E}_{12} + \beta\mathbf{J}_6 & 0 \end{pmatrix}$.

Это означает, что вещественная система обыкновенных дифференциальных уравнений (40) является гамильтоновой, обладающей дополнительной симметрией.

6. Гамильтонова форма уравнений статики тонкой ортотропной оболочки вращения при осесимметричном нагружении

Важный частный случай НДС оболочки вращения возникает при осесимметричном нагружении. Как было отмечено в конце 4-го раздела, в этом случае исходная краевая задача распадается на две — задачу кручения и задачу изгиба. При $\omega = 0$ из соотношений (33)–(36) следует, что одна из систем связана с определением неизвестных вещественных функций v_1, v_2, v_3, v_4 и q_1, q_2, q_3, q_4 (с решением задачи изгиба), а другая — с поиском вещественных функций v_5, v_6 и q_5, q_6 (с решением задачи кручения).

Непосредственные вычисления в случае задачи кручения приводят к следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{y}_{tor}(t)}{dt} = \mathbf{H}_{tor}(t)\mathbf{y}_{tor}(t) + \mathbf{h}_{tor}(t), \tag{42}$$

где

$$\mathbf{y}_{tor}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}_{tor}\\ \mathbf{q}_{tor}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{v}_{tor}=\begin{pmatrix}\psi(t)\\ \pi_\varphi(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}_{tor}=\begin{pmatrix}r^2T(t)\\ r\mathit{\Pi}_\varphi(t)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{tor}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_{vv}^{tor} & \mathbf{H}_{vq}^{tor}\\ \mathbf{H}_{qv}^{tor} & \mathbf{H}_{qq}^{tor}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{H}_{vv}^{tor}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{\dot r}{r}\end{pmatrix}=-\mathbf{H}_{qq}^{tor},$$

$$\mathbf{H}_{vq}^{tor}=\frac{1}{r^3\Delta_\gamma}\begin{pmatrix}D_\gamma^{\varphi\varphi} & -rD_\gamma^{\varphi}\\ -rD_\gamma^{\varphi} & r^2D_\gamma^0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{H}_{qv}^{tor}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{r\delta}{\varepsilon^2}f_{\varphi\varphi}\end{pmatrix},\qquad \Delta_\gamma=D_\gamma^0D_\gamma^{\varphi\varphi}-(D_\gamma^{\varphi})^2,$$

$$\mathbf{h}_{tor}=\begin{pmatrix}\mathbf{h}_v^{tor}\\ \mathbf{h}_q^{tor}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{h}_v^{tor}=\frac{1}{r\Delta_\gamma}\begin{pmatrix}D_\gamma^{\varphi\varphi}\tau_*^0-D_\gamma^{\varphi}\tau_*^{\varphi}\\ -r(D_\gamma^{\varphi}\tau_*^0+D_\gamma^0\tau_*^{\varphi})\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}_q^{tor}=\begin{pmatrix}-r^2\left(F_\varphi^0-\dfrac{\delta}{\varepsilon}(\tau_{r\varphi}-\tau_{l\varphi})\right)\\ -rF_\varphi^{\varphi}+\dfrac{r\delta}{\varepsilon^2}\left(\tau_{*\varphi\varphi}-\varepsilon\mu_\varphi(\nu_r)\tau_{r\varphi}+\varepsilon\mu_\varphi(\nu_l)\tau_{l\varphi}\right)\end{pmatrix}.$$

Здесь $T(t)$ и $\mathit{\Pi}_\varphi(t)$ — обезразмеренные усилие T^0 и момент $\mathit{\Pi}_{\varphi\varphi}^0$

$$T(t)=T_s^0(s)\Big/\left(D_{*\sigma}R_*^2\varepsilon^2\right),\qquad \mathit{\Pi}_\varphi(t)=\mathit{\Pi}_{\varphi\varphi}^0(s)\Big/\left(\delta R_*^2\varepsilon^3\right),$$

определённые в (20).

Если в осесимметричной задаче кручения краевые условия задаются в усилиях, то возможно дальнейшее упрощение системы уравнений: усилие $T(t)$ определяется из третьего уравнения системы (42), а кручение срединной поверхности $d\psi/dt$ может быть выражено через усилие $T(t)$ и момент $\mathit{\Pi}_\varphi(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2T\right)=-r^2\left(F_\varphi^0-\frac{\delta}{\varepsilon}\left(\tau_{r\varphi}-\tau_{l\varphi}\right)\right),\tag{43}$$
$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{r\Delta_\gamma}\left(D_\gamma^{\varphi\varphi}T-D_\gamma^{\varphi}\mathit{\Pi}_\varphi(t)+D_\gamma^{\varphi\varphi}\tau_*^0-D_\gamma^{\varphi}\tau_*^{\varphi}\right).$$

Считая известным усилие $T(t)$ для функций $\pi_\varphi(t)$ и $\mathit{\Pi}_\varphi(t)$, получим укороченную систему уравнений:

$$\frac{d\mathbf{y}_t(t)}{dt}=\mathbf{H}_t(t)\mathbf{y}_t(t)+\mathbf{h}_t(t),$$

$$\mathbf{y}_t=\begin{pmatrix}\pi_\varphi(t)\\ r\mathit{\Pi}_\varphi(t)\end{pmatrix},\qquad \mathbf{H}_t=\begin{pmatrix}\dfrac{\dot r}{r} & \dfrac{D_\gamma^0}{r\Delta_\gamma}\\ \dfrac{r\delta}{\varepsilon^2}f_{\varphi\varphi} & -\dfrac{\dot r}{r}\end{pmatrix},\tag{44}$$

$$\mathbf{h}_t = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\Delta_\gamma}\left(D_\gamma^\varphi T + D_\gamma^\varphi \tau_*^0 + D_\gamma^0 \tau_*^\varphi\right) \\ -rF_\varphi^\varphi + \dfrac{r\delta}{\varepsilon^2}\left(\tau_{*\varphi\varphi} - \varepsilon\mu_\varphi(\nu_r)\tau_{r\varphi} + \varepsilon\mu_\varphi(\nu_l)\tau_{l\varphi}\right) \end{pmatrix}.$$

Эта система также является гамильтоновой, где элементы $(\mathbf{H}_t)_{12}$ и $(\mathbf{H}_t)_{21}$ матрицы $\mathbf{H}_t$ положительны. Соотношения (43), (44) полностью описывают кручение оболочки.

Выражения, связывающие коэффициенты и правые части уравнений осесимметричного изгиба с характеристиками оболочки и действующими на неё нагрузками, имеют более сложный вид. Поэтому, для явного разделения между собой геометрических и механических факторов в коэффициентах уравнений осесимметричного изгиба, введём следующие вектор-функции от нормальной координаты $\nu \in [\nu_l, \nu_r]$ $\mathbf{a}_1^s(\nu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2^s(\nu) = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3^s(\nu) = \begin{pmatrix} \mu_s(\nu) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_1^\varphi(\nu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2^\varphi(\nu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3^\varphi(\nu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_s(\nu) \end{pmatrix}$ и матрицы $\mathbf{A}^s$, $\mathbf{A}^{s\varphi}$, $\mathbf{A}^\varphi$, которые определим как: $A_{ij}^s = \left\langle \mathbf{a}_i^s, \mathbf{a}_j^s \right\rangle_D$, $A_{ij}^{s\varphi} = \left\langle \mathbf{a}_i^s, \mathbf{a}_j^\varphi \right\rangle_D = A_{ji}^{s\varphi}$, $A_{ij}^\varphi = \left\langle \mathbf{a}_i^\varphi, \mathbf{a}_j^{\varphi\varphi} \right\rangle_D$, где

$$\left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \right\rangle_D = \int\limits_{\nu_l}^{\nu_r} \left(\mathbf{a}_1(\nu), \mathbf{D}\mathbf{a}_2(\nu)\right) d\nu, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{ss} & D_{s\varphi} \\ D_{s\varphi} & D_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Матрица $\left(A_{ij}^s\right)$ положительно определена, так как она является матрицей Грамма [12] векторов $\mathbf{a}_1^s, \mathbf{a}_2^s, \mathbf{a}_3^s$ в метрике (45), и потому обратима. Элементы обратной к ней матрицы обозначим через A^{ij}:

$$\sum_{k=1}^{3} A^{ik} A_{kj}^s = \delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{a}_s^1, \mathbf{a}_s^2, \mathbf{a}_s^3$, взаимные [8] к векторам $\mathbf{a}_1^s, \mathbf{a}_2^s, \mathbf{a}_3^s$ в метрике $\langle , \rangle_D$, и связанные с ними величины A_i^j : $\mathbf{a}_s^i = \sum_{j=1}^{3} A^{ij} \mathbf{a}_j^s$; $A_i^j = \left\langle \mathbf{a}_i^\varphi, \mathbf{a}_s^j \right\rangle_D = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}^{s\varphi} A^{kj}$. Теперь можем построить ортогональные дополнения $\mathbf{a}_j$ векторов $\mathbf{a}_j^\varphi$ к векторам $\mathbf{a}_j^s$ $\left(j = 1, 2, 3\right)$: $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^\varphi - \sum_{k=1}^{3} A_j^k \mathbf{a}_k^s$, $A_{ij} = \left\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \right\rangle_D = A_{ij}^\varphi - \sum_{k=1}^{3} A_i^k A_{kj}^{s\varphi}$. В силу введённых обозначений $D_\beta^\alpha = A_{1i(\alpha)}^\beta$, $D_\beta^{\alpha_1\alpha_2} = A_{i(\alpha_1)i(\alpha_2)}^\beta$, $D_{s\varphi}^{\alpha_1\alpha_2} = A_{i(\alpha_1)i(\alpha_2)}^{s\varphi}$, где $i(0) = 1$, $i(\nu) = 2$, $i(s) = 3$, $\left(\alpha, \alpha_1, \alpha_2 = 0, \nu, s\right)$ и $\left(\beta = s, \varphi\right)$. После подстановки последних выражений для D_β^α, $D_\beta^{\alpha_1\alpha_2}$ и $D_{s\varphi}^{\alpha_1\alpha_2}$ в (31) и (32) придём к следующей системе уравнений осесимметричного изгиба:

$$\frac{d\mathbf{y}_{ben}(t)}{dt} = \mathbf{H}_{ben}(t)\mathbf{y}_{ben}(t) + \mathbf{h}_{ben}(t), \tag{46}$$

где матрица $\mathbf{H}_{ben}$ и векторы $\mathbf{y}_{ben}, \mathbf{h}_{ben}$ имеют следующий блочный вид:

$$\mathbf{H}_{ben} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{vv}^{ben} & \mathbf{H}_{vq}^{ben} \\ \mathbf{H}_{qv}^{ben} & \mathbf{H}_{qq}^{ben} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}_{ben} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{ben} \\ \mathbf{q}_{ben} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h}_{ben} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{v}^{ben} \\ \mathbf{h}_{q}^{ben} \end{pmatrix},$$

а компоненты блоков связаны с введёнными A^{ij}, A_j^k и A_{ij} формулами

$$\mathbf{H}_{vv}^{ben} = \begin{pmatrix} 0 & -b_s & -\varepsilon^{-1} & 0 \\ b_s + b_\varphi A_1^1 & -\frac{\dot r}{r}A_1^1 & -\frac{\dot r}{r}A_2^1 & -\frac{\dot r}{r}A_3^1 \\ b_\varphi A_1^2 & -\frac{\dot r}{r}A_1^2 & -\frac{\dot r}{r}A_2^2 & -\frac{\dot r}{r}A_3^2 \\ b_\varphi A_1^3 & -\frac{\dot r}{r}A_1^3 & -\frac{\dot r}{r}A_2^3 & -\frac{\dot r}{r}A_3^3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{H}_{vq}^{ben} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ 0 & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ 0 & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{qq}^{ben} = -(\mathbf{H}_{vv}^{ben})^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{H}_{qv}^{ben} = \begin{pmatrix} r(b_\varphi)^2 A_{11} & -\dot r b_\varphi A_{11} & -\dot r b_\varphi A_{12} & -\dot r b_\varphi A_{13} \\ -\dot r b_\varphi A_{11} & \frac{\dot r^2}{r}A_{11} & \frac{\dot r^2}{r}A_{12} & \frac{\dot r^2}{r}A_{13} \\ -\dot r b_\varphi A_{21} & \frac{\dot r^2}{r}A_{21} & \frac{\dot r^2}{r}A_{22} & \frac{\dot r^2}{r}A_{23} \\ -\dot r b_\varphi A_{31} & \frac{\dot r^2}{r}A_{31} & \frac{\dot r^2}{r}A_{32} & \frac{\dot r^2}{r}A_{33} + \frac{r\delta}{\varepsilon^2} f_{ss} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{ben} = \begin{pmatrix} w \\ u \\ \eta \\ \pi_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_{ben} = r\begin{pmatrix} Q_s \\ T_s \\ M_s \\ \Pi_s \end{pmatrix}, \quad \text{где } Q_s = \frac{Q_s^0(s)}{D_{*\sigma}R_*^2\varepsilon^2},\ T_s = \frac{T_s^0(s)}{D_{*\sigma}R_*^2\varepsilon^2},\ M_s = \frac{M_s^0(s)}{D_{*\sigma}R_*^2\varepsilon^3},\ \Pi_s = \frac{\Pi_{ss}^0(s)}{\delta R_*^2\varepsilon^3}$$

$$\left(Q_s^0(s),\ T_s^0(s),\ M_{ss}^0(s),\ \Pi_s^0(s)\ -\ \text{см. в } (37)\right)$$

$$\mathbf{h}_{v}^{ben} = -\begin{pmatrix} 0 \\ A^{11}\sigma_{*s}^0 + A^{12}\sigma_{*s}^\nu + A^{13}\sigma_{*s}^s \\ A^{21}\sigma_{*s}^0 + A^{22}\sigma_{*s}^\nu + A^{23}\sigma_{*s}^s \\ A^{31}\sigma_{*s}^0 + A^{32}\sigma_{*s}^\nu + A^{33}\sigma_{*s}^s \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}_{q}^{ben} = \begin{pmatrix} -rb_\varphi\sigma_{*\varphi}^0 - rF_z^0 \\ \dot r\sigma_{*\varphi}^0 - rF_s^0 \\ \dot r\sigma_{*\varphi}^\nu - rF_s^\nu \\ \dot r\sigma_{*\varphi}^s - rF_s^s + \frac{r\delta}{\varepsilon^2}\tau_{*ss} \end{pmatrix} - \frac{r\delta}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \frac{1}{\delta}(\sigma_{rz} - \sigma_{lz}) \\ \tau_{rs} - \tau_{ls} \\ \nu_r\tau_{rs} - \nu_l\tau_{ls} \\ \mu_s(\nu_r)\tau_{rs} - \mu_s(\nu_l)\tau_{ls} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rb_\varphi\left(A_1^1\sigma_{*s}^0 + A_1^2\sigma_{*s}^\nu + A_1^3\sigma_{*s}^s\right) \\ -\dot r\left(A_1^1\sigma_{*s}^0 + A_1^2\sigma_{*s}^\nu + A_1^3\sigma_{*s}^s\right) \\ -\dot r\left(A_2^1\sigma_{*s}^0 + A_2^2\sigma_{*s}^\nu + A_2^3\sigma_{*s}^s\right) \\ -\dot r\left(A_3^1\sigma_{*s}^0 + A_3^2\sigma_{*s}^\nu + A_3^3\sigma_{*s}^s\right) \end{pmatrix}.$$

Система уравнений осесимметричного изгиба замыкается краевыми условиями типа:

$$w(t_k) = w_k \ \text{ или } \ Q_s(t_k) = Q_{sk}; \qquad u(t_k) = u_k \ \text{ или } \ T_s(t_k) = T_{sk};$$

$$\eta(t_k) = \eta_k \ \text{ или } \ M_s(t_k) = M_{sk}; \qquad \pi_s(t_k) = \pi_{ks} \ \text{ или } \ \Pi_s(t_k) = \Pi_{sk}.$$

Если на торцах оболочки заданы усилия Q_{sk} и T_{sk}, то, как уже было отмечено, порядок системы (46) можно понизить. Для этого перейдем от смещений w и u к осевой u_x и радиальной u_r составляющим вектора смещений срединной поверхности согласно (1), а вместо усилий Q_s и T_s введём осевую T_x и радиальную T_r силы:

$$
\begin{aligned}
&u_x = -rb_\varphi u - \dot{r}w; && u = -rb_\varphi u_x + \dot{r}u_r;\\
&u_r = \dot{r}u - rb_\varphi w; && w = -\dot{r}u_x - rb_\varphi u_r;\\
&T_x = -rb_\varphi T_s - \dot{r}Q_s; && T_s = -rb_\varphi T_x + \dot{r}T_r;\\
&T_r = \dot{r}T_s - rb_\varphi Q_s; && Q_s = -\dot{r}T_x - rb_\varphi T_r.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Тогда осевое усилие T_x может быть найдено из уравнения

$$
\frac{d}{dt}(rT_x) = \frac{r\dot{r}}{\varepsilon}(\sigma_{rz} - \sigma_{lz} + \varepsilon F_z^0) + \frac{\delta r^2 b_\varphi}{\varepsilon}(\tau_{rs} - \tau_{ls} + \frac{\varepsilon}{\delta}F_s^0),
$$

которое является линейной комбинацией пятого и шестого уравнений системы (46): пятое умножается на $(-\dot{r})$ и складывается с шестым, умноженным на $(-rb_\varphi)$.

Аналогичное преобразование первого и второго уравнений системы (46) даёт выражение для меридиональной деформации срединной поверхности оболочки вращения ε_s

$$
\begin{aligned}
&\frac{du_x}{dt} = b_\varphi A_1^1 u_r + \dot{r}(b_\varphi A_2^1 + \varepsilon^{-1})\eta + \dot{r}b_\varphi A_s^1 \pi_s -\\
&-b_\varphi\left[\dot{r}A^{11}(rT_r) + A^{12}(rM_s) + A^{12}(rM_s)\right] - r(b_\varphi)^2 A^{11}(rT_x) +\\
&+rb_\varphi\left(A^{11}\sigma_{*s}^0 + A^{12}\sigma_{*s}^\nu + A^{13}\sigma_{*s}^\mu\right),
\end{aligned}
$$

в котором $T_x(t)$ определена выше, а функции $u_r, \eta, \pi_s, T_r, M_s, \Pi_s$ удовлетворяют гамильтоновой системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\frac{d\mathbf{y}_b(t)}{dt} = \mathbf{H}_b(t)\mathbf{y}_b(t) + \mathbf{h}_b(t),
\tag{48}
$$

где $\mathbf{y}_b = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_b\\ \mathbf{q}_b\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_b = \begin{pmatrix}\mathbf{H}_{vv}^b & \mathbf{H}_{vq}^b\\ \mathbf{H}_{qv}^b & \mathbf{H}_{qq}^b\end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_b = \begin{pmatrix}\mathbf{h}_v^b\\ \mathbf{h}_q^b\end{pmatrix}$,

$$
\mathbf{v}_b = \begin{pmatrix}u_r\\ \eta\\ \pi_s\end{pmatrix},\quad
\mathbf{q}_b = r\begin{pmatrix}T_r\\ M_s\\ \Pi_s\end{pmatrix},\quad
\mathbf{H}_{vv}^b = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\dot{r}A_1^1 & \dot{r}^2A_2^1 - \dfrac{r^2b_\varphi}{\varepsilon} & \dot{r}^2A_3^1\\ A_1^2 & \dot{r}A_2^2 & \dot{r}A_3^2\\ A_1^3 & \dot{r}A_2^3 & \dot{r}A_3^3\end{pmatrix},\quad
\begin{aligned}&\mathbf{H}_{vq}^b = (\mathbf{H}_{vq}^b)^{\mathrm{T}},\\ &\mathbf{H}_{qv}^b = (\mathbf{H}_{qv}^b)^{\mathrm{T}},\end{aligned}
$$

$$\mathbf{H}^b_{qq} = -\left(\mathbf{H}^b_{vv}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{H}^b_{vq} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \dot r^2 A^{11} & \dot r A^{12} & \dot r A^{13} \\ \dot r A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ \dot r A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^b_{qv} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} A_{11} & \dot r A_{12} & \dot r A_{13} \\ \dot r A_{21} & \dot r^2 A_{22} & \dot r^2 A_{23} \\ \dot r A_{31} & \dot r^2 A_{32} & \dot r^2 A_{33} + \delta\left(\dfrac{r}{\varepsilon}\right)^2 f_{ss} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}^b_v = -\begin{pmatrix} \dot r\left(A^{11}\sigma^0_{*s} + A^{12}\sigma^{\nu}_{*s} + A^{13}\sigma^s_{*s}\right) \\ A^{21}\sigma^0_{*s} + A^{22}\sigma^{\nu}_{*s} + A^{23}\sigma^s_{*s} \\ A^{31}\sigma^0_{*s} + A^{32}\sigma^{\nu}_{*s} + A^{33}\sigma^s_{*s} \end{pmatrix} - b_{\varphi}(rT_x)\begin{pmatrix} \dot r A^{11} \\ A^{21} \\ A^{31} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}^b_q = \begin{pmatrix} \sigma^0_{*\varphi} + r(rb_{\varphi}F^0_z - \dot r F^0_s) \\ \dot r\sigma^{\nu}_{*\varphi} - rF^{\nu}_s \\ \dot r\sigma^s_{*\varphi} - rF^s_s + \dfrac{r\delta}{\varepsilon^2}\tau_{*ss} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^1_1\sigma^0_{*s} + A^2_1\sigma^{\nu}_{*s} + A^3_1\sigma^s_{*s} \\ \dot r\left(A^1_2\sigma^0_{*s} + A^2_2\sigma^{\nu}_{*s} + A^3_2\sigma^s_{*s}\right) \\ \dot r\left(A^1_3\sigma^0_{*s} + A^2_3\sigma^{\nu}_{*s} + A^3_3\sigma^s_{*s}\right) \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{r\delta}{\varepsilon}\begin{pmatrix} -\dfrac{rb_{\varphi}}{\delta}(\sigma_{rz} - \sigma_{lz}) + \dot r(\tau_{rs} - \tau_{ls}) \\ \nu_r\tau_{rs} - \nu_l\tau_{ls} \\ \mu_s(\nu_r)\tau_{rs} - \mu_s(\nu_l)\tau_{ls} \end{pmatrix} - (rT_x)\begin{pmatrix} b_{\varphi}A^1_1 \\ \dot r(\varepsilon^{-1} + b_{\varphi})A^1_2 \\ \dot r b_{\varphi}A^1_3 \end{pmatrix}.$$

Зная решение гамильтоновой системы (48), можно восстановить осевое смещение u_x и тем самым полностью решить задачу осесимметричного изгиба ортотропной оболочки вращения.

7. Заключение

Суммируя всё сказанное, можно сделать следующий вывод: линейные уравнения статики замкнутой в окружном направлении оболочки вращения могут быть представлены в гамильтоновой форме (35) с неотрицательно определенными матричными блоками $\mathbf{H}_{vq}$ и $\mathbf{H}_{qv}$. Эти свойства блоков (36) являются решающими при выборе аналитических и численных методов анализа НДС оболочек вращения.

Для собственных чисел и собственных векторов гамильтоновой матрицы справедливы утверждения, являющиеся следствиями известной теоремы Вильямсона (Williamson J. 1936) [2], которые могут быть сформулированы в виде следующей теоремы:

Теорема. Собственные числа вещественной гамильтоновой матрицы бывают четырёх типов: вещественные пары $\{a, -a\}$, чисто мнимые пары $\{ib, -ib\}$, четвёрки $\{\pm a \pm ib\}$ и нулевые собственные числа. Жордановы клетки, соответствующие двум членам пары или четырем членам четвёрки, имеют одинаковую структуру. Если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — собственные векторы гамильтоновой матрицы, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2, причём $\lambda_1 + \overline{\lambda_2} \neq 0$, то для скалярного в $\mathbf{C}^{2n}$ произведения справедливо равенство: $(\mathbf{x}_1, \mathbf{J}_n\mathbf{x}_2) = 0;$ если же рассматривается скалярное в $\mathbf{R}^{2n}$ произведение, то условие $(\mathbf{x}_1, \mathbf{J}_n\mathbf{x}_2) = 0$ выполняется при $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Эта теорема позволяет проводить аналитическое исследование аспектов статического состояния оболочки вращения с помощью полученных в этой работе уравнений в гамильтоновой форме. В частности, удаётся найти [10] асимптотические разложения решений по малому параметру, связанному с толщиной оболочки; построить решения системы дифференциальных уравнений статики в виде рядов в окрестности особых точек, обусловленных геометрией оболочки, например в вершине конуса [5].

Литература

1. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М. Наука, 1989. – 472 с.
3. *Киреев И.В., Немировский Ю.В.* Гамильтонов подход к решению линейных задач упругих оболочек вращения // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. X Всесоюз. конф. – Новосибирск, 1988. – С. 115-121.
4. *Киреев И.В.* Симметричные численные методы решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Моделирование в механике сплошных сред: Межвуз. сб. научн. статей. – Красноярск, 1992. – С. 81-91.
5. *Киреев И.В.* Краевые задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Препр. № 11 / ВЦ СО АН СССР. – Красноярск, 1990. – 31 с.
6. *Андреев А.Н., Немировский Ю.В.* К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. МТТ. – 1977, № 5. – С. 87-96.
7. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек: В 2-х ч. – Изд. ЛГУ, 1962. – Ч. 1. – 274 с.
8. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек: В 2-х ч. – Изд. ЛГУ, 1964. – Ч. 2. – 296 с.
9. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
10. *Киреев И.В., Немировский Ю.В.* Асимптотический анализ упругого осесимметричного состояния тонкой многослойной ортотропной оболочки вращения: Препр. № 5 / ВЦ СО АН СССР. – Красноярск, 1985. – 29 с.
11. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация. – М.: Элиториал УРСС, 2000. – 320 с.
12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

Поступила в редакцию 28.07.10

Сведения об авторах

Киреев Игорь Валерьевич, кфмн, нс, Институт вычислительного моделирования СО РАН (ИВМ СО РАН), 660036, Красноярск, Академгородок, 50, строение 44; E-mail: kiv@icm.krasn.ru

Немировский Юрий Владимирович, дфмн, проф., гнс, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН ((ИТПМ СО РАН), 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1; E-mail: nemirov@itam.nsc.ru