

УДК 539.3

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**В.И. Ерофеев<sup>1,2</sup>, А.И. Землянухин<sup>3</sup>, В.М. Катсон<sup>3</sup>, А.О. Мальханов<sup>2</sup><sup>1</sup>*Нижегородский филиал института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
Нижний Новгород, Россия*<sup>2</sup>*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*<sup>3</sup>*Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия*

Рассматривается упругая пластина, изготовленная из проводящего материала, находящаяся во внешнем магнитном поле. Показано, что распространение интенсивных волн в такой системе может быть описано нелинейным эволюционным уравнением, соединяющим в себе известные модельные уравнения Хохлова–Заболотской–Кузнецова и Кадомцева–Петвиашвили. Аналитически и численно проанализированы особенности распространения двумерных нелинейных магнитоупругих волн.

*Ключевые слова:* магнитоупругость, упругие волны, магнитное поле, пластина

**NONLINEAR LOCALIZED LONGITUDINAL WAVES IN A PLATE  
UNDER MAGNETIC FIELD**V.I. Erofeyev<sup>1,2</sup>, A.I. Zemlyanukhin<sup>3</sup>, V.M. Catson<sup>3</sup> and A.O. Malkhanov<sup>2</sup><sup>1</sup>*Nizhny Novgorod Branch of Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute RAS,  
Nizhny Novgorod, Russia*<sup>2</sup>*Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia*<sup>3</sup>*Saratov State Technical University, Saratov, Russia*

We consider an elastic plate made of a conducting material under external magnetic field conditions. It is shown that the propagation of intense waves in this system can be described by the nonlinear evolutionary equation, which combines the well-known Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov and Kodomtsev-Petviashvili model equations. The peculiarities of propagation of 2D nonlinear magnetoelastic waves have been analyzed both analytically and numerically.

*Key words:* magnetoelasticity, elastic waves, magnetic field, plate

**1. Введение**

Как научное направление магнитоупругость сформировалась в середине 50-х годов XX-го века на стыке механики деформируемого твердого тела, электродинамики и акустики. Первые работы были инициированы проблемами геофизики — потребностью описать волновую динамику глубинных слоев Земли с учетом ее электропроводности и взаимодействия с геомагнитным полем [1, 2].

С тех пор динамические процессы при взаимодействии электромагнитных и деформационных полей активно изучаются. Это связано с многочисленными физическими, техническими и технологическими приложениями. Среди них проблемы прочности конструкций и механизмов, эксплуатируемых в условиях сильных магнитных

полей, когда возникающие в результате взаимодействия токов и магнитных полей амперовы силы сравнимы с прочностными параметрами.

В связи с моральным и физическим износом эксплуатируемой техники возросла актуальность задач дефектоскопии. При этом в проводящем материале, находящемся в постоянном магнитном поле, с помощью индуктора создаются вихревые токи. Возникающая распределенная амперова сила возбуждает колебания. Наличие дефектов определяется по отклонению собственных и резонансных частот от эталонных [3, 4].

Такой же механизм используется при виброобработке расплавов [5], которая способствует улучшению структуры получающегося при затвердевании материала. Виброобработка при сварке металла плавящимся электродом улучшает прочность сварного шва и устраняет остаточные напряжения. Использование электродинамических способов при дефектоскопии и виброобработке решает многие технологические проблемы за счет бесконтактного возбуждения колебаний.

Энергия электромагнитного поля успешно используется в технологии промышленной термообработки, основанной на индукционном разогреве материала [6–8].

Включение полей различной физической природы в механические системы открывает новые возможности для развития техники и технологий. Эффекты магнитоупругости проявляются или в сильных магнитных полях, если создаваемые нагрузки способны заметно повлиять на волновые и диссипативные свойства среды, или в тонких телах: стержнях, пластинах, оболочках [9–12]. Для безграничной магнитоупругой среды характерна создаваемая магнитным полем анизотропия свойств. Магнитное поле в среде с конечной проводимостью приводит к дополнительному механизму диссипации. Эти свойства магнитоупругих систем открывают новые возможности практического применения.

В настоящей работе изучается распространение нелинейных магнитоупругих волн в пластине. Особое внимание уделяется вопросам формирования двумерных пространственно-локализованных волн. Задача влияния магнитного поля на локализацию волны деформации рассматривалась ранее в работах [13–15] в одномерной постановке.

## 2. Уравнения магнитоупругости

В магнитоупругости предполагается, что действие электромагнитного поля на поле деформаций происходит через силы Лоренца

$$\mathbf{F}_m = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

которые вводятся в уравнения движения

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_{\text{нел}} + \mathbf{F}_m. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля;  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции;  $\mathbf{j}$  — вектор плотности токов;  $\rho_e$  — объемная плотность электрических зарядов;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\lambda, \mu$  — модули упругости второго порядка (константы Ламе);  $\rho$  — плотность материала;  $t$  — время. Вектор  $\mathbf{F}_{\text{нел}}$  включает в себя слагаемые, обусловленные геометрической и физической упругими нелинейностями. Если учитывается лишь квадратичная нелинейность, то компоненты этого вектора следующим образом выражаются через градиенты перемещений [16]:

$$\begin{aligned}
 F_i = & \left( \mu + \frac{A}{4} \right) (u_{l,kk} u_{l,i} + u_{i,l} u_{l,kk} + 2u_{l,k} u_{i,lk}) + \left( \lambda + \mu + \frac{A}{4} + B \right) (u_{l,k} u_{l,ik} + u_{i,l} u_{k,lk}) + \\
 & + (\lambda + B) u_{i,l} u_{i,kk} + (B + 2C) u_{i,l} u_{k,ki} + \left( \lambda + \mu + \frac{A}{4} + B \right) (u_{l,k} u_{l,ki} + u_{i,l} u_{k,lk}),
 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $A, B, C$  — константы упругости третьего порядка (модули Ландау); индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Явный вид нелинейных слагаемых при учете кубической нелинейности приведен в [17].

Из уравнений Максвелла следуют уравнения для электрической  $\mathbf{D}$  и магнитной  $\mathbf{B}$  индукций:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right] + \sigma \Delta \mathbf{B}, \quad (5)$$

которые вместе с электромагнитными уравнениями состояния

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (6)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_e \mathbf{E}, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H} \quad (8)$$

следует добавить к уравнениям (1), (2). Здесь  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;  $\sigma$  — проводимость;  $\varepsilon_e$  — диэлектрическая проницаемость;  $\mu_e$  — магнитная проницаемость среды.

В магнитоупругости принято пренебрегать токами смещения ( $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ ) [12] и считать, что свободные электрические заряды отсутствуют ( $\rho_e = 0$ ). Таким образом, уравнения магнитоупругости имеют вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_{\text{нег}} + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}, \quad (10)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

Будем полагать, что внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью  $H_0$  перпендикулярно направлению распространения волн (Рис. 1). Суммарное магнитное поле состоит из его постоянного значения и возмущений, появляющихся в результате взаимодействия с полем деформаций

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{n} + \mathbf{h}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали,  $\mathbf{h}$  — малое возмущение магнитного поля.

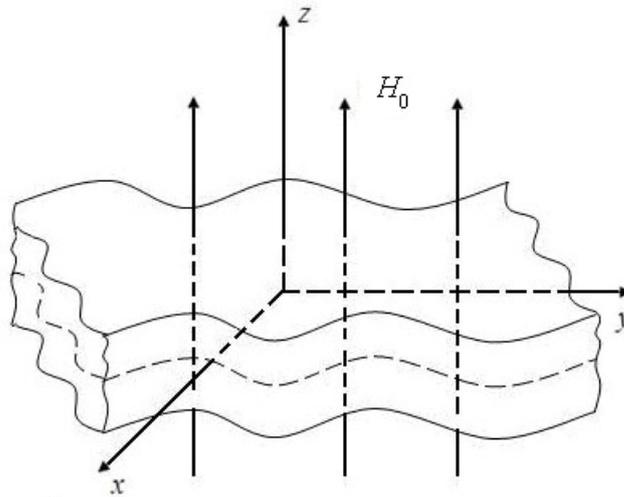


Рис. 1. Направление внешнего магнитного поля по отношению к пластине.

Рассмотрим далее распространение продольной волны в нелинейно-упругой однородной пластине, находящейся во внешнем магнитном поле. В рассматриваемом случае малое возмущение и суммарное магнитное поле имеют вид:

$$\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z), \quad \mathbf{H} = (h_x, h_y, H_0 + h_z). \quad (12)$$

Как известно [18], идея приведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям равновесия или динамики пластин заключается в выражении величин, описывающих напряженно-деформированное состояние в произвольной точке тела, через новые величины, изменяющиеся вдоль срединной поверхности пластины. При этом переход от бесконечного числа степеней свободы в направлении нормали  $x_\perp = (x_2, x_3)$  к конечному числу степеней свободы (конечному числу мод) осуществляется путем аппроксимации смещений многочленами. Она производится, как правило, по степеням поперечных координат, и в качестве малого параметра выступает относительная толщина пластины  $2k_z h$ , где  $h$  — полутолщина пластины,  $k_z$  — нормальная компонента волнового вектора.

До частот  $\omega h < c_l$  ( $c_l$  — скорость распространения продольной упругой волны в безграничной среде,  $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ) применима следующая аппроксимация перемещений [19]:

$$u_1 = u(x, y, t), \quad u_2 = v(x, y, t), \quad u_3 = -\frac{\lambda z}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (13)$$

где  $u, v$  — перемещения срединной поверхности пластины;  $x = x_1$ ;  $y = x_2$ ;  $z = x_3$ ;  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

Уравнения магнитоупругости для пластины, совершающей продольные колебания, запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - c_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\lambda^2 h^2}{3(\lambda + 2\mu)^2} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y \partial t^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2 c_\tau^2 h^2}{3(\lambda + 2\mu)^2} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} H_0 \frac{\partial h_z}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\
 & + \alpha_2 \left[ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \alpha_3 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \alpha_4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\
 & - \frac{1}{4\pi\rho} \left[ h_z \frac{\partial h_z}{\partial x} + h_y \left( \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right];
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (c_l^2 - c_\tau^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\lambda^2 h^2}{3(\lambda + 2\mu)^2} \left( \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y \partial x \partial t^2} \right) + \\
 & + \frac{\lambda^2 c_\tau^2 h^2}{3(\lambda + 2\mu)^2} \left( \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^4 u}{\partial y \partial x^3} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} H_0 \frac{\partial h_z}{\partial y} = \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \\
 & + \alpha_2 \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\
 & - \frac{1}{4\pi\rho} \left[ h_z \frac{\partial h_z}{\partial y} - h_x \left( \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right];
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( h_y \frac{\partial u}{\partial t} - h_x \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} \right); \tag{16}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( h_y \frac{\partial u}{\partial t} - h_x \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} \right); \tag{17}$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ (H_0 + h_z) \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ (H_0 + h_z) \frac{\partial v}{\partial t} \right] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} \right). \tag{18}$$

Здесь через

$$c_p = c_l \sqrt{1 - \frac{(c_l^2 - 2c_\tau^2)^2}{c_l^4}} \tag{19}$$

обозначена скорость, с которой распространялась бы продольная волна в пластине при отсутствии геометрической дисперсии и взаимодействия с магнитным полем;  $c_\tau$  — скорость распространения сдвиговой упругой волны в безграничной среде,  $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ .

### 3. Распространение пучка продольных волн

Рассмотрим распространение пучка продольных волн вдоль оси  $x$ , ограничившись областью, в которой параметры нелинейности, дисперсии и дифракции имеют одинаковый порядок ( $\sim \varepsilon$ ). Предположим, что пучок волн — ограниченный, слаборасходящийся и близкий к плоской волне.

Введем лучевые координаты

$$\xi = x - \tilde{c}t, \quad \eta = \varepsilon x, \quad \chi = \sqrt{\varepsilon}y \quad (20)$$

и новые функции

$$\begin{aligned} u &= u, & v &= \sqrt{\varepsilon}v, \\ h_z &= h_z, & h_x &= \sqrt{\varepsilon}h_x, & h_y &= \sqrt{\varepsilon}h_y. \end{aligned} \quad (21)$$

Выбор лучевых переменных в виде (20) и замены (21) отражают тот факт, что, в силу нелинейности, дисперсии и дифракционной расходимости, перемещения и компоненты вектора напряженности магнитного поля изменяются как вдоль направления распространения пучка ( $\sim \varepsilon$ ), так и поперек ( $\sim \sqrt{\varepsilon}$ ).

Подставляя (20), (21) в систему (14)–(18) и удерживая при этом только члены с  $\varepsilon$  в степени не выше первой, приходим к эволюционному уравнению относительно одноосной (продольной) деформации  $U = \partial u / \partial \xi$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \delta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} = 0, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3 - \left(\frac{c_A}{c_l}\right)^2 - \frac{6\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \left(1 - \left(\frac{c_\tau}{c_l}\right)^2\right) + \left(\frac{c_p}{c_l}\right)^2 g}{2 \left(2 \left(\frac{c_p}{c_l}\right)^2 + \left(\frac{c_A}{c_l}\right)^2\right)} - 1, \\ \beta &= \frac{\lambda^2 h^2}{6(\lambda + 2\mu)^2} \frac{\left(\frac{c_p}{c_l}\right)^2 + \left(\frac{c_A}{c_l}\right)^2 - \left(\frac{c_\tau}{c_l}\right)^2}{2 \left(\frac{c_p}{c_l}\right)^2 + \left(\frac{c_A}{c_l}\right)^2}, & \delta &= \frac{c^2}{8\pi\sigma c_l^2 \sqrt{\left(\frac{c_p}{c_l}\right)^2 + \left(\frac{c_A}{c_l}\right)^2}}, \\ \gamma &= \frac{1 + \left(\frac{c_A}{c_l}\right)^2 - \left(\frac{c_\tau}{c_l}\right)^2 \left(2 - \left(\frac{c_p}{c_l}\right)^2\right)}{2 \left(2 \left(\frac{c_p}{c_l}\right)^2 + \left(\frac{c_A}{c_l}\right)^2\right) \left(\left(\frac{c_p}{c_l}\right)^2 + \left(\frac{c_A}{c_l}\right)^2 - \left(\frac{c_\tau}{c_l}\right)^2\right)}, & g &= \frac{2A + 6B + 2C}{\rho c_l^2}, & \tilde{c} &= \sqrt{c_p^2 + c_A^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $c_A = \sqrt{H_0^2 / (4\pi\rho)}$  — скорость волны Альфвена [5].

Уравнение (22) обобщает известные модельные уравнения Хохлова–Заболотской–Кузнецова и Кадомцева–Петвиашвили, которые следуют из (22), соответственно, при  $\beta = 0$  и  $\delta = 0$  [20].

Для получения аналитического решения «методом простейших уравнений» [21] возьмем в качестве простейшего уравнение Риккати

$$Y_z = -Y^2 + aY + b \quad (24)$$

с решением

$$Y(z) = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{4b+a^2}}{2} \operatorname{th} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4b+a^2} (z + C_2) \right], \quad (25)$$

где  $a$  и  $b$  определим позднее из переопределённой системы уравнений.

Уравнение (22) имеет порядок сингулярности, равный двум, поэтому его решение будем искать в виде:

$$U(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + B_1 \left( \frac{Y_z}{Y} \right) + B_2 \left( \frac{Y_z}{Y} \right)^2. \quad (26)$$

Здесь  $z = k_0 \xi + k_1 \chi + k_2 \eta$ ;  $A_i, B_i$  — произвольные постоянные. С учетом (24) получим:

$$U(z) = (A_2 + B_2) Y^2 + (A_1 - B_1 - 2aB_2) Y + A_0 + aB_1 + B_2(a^2 - 2b) + \frac{bB_1 + 2abB_2}{Y} + \frac{B_2 b^2}{Y^2}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (22) и приравнявая члены с одинаковой степенью  $Y_z$ , придем к системе уравнений, из-за громоздкости которой покажем здесь только первые два уравнения:

$$\left( \frac{1}{2} \alpha B_2^2 + 6\beta B_2 \right)^4 = 0, \quad (28)$$

$$(14\beta B_2 \alpha + \alpha B_1 B_2 + 2\beta B_1 + 2a\alpha B_2^2 + 2\delta B_2) b^3 = 0, \quad \dots$$

Решение системы имеет вид:

$$A_2 = -\frac{12\beta}{\alpha}, \quad a = -\frac{1}{5} \frac{\delta}{\beta}, \quad A_0 = A_1 = B_1 = B_2 = b = 0. \quad (29)$$

Тогда точное решение уравнения (22) принимает вид ударной волны:

$$U(\xi, \chi, \eta) = -\frac{3}{25} \frac{\delta^2}{\alpha\beta} \left( -1 + \operatorname{th} \left( \frac{k_0 \xi + k_1 \chi + k_2 \eta}{2} \right) \right)^2, \quad (30)$$

где  $k_0 = \frac{1}{5} \frac{\delta}{\beta}$ ,  $k_2 = -\frac{6}{125} \frac{\delta^3}{\beta^2} + \frac{5\beta\gamma k_1^2}{\delta}$ ;  $k_1$  — произвольная постоянная. Требование положительной определенности скорости волны ( $k_2 > 0$ ) накладывает ограничение на коэффициенты  $k_1$ :

$$k_1^2 > \frac{6}{625} \frac{\delta^4}{\gamma\beta^3}. \quad (31)$$

При верификации полученного решения оно служило начальным условием в численном эксперименте. Вычисления проводились на основе полунявной псевдоспектральной схемы [22] со значениями параметров:  $256 \times 64$  — размерность сетки;  $\Delta\xi = 0,25$  — длина шага по  $\xi$ ;  $\Delta\chi = 0,25$  — длина шага по  $\chi$ ;  $\Delta\eta = 0,003$  — длина шага по  $\eta$ .

Эволюция возмущения представлена на рисунке 2. Фронт ударной волны распространяется без возмущений в положительном направлении оси  $\xi$ , что говорит о достоверности полученного аналитического решения.

Также в численном эксперименте был рассмотрен другой вид начальных условий:

$$U_0(\xi, \chi) = 12 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi - 32}{4}\right) \operatorname{sech}(\chi - 8) \quad (32)$$

Купол возмущения (Рис. 3) движется вперёд по  $\xi$ , одновременно расплываясь в стороны по  $\chi$ , причём последний эффект преобладает. С течением «времени»  $\eta$  ближе к границам амплитуда возмущения нарастает до определённого предела ( $U_0 = 7,1$ ), постоянно расплываясь в стороны и двигаясь вперёд, что приводит к появлению крестообразных структур (Рис. 4, 5). Высота креста в максимальной точке  $U_0 = 2$  (Рис. 4).

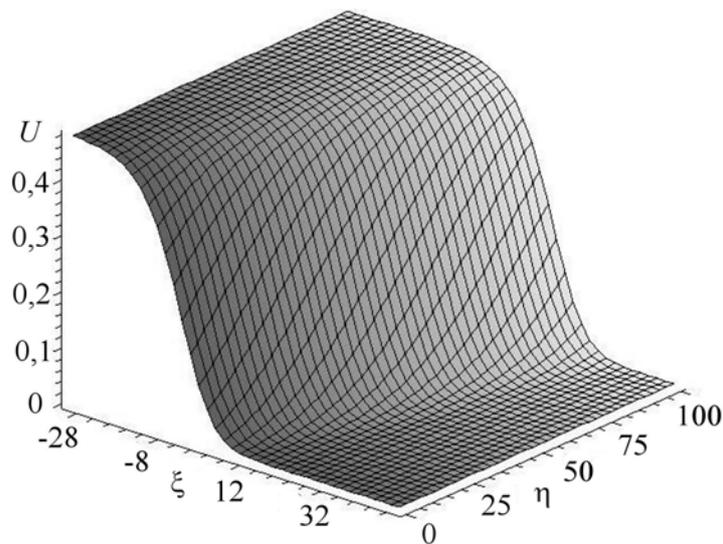


Рис. 2. Распространение ударной волны ( $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$ )

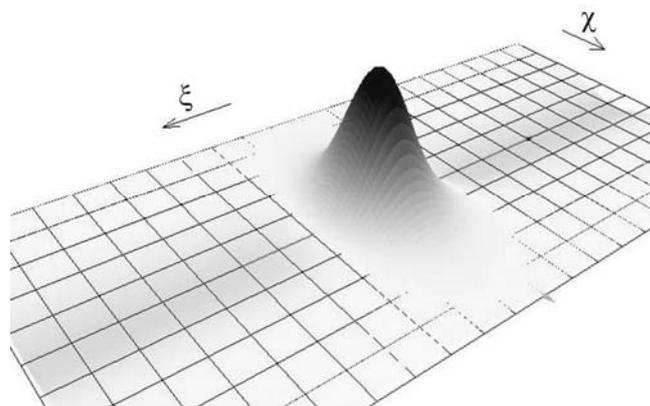


Рис. 3. Начальное возмущение, задаваемое в численном эксперименте

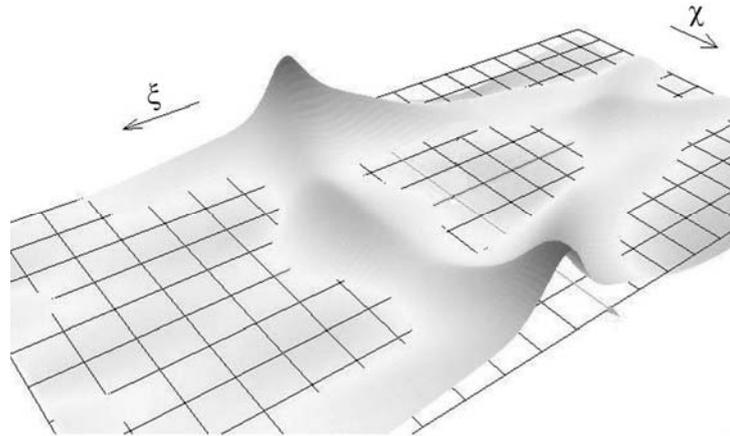


Рис. 4. Результат эволюции начального возмущения в диссипативном случае ( $\eta = 5$ )

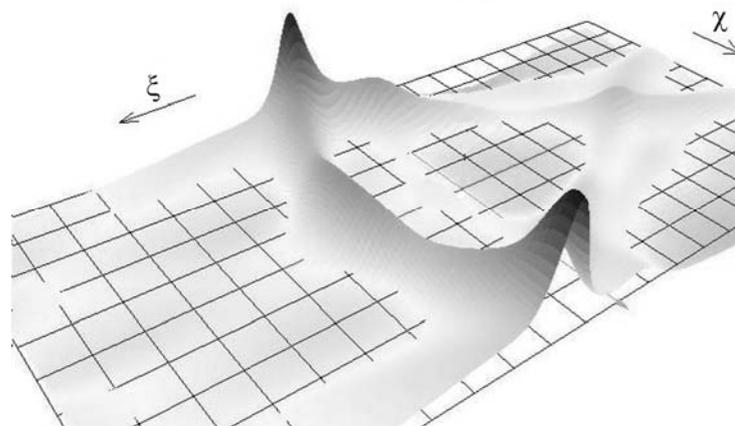


Рис. 5. Результат эволюции начального возмущения в бездиссипативном случае ( $\eta = 5$ )

На рисунке 5 показана эволюция начального возмущения в уравнении Кадомцева–Петвиашвили. Из сравнения крестообразных структур на рисунках 4 и 5 видно, что эволюция начального импульса для обоих уравнений имеет качественно одинаковый характер — расплывание в стороны и образование крестообразных структур. Единственное отличие состоит в уменьшении амплитуды и увеличении размытости возмущения за счет диссипации ( $\delta \neq 0$ ).

Проследим изменение амплитуды и ширины волнового пучка вдоль каждой из координат в зависимости от величины внешнего магнитного поля. Задавая произвольные постоянные как

$$k_1 = \frac{\sqrt{7}}{25} \frac{\delta^2}{\sqrt{\gamma\beta^3}}, \quad k_2 = \frac{1}{125} \frac{\delta^3}{\beta^2}, \quad (33)$$

получим выражения для амплитуды и ширины пучка вдоль осей

$$U_0 = -\frac{3}{25} \frac{\delta^2}{\alpha\beta}, \quad \Delta_\xi = \frac{10\beta}{\delta}, \quad \Delta_\eta = \frac{250\beta^2}{\delta^3}, \quad \Delta_\chi = \frac{50}{\sqrt{7}} \frac{\sqrt{\gamma\beta^3}}{\delta^2}. \quad (34)$$

Для конденсированных сред в магнитных полях с напряженностью до 10 Тл скорость волны Альфвена меньше скорости распространения продольной волны [5],

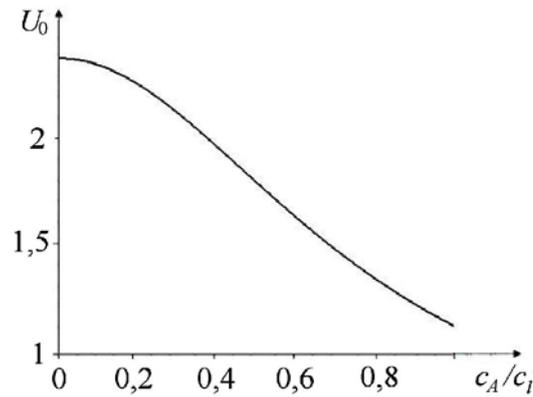


Рис. 6. Зависимость амплитуды волнового пучка от напряженности внешнего магнитного поля

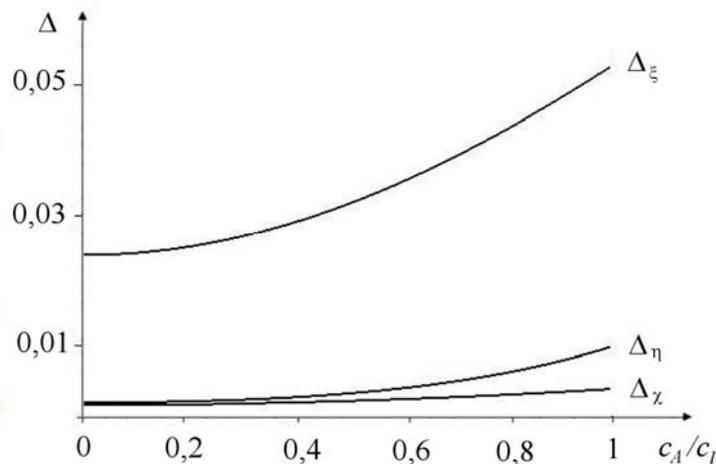


Рис. 7. Зависимость ширины (по  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\chi$ ) от амплитуды внешнего магнитного поля

поэтому изменение параметров исследовано в интервале  $0 \leq c_A/c_l < 1$ . Практический же интерес представляют значения параметров на интервале  $0 \leq c_A/c_l < 0,3$ .

На рисунке 6 представлено изменение амплитуды волнового пучка. Из рисунка видно, что с ростом напряженности внешнего магнитного поля амплитуда убывает. В то же время ширина пучка вдоль каждой из координатных осей возрастает с увеличением величины магнитного поля, причем вдоль продольной координаты  $\xi$  ширина пучка на порядок больше, чем вдоль поперечной  $\eta$  (Рис. 7).

#### 4. Заключение

В результате аналитических исследований и численного моделирования продемонстрирована возможность формирования интенсивных пространственно-локализованных магнитоупругих волн в пластине. Установлены зависимости волновых параметров (амплитуды, скорости, ширины) от величины внешнего магнитного поля, показывающие, что с помощью магнитного поля можно управлять характеристиками локализованных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-08-00827, 09-08-00188, 08-08-97057-р\_Поволжье) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2013 гг.).

## Литература

1. *Knopoff L.* The interaction between elastic waves motion and a magnetic field in an electric conductor // *J. Geophys.* – 1955. – Res. 60. – P. 441-456.
2. *Кейлис-Борок В.И., Монин А.С.* Магнитоупругие волны и граница земного ядра // *Изв. АН СССР. Сер. Геофизика.* – 1959. – № 11. – С. 1529-1541.
3. *Гулевская Г.И., Киселев М.И., Кукса Ю.Г.* Электродинамический способ ультразвуковой дефектоскопии по сдвигу собственной частоты колебаний образца // *Дефектоскопия.* – 1969. – № 2. – С. 99-103.
4. *Шкарлет Ю.М.* О теоретических основах электромагнитных и электромагнитоакустических методов неразрушающего контроля // *Дефектоскопия.* – 1974. – № 4. – С. 12-20.
5. *Физика и техника мощного ультразвука. Т. 3: Физические основы ультразвуковой технологии.* – М.: Наука, 1970. – 668 с.
6. *Бабат Г.Н.* Индукционный разогрев металлов и его промышленное применение. – М.-Л.: Энергия, 1965. – 552 с.
7. *Агеев А.Н., Киселев М.И., Рыкалин Н.Н.* Оценка эффективности магнитозвукового разогрева металла в режиме бесконтактного индукционного возбуждения // *Физика и химия обработки материалов.* – 1970. – № 6. – С. 3-10.
8. *Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии.* – М.: Наука, 1989. – 328 с.
9. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
10. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф.* Магнитоупругость электропроводных тел. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
11. *Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А.* Распространение волн в электромагнитоупругих средах. – М.: Изд-во УРСС, 2003. – 334 с.
12. *Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н.* Электромагнитоупругие волны. – Ереван: Изд-во ЕГУ, 2006. – 492 с.
13. *Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М.* Нелинейные продольные магнитоупругие волны в стержне // *Нелинейный мир.* – 2009. – Т. 7, № 7. – С. 533-540.
14. *Ерофеев В.И., Мальханов А.О.* Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* – 2010. – № 1. – С.95-100.
15. *Erofeev V.I., Malkhanov A.O.* Localized magnetoelastic waves formation // *International Review of Mechanical Engineering.* – 2010. – V. 4, № 5. – P. 581-585.
16. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 519 с.
17. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 328 с.
18. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: Фролов К.В. (пред.). Колебания линейных систем. Т.1 / Под ред. Болотина В.В.* – М.: Машиностроение, 1999. – 504 с.
19. *Ерофеев В.И., Потапов А.И., Солдатов И.Н.* Нелинейные волны в упругих телах с пространственной дисперсией. / *Горьковский ун-т.* – Деп. в ВИНТИ 25.07.86. – № 5440-B86. – 224 с.
20. *Селезов И.Т., Корсунский С.В.* Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. – Киев: Наукова думка, 1991. – 200 с.
21. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2005. – V. 24. – P. 1217-1231.
22. *Press W.H., Teukolsky S.L., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical recipes in C. The art of scientific computing. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 680 p.

Поступила в редакцию 31.05.10

---

### Сведения об авторах

*Ерофеев Владимир Иванович*, дфмн, проф., зам. дир., Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (Нф ИМАШ РАН), 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, 85; E-mail: erf04@sinn.ru

*Землянухин Александр Исаевич*, дфмн, проф., зав. каф., Саратовский государственный технический университет (СГТУ), 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77; E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

*Катсон Владимир Маркович*, асп., СГТУ, E-mail: bobah311@yandex.ru

*Мальханов Алексей Олегович*, асп., Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ), 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23; E-mail: alexey.malkhanov@gmail.com