

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОДАТЛИВОСТЕЙ ПЛОСКОСТИ С РЕШЕТКОЙ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ РЕШЕТКИ

В.В. Мокряков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Материалы, обладающие пористой наноструктурой (фотонные кристаллы, пористый кремний, цеолиты и другие), сейчас активно исследуются и применяются в различных технологических процессах. Соответственно, представляют интерес их механические свойства, которые могут быть получены как связь средних напряжений с эффективными деформациями из решения задачи для упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой отверстий. В работе исследована зависимость эффективных упругих характеристик от направления приложенных нагрузок и геометрических параметров решётки, продемонстрирована их анизотропия. Также отмечены эффекты, отсутствующие в изотропных средах, но наблюдаемые в некоторых анизотропных, такие как аномально большие значения коэффициента Пуассона.

Ключевые слова: упругость, круглые отверстия, периодичность, эффективные податливости, анизотропия

STUDY OF THE DEPENDENCE OF EFFECTIVE COMPLIANCES OF A PLANE WITH AN ARRAY OF CIRCULAR HOLES ON ARRAY PARAMETERS

V.V. Mokryakov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Nano-pore structure materials (photonic crystals, porous silicon, zeolites, etc.) are used in different technological processes. Therefore, investigation of the mechanical properties of these materials is of considerable practical interest. These mechanical properties are represented by the relationship between average stresses and effective strains, which can be obtained from the solution of the problem for elastic plane. In this paper, we employ the model of an elastic plane having a biaxial periodic system of holes to analyze the dependence of the effective elastic parameters on the direction of applied loads and the geometrical characteristics of the system. Parameter anisotropy is demonstrated. The abnormally high values of Poisson's ratio, which are impossible in isotropic media but observed in some anisotropic media, are found.

Keywords: elasticity, circular holes, periodicity, effective compliances, anisotropy

1. Введение

Сейчас всё большее внимание привлекают материалы, содержащие наноструктуры пор, так называемые «сверхрешетки» — двоякопериодические системы отверстий, пор или каналов. Характерный диаметр полостей варьируется от нанометрового масштаба (цеолиты) до сотен нанометров (фотонные кристаллы, пористый кремний). Расстояние между полостями при этом, как правило, сравнимо с диаметром полостей.

Фотонный кристалл — материал, коэффициент преломления которого меняется периодически в пространственных направлениях. Известны фотонные кристаллы естественного происхождения как неорганического (некоторые разновидности опалов), так и органического (обнаружены на крыльях бабочек-парусников). Возможно создание фотонных кристаллов и искусственным путём, например протравливанием

периодической системы полостей в прозрачном для соответствующего излучения материале. Благодаря соизмеримости периода решетки с длиной волны излучения фотонные кристаллы обладают уникальными оптическими свойствами (во многом аналогичными полупроводниковым) и вследствие этого сегодня находят применение в различных областях, в частности в оптронике.

Пористый кремний впервые получен Артуром Улиром и Ингеборгой Улир (Arthur Uhlir Jr., Ingeborg Uhlir) в 1956 году. Он обладает рядом уникальных свойств, таких как фото- и электролюминесценция, низкая теплопроводность, широкий диапазон величин удельного сопротивления (10^{-2} – 10^{11} Ом·см), а также способность к воспламенению и детонации в присутствии окислителя при определённых воздействиях. Все эти свойства — следствие наличия в пористом кремнии периодических систем отверстий, которые образуются в результате различных процессов обработки поверхности кремниевых пластин, обычно — травления.

Цеолиты — силикаты с нанопористой структурой, как природного происхождения, так и искусственно синтезированные (стильбит, клиноптилолит, морденит, жожазит, шабазит, хлоросодалит, натролит, пентасилы, VPI-5, MCM-41 и другие), широко используются в химии каталитических, адсорбционных, ионно-обменных процессов, в том числе в крекинге нефтяных фракций, синтезе углеводородов, производстве моющих средств. Кристаллическая структура цеолитов образует периодические системы каналов субмолекулярного диаметра, благодаря чему цеолиты также называют молекулярными ситами, поскольку они обладают свойством пропускать или адсорбировать только определенные вещества.

Многочисленные приложения перечисленных материалов к технологическим процессам требуют детального изучения их механических свойств. Уникальные качества нанопористых материалов обуславливаются их внутренней структурой и при ее разрушении значительно ухудшаются или вовсе исчезают. Соответственно, важную роль приобретает правильная оценка напряжённо-деформированного состояния, возникающего под действием тех или иных нагрузок. В частности, особое значение имеет корректный расчёт эффективных упругих характеристик материала; известен феномен их анизотропии.

Ряд характерных особенностей механического поведения таких материалов можно описать в рамках плоской задачи теории упругости, рассматривая их в виде плоскости, ослабленной двоякопериодической системой отверстий. Известно, что двоякопериодические структуры обладают ярко выраженной анизотропией свойств, в том числе и упругих, а эффективные упругие характеристики решетки могут существенно отличаться от упругих характеристик матрицы.

Поле напряжений, создаваемое одиночным круговым отверстием в упругой плоскости при произвольном нагружении, хорошо изучено. Известно точное аналитическое решение (см., например [1, 2]) такой задачи при произвольной нагрузке на контуре отверстия и на бесконечности. Это решение может быть применено к материалу при достаточно редко расположенных в материале порах. Однако при характерном расстоянии между отверстиями, сравнимом с их диаметром (именно такой материал рассматривается в настоящей работе), влияние отверстий друг на друга вносит значительные искажения в поля напряжений.

Уже для двух круговых отверстий аналитическое решение представляет серьезную проблему. Кроме того, наличие решетки отверстий порождает свои сложности, такие как необходимость использования ζ -функции Римана в интегральных ядрах сингулярных граничных интегральных уравнений [3]. Изучению задачи расчета напряжений для плоскости с периодически и двоякопериодически расположенными отверстиями или включениями (группами отверстий или включений) и определению эффективных упругих характеристик большое внимание уделено в работе [4].

В [5] для расчета напряженно-деформированного состояния плоскости с круговыми отверстиями предложен метод мультипольных разложений. Особенность этого метода состоит в том, что решение задачи ищется в виде комбинации мультиполей — элементарных упругих полей деформаций, создаваемых точечными дефектами различной структуры. Каждый член разложения имеет конкретный физический смысл и отражает вклад в общее поле той или иной элементарной деформации. Развитию метода мультипольных разложений для случая системы сферических пор в упругом континууме посвящена работа [6].

В данной работе метод мультипольных разложений предлагается продолжить на решение задачи определения эффективных упругих характеристик материала упругой плоскости с двоякопериодической решёткой. Будет исследована зависимость эффективных податливостей и коэффициента Пуассона от расстояния между отверстиями решётки и направления приложенных нагрузок (для случая квадратной решётки) и продемонстрирована их анизотропия; выявлено существование значений эффективного коэффициента Пуассона больших $1/2$ (подобные эффекты известны для некоторых анизотропных материалов, см. например [7–9]); отмечено возникновение продольных деформаций при приложении касательных нагрузок и, наоборот, сдвиговых деформаций при нормальных нагрузках.

2. Постановка задачи

Рассматривается бесконечная упругая плоскость, содержащая систему одинаковых круговых отверстий $L_{l,m}$ радиуса R (в данной работе радиус полагается единичным) (Рис. 1). Центры отверстий образуют двоякопериодическую решетку с произвольными

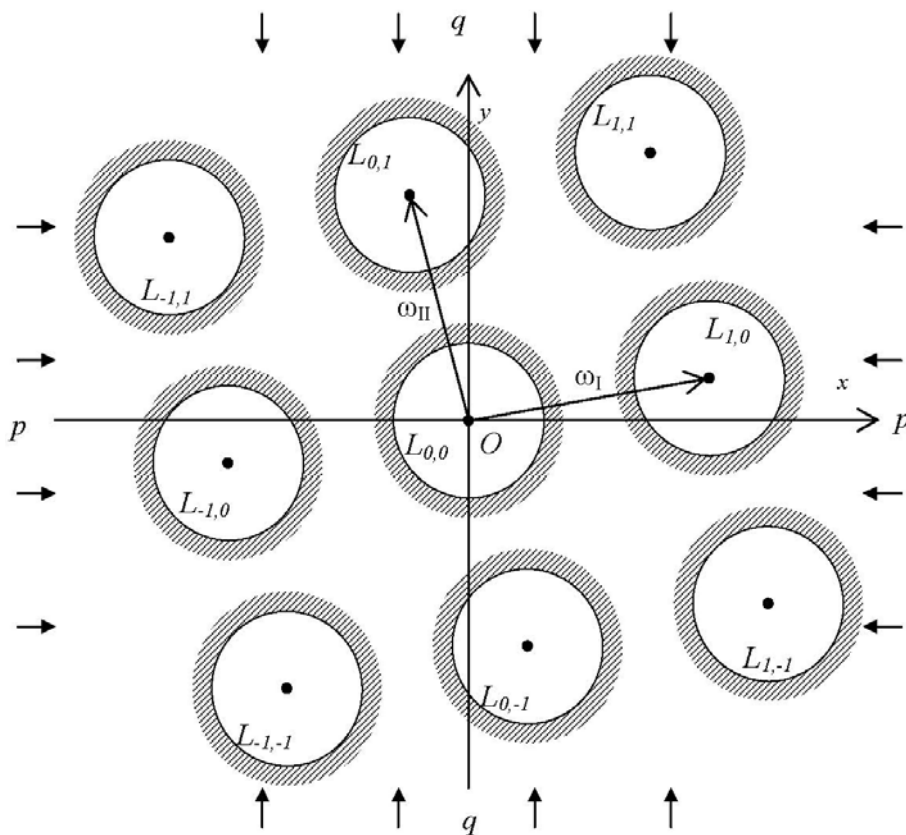


Рис. 1. Геометрическое условие задачи

периодами ω_I и ω_{II} . Нагрузка на контурах отверстий отсутствует. Требуется найти эффективные упругие характеристики среды (связь средних напряжений с эффективными деформациями) и исследовать их зависимость от геометрических параметров решётки.

3. Основные положения

В [5] изложен метод мультиполюльных разложений в применении к задаче с двумя отверстиями в упругой плоскости. Метод основан на теории комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили, и его суть состоит в том, что функция смещения $g'(t)$ на каждом из контуров представляется в виде суммы мультиполюлей:

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n t^n, \quad (1)$$

где t — комплексная локальная координата точки на контуре. Тогда сингулярное граничное интегральное уравнение может быть преобразовано в систему линейных уравнений относительно комплексных коэффициентов разложения (набор которых однозначно описывает напряжённо-деформированное состояние плоскости).

Действуя по аналогии с [5] и используя свойства симметрии решётки, можно показать, что для определения коэффициентов разложения g_n получается следующая система уравнений:

$$g_{2k-1} = 0, \quad k \in Z; \quad (2)$$

$$-2g_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} " \frac{g_{-2n}}{(z_{lm}^0)^{2n}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} " \frac{\bar{g}_{-2n}}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2n}} = i \frac{p+q}{2}; \quad (3)$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} " \frac{g_{2n}}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(n+1)}} - 4 \sum_{l,m} " \frac{g_0}{(\bar{z}_{lm}^0)^2} + g_{-2} - \quad (4)$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} " \frac{\bar{g}_{-2n}}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(n+1)}} \left[2n \cdot |z_{lm}^0|^2 - (n+1)(2n+1) \right] = i \frac{p-q}{2};$$

$$-g_{2k} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} " \frac{g_{-2n}}{(z_{lm}^0)^{2(k+n)}} \frac{(2(k+n)-1)!}{(2k)!(2n-1)!} = 0, \quad k \geq 1; \quad (5)$$

$$g_{-2k} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} " g_{2n} \frac{1}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(k+n)}} \frac{(2(k+n)-1)!}{(2k-2)!(2n+1)!} - 4 \sum_{l,m} " g_0 \frac{2k-1}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2k}} - \quad (6)$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} " \bar{g}_{-2n} \frac{1}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(k+n)}} \left[\frac{(2(k+n)-2)!}{(2k-2)!(2n-1)!} \cdot |z_{lm}^0|^2 - \frac{(2k+2n)!}{(2k)!(2n)!} (2k-1) \right] = 0, \quad k \geq 2.$$

Здесь $z_{lm}^0 = l \cdot \omega_I + m \cdot \omega_{II}$ — координаты центров отверстий; k — целое число; Z — множество целых чисел; знак $\sum_{l,m} "$ обозначает суммирование по всем парам индексов ($l = 0, m = 1 \dots +\infty$) и ($l = 1 \dots +\infty, m = -\infty \dots +\infty$) (таким образом, учитывается ровно

половина слагаемых, причем среди них нет противоположных пар); надчеркивание показывает комплексное сопряжение.

Свободный член системы содержит величины p и q , в [5] имеющие смысл главных напряжений на бесконечности. Но в случае периодической решетки на бесконечности отсутствует сплошная среда, а следовательно, и однородное напряженное поле. Отсюда вытекает, что напряжения, заданные на бесконечности, в такой постановке не имеют смысла. Однако для периодической решетки можно говорить о средних по периоду напряжениях. Таким образом, в рассматриваемой задаче необходимо подобрать величины p и q так, чтобы средние по каждому из периодов напряжения имели требуемые значения. Это можно сделать, воспользовавшись принципом суперпозиции.

Сначала решим систему (2)–(6) отдельно для каждого вида элементарного (единичного) нагружения: горизонтального растяжения, вертикального растяжения, сдвига (поворота решетки на 45°). Найдя в каждом случае средние по периодам напряжения, вычислим их линейную комбинацию, которая даст необходимые значения.

По определению эффективные податливости периодической системы связывают средние деформации со средними напряжениями:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что податливость S_{ijkl} равна деформационному отклику $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ на единичное воздействие $\tilde{\sigma}_{kl}$ при остальных равных нулю напряжениях (в частности это означает, что задачу нужно решать при плоском напряженном состоянии: $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, где ν — коэффициент Пуассона). Согласно [3] для задачи со свободными от нагрузок контурами выполняются следующие соотношения:

$$\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{S} \operatorname{Im} \int_L u(t) d\bar{t} + \frac{1-\nu}{E} (\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22}) = \frac{1}{S} \operatorname{Im} \int_L u(t) d\bar{t} + 2 \frac{1-\nu}{E} \tilde{\sigma}; \quad (8)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{11} - \tilde{\varepsilon}_{22} + 2i\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{i}{S} \int_L u(t) dt + \frac{1+\nu}{E} (\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{\sigma}_{22} + 2i\tilde{\sigma}_{12}) = \frac{i}{S} \int_L u(t) dt + 2 \frac{1+\nu}{E} (\tilde{s} + i\tilde{t}). \quad (9)$$

Здесь $S = \operatorname{Im}(\bar{\omega}_I \cdot \omega_{II})$ — площадь основного параллелограмма решетки; L — контур отверстия (индексы опущены, так как интегралы не зависят от них); i — мнимая единица.

Поскольку величина смещений $u(t)$ вычисляется через функцию смещений $g(t)$ (см. [5]), то записав

$$\int_L u(t) dt = i \frac{1+\kappa}{2G} \int_L g(t) dt = \frac{4i}{E} \int_L g(t) dt = \frac{4i}{E} \cdot 2\pi i g_{-2} = -\frac{8\pi}{E} g_{-2}, \quad (10)$$

$$\int_L u(t) d\bar{t} = \frac{4i}{E} \int_L g(t) d\bar{t} = -\frac{4i}{E} \int_L g(t) \frac{dt}{t^2} = \frac{4i}{E} \cdot 2\pi i g_0 = -\frac{8\pi}{E} g_0, \quad (11)$$

получим:

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}}{2} = \frac{1-\nu}{E} \tilde{\sigma} - \frac{4\pi}{ES} \operatorname{Im} g_0, \quad (12)$$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{11} - \tilde{\varepsilon}_{22}}{2} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{s} + \frac{4\pi}{ES} \operatorname{Im} g_{-2}, \quad (13)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\tau} - \frac{4\pi}{ES} \operatorname{Re} g_{-2}. \quad (14)$$

В формулах (10)–(14) приняты обозначения: E и G — модуль упругости и модуль сдвига; $\tilde{\sigma}$, \tilde{s} , $\tilde{\tau}$ — компоненты средних напряжений в решетке.

Отсюда следует, что средние деформации складываются из двух частей. Первое слагаемое соответствует однородной деформации сплошной плоскости под воздействием напряжений, равных средним $\tilde{\sigma}$, \tilde{s} , $\tilde{\tau}$. Второе слагаемое — это поправка, которую привносит наличие отверстий. Отметим, что поправка определяется всего лишь двумя членами мультипольного разложения. Причем поправка к средней объемной деформации определяется членом $\operatorname{Im} g_0$, описывающим всестороннее растяжение/сжатие контура, поправки же к сдвиговым компонентам средней деформации обуславливается членом g_{-2} , описывающим деформацию чистого сдвига контура.

Исходя из принципа суперпозиции, представим члены мультипольного разложения как линейные комбинации $\tilde{\sigma}$, \tilde{s} , $\tilde{\tau}$:

$$g_k = g_k^\sigma \tilde{\sigma} + g_k^s \tilde{s} + g_k^\tau \tilde{\tau}. \quad (15)$$

Подставив эти комбинации в выражения для средних деформаций, получим

$$\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22} = \left(2 \frac{1-\nu}{E} - \frac{8\pi}{ES} \operatorname{Im} g_0^\sigma \right) \cdot \tilde{\sigma} - \frac{8\pi}{ES} \operatorname{Im} g_0^s \cdot \tilde{s} - \frac{8\pi}{ES} \operatorname{Im} g_0^\tau \cdot \tilde{\tau}, \quad (16)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{11} - \tilde{\varepsilon}_{22} = \frac{8\pi}{ES} \operatorname{Im} g_{-2}^\sigma \cdot \tilde{\sigma} + \left(2 \frac{1+\nu}{E} + \frac{8\pi}{ES} \operatorname{Im} g_{-2}^s \right) \cdot \tilde{s} + \frac{8\pi}{ES} \operatorname{Im} g_{-2}^\tau \cdot \tilde{\tau}, \quad (17)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = -\frac{4\pi}{ES} \operatorname{Re} g_{-2}^\sigma \cdot \tilde{\sigma} - \frac{4\pi}{ES} \operatorname{Re} g_{-2}^s \cdot \tilde{s} + \left(\frac{1+\nu}{E} - \frac{4\pi}{ES} \operatorname{Re} g_{-2}^\tau \right) \cdot \tilde{\tau}. \quad (18)$$

Здесь $\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22}}{2}$; $\tilde{s} = \frac{\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{\sigma}_{22}}{2}$; $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_{12}$ — компоненты средних напряжений в решётке; $g_n^{\sigma,s,\tau}$ — коэффициенты разложения, вычисленные для соответствующих единичных средних напряжений ($-\infty < n < +\infty$).

Эффективные податливости определяются соотношением (7), с учетом которого запишем:

$$S_{1122} = \frac{1}{E} \left(-\nu + \frac{2\pi}{S} \left(\operatorname{Im} g_{-2}^\sigma - \operatorname{Im} g_0^\sigma - \operatorname{Im} g_{-2}^s + \operatorname{Im} g_0^s \right) \right),$$

$$S_{1112} = S_{1121} = \frac{2\pi}{ES} \left(\operatorname{Im} g_{-2}^\tau - \operatorname{Im} g_0^\tau \right),$$

$$S_{2211} = \frac{1}{E} \left(-\nu - \frac{2\pi}{S} \left(\operatorname{Im} g_{-2}^\sigma + \operatorname{Im} g_0^\sigma + \operatorname{Im} g_{-2}^s + \operatorname{Im} g_0^s \right) \right),$$

$$S_{2222} = \frac{1}{E} \left(1 - \frac{2\pi}{S} \left(\operatorname{Im} g_{-2}^\sigma - \operatorname{Im} g_{-2}^s + \operatorname{Im} g_0^\sigma - \operatorname{Im} g_0^s \right) \right),$$

$$S_{2212} = S_{2221} = -\frac{2\pi}{ES} \left(\operatorname{Im} g_{-2}^\tau + \operatorname{Im} g_0^\tau \right),$$

$$S_{1211} = S_{2111} = -\frac{2\pi}{ES} (\operatorname{Re} g_{-2}^{\sigma} + \operatorname{Re} g_{-2}^s),$$

$$S_{1222} = S_{2122} = -\frac{2\pi}{ES} (\operatorname{Re} g_{-2}^{\sigma} - \operatorname{Re} g_{-2}^s),$$

$$S_{1212} = S_{1221} = S_{2112} = S_{2121} = \frac{1}{E} \left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{2\pi}{S} \operatorname{Re} g_{-2}^{\tau} \right).$$

Полученные формулы использованы далее для расчета эффективных податливостей.

4. Зависимость эффективных податливостей от периода решётки

Были рассчитаны значения эффективных податливостей для различных углов ориентации ($\alpha = \arg \omega_1$) квадратной решётки ($\omega_{II} = i\omega_I$). В силу симметрии задачи рассмотрены углы ориентации от 0 до 45° включительно. Результаты расчётов представлены на рисунке 2.

Далее, для удобства введём характеристику квадратной решетки, называемую расстоянием между соседними отверстиями: $d = |\omega_1| - 2R$. Отметим, что при d , равном десяти радиусам и более, анизотропия в распределении эффективных податливостей практически не проявляется. При уменьшении расстояния анизотропия начинает проявлять себя в том, что характер распределения становится синусоидальным с экстремумами при углах ориентации 0° и 45° , или же при $22,5^\circ$ (для «смешанных» податливостей типа S_{1112}). При дальнейшем сближении отверстий синусоидальный характер распределения нарушается, появляется локальный максимум в области $\approx 25\text{--}28^\circ$ ($\approx 17\text{--}20^\circ$ для S_{1212}) и локальный минимум в области $\approx 28\text{--}33^\circ$ ($\approx 12\text{--}17^\circ$ для S_{1212}). У «смешанных» податливостей экстремум при $22,5^\circ$ становится более отчётливым.

На рисунке 3 представлены зависимости податливости на продольное растяжение S_{1111} и разницы ΔS_{1111} между S_{1111} и податливостью матрицы от расстояния между отверстиями для различных ориентаций решётки. Очевидно, что с увеличением расстояния податливость будет стремиться к единице, то есть к податливости матрицы. Поэтому больший интерес представляет поведение разницы ΔS_{1111} . Из графика в двойных логарифмических координатах (Рис. 3, б) можно видеть, что зависимость $\Delta S_{1111}(d)$ стремится к степенной функции $\Delta S_{1111}(d) \approx E^{-1} \cdot 3,22 \cdot d^{-1,67}$. Наиболее близко к этой функции поведение податливости при диагональной ориентации решётки (при 45°).

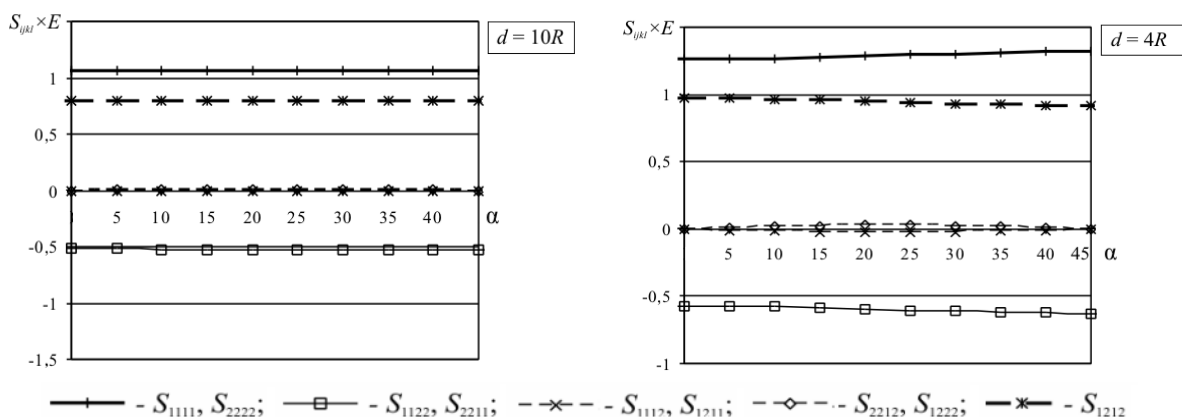


Рис. 2. Зависимость эффективной податливости решётки S_{ijkl} от угла поворота решетки α (град) при различных значениях расстояния между отверстиями

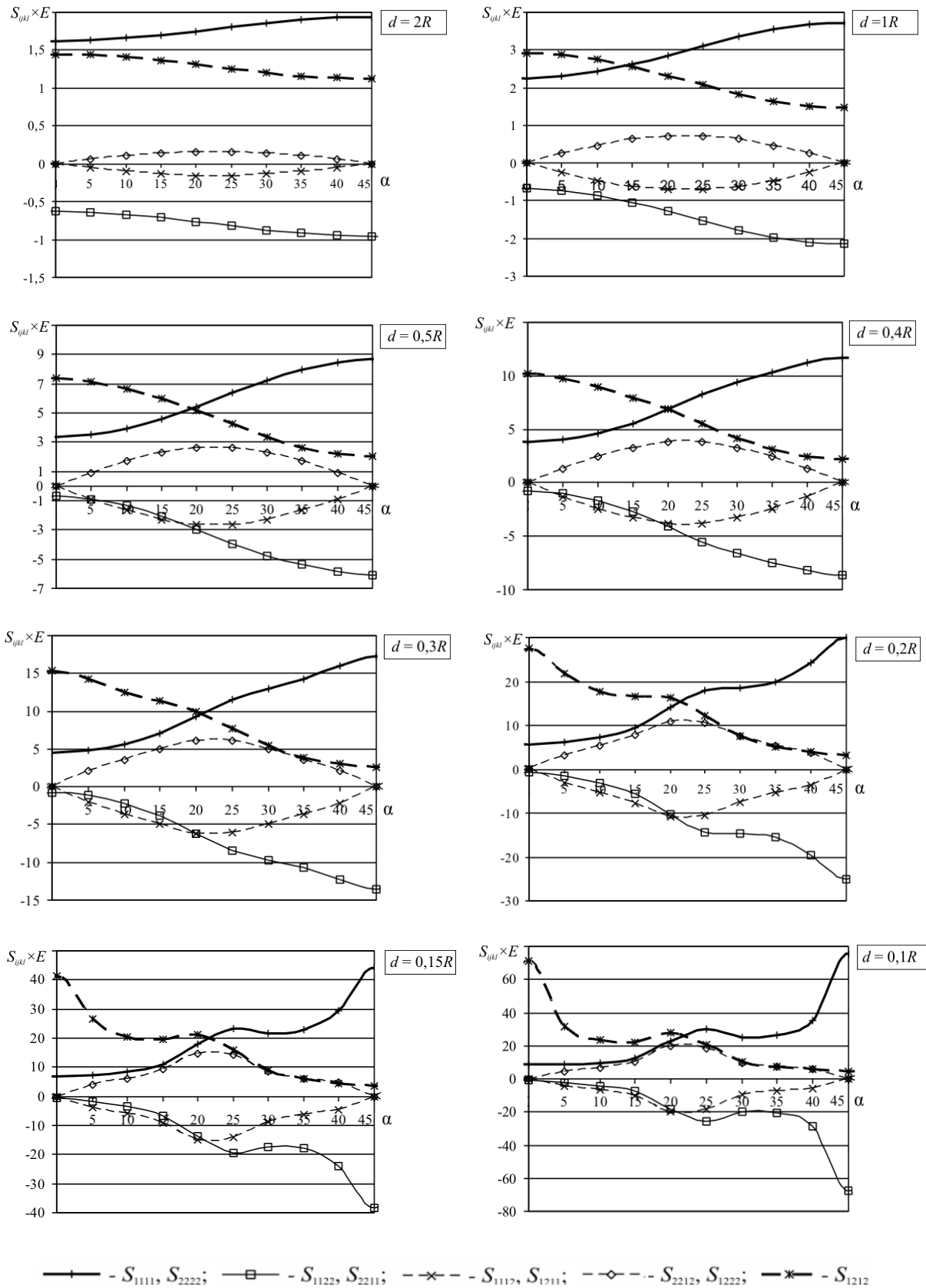


Рис. 2. Продолжение

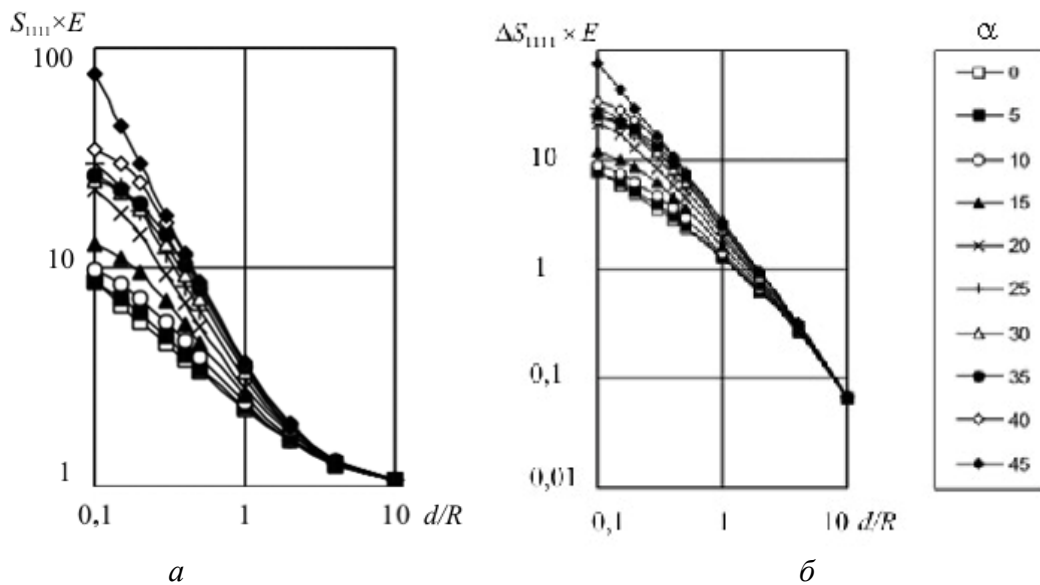


Рис. 3. Зависимость S_{1111} (а) и ΔS_{1111} (б) от расстояния между отверстиями для различных ориентаций решётки α (град)

5. Зависимость эффективного коэффициента Пуассона от периода решётки

Представляет интерес эффективный коэффициент Пуассона $\nu_{\text{eff}} = -S_{1122}/S_{1111}$ и его зависимость от коэффициента Пуассона матрицы ν . Значения ν_{eff} при различных ν для разной геометрии решётки представлены на рисунке 4.

Отметим, что эффективный коэффициент Пуассона демонстрирует поведение, аналогичное поведению S_{1111} . При $d > 10R$ анизотропия практически не проявляется, ν_{eff} постоянен и близок к ν матрицы. С уменьшением расстояния анизотропия обнаруживает себя синусоидальной зависимостью от ориентации решётки. Как только начинает выполняться условие $d < 0,5R$, синусоидальный характер нарушается, появляется локальный максимум при ориентации $\approx 24-26^\circ$ и локальный минимум при ориентации $\approx 33^\circ$. Уменьшение расстояния d снижает влияние коэффициента Пуассона матрицы ν ; разброс значений уменьшается (особенно для диагонального расположения решётки), так что значение ν_{eff} начинает в подавляющей степени определяться ориентацией решётки.

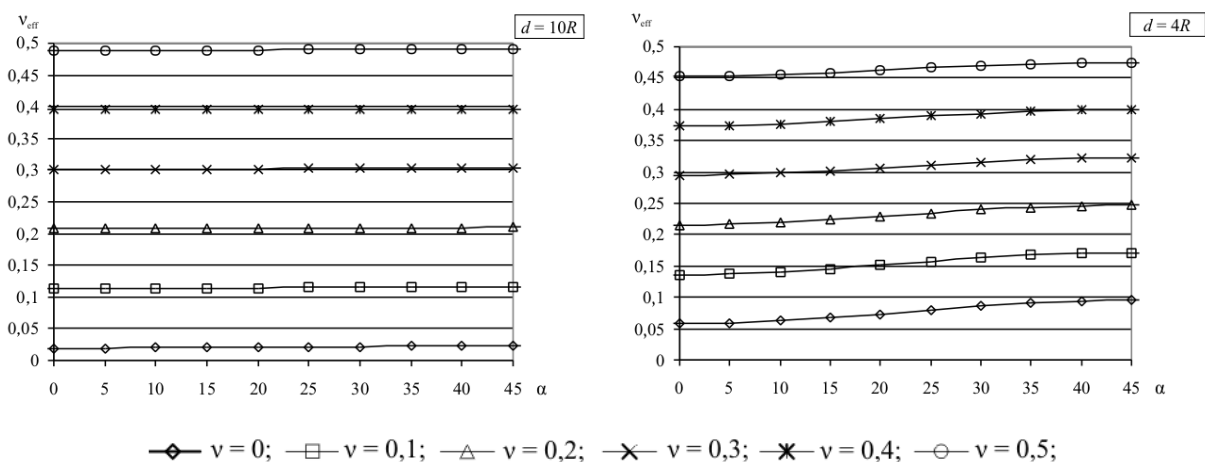


Рис. 4. Эффективный коэффициент Пуассона решётки ν_{eff} в зависимости от угла ориентации α (град) при различных значениях коэффициента Пуассона матрицы ν

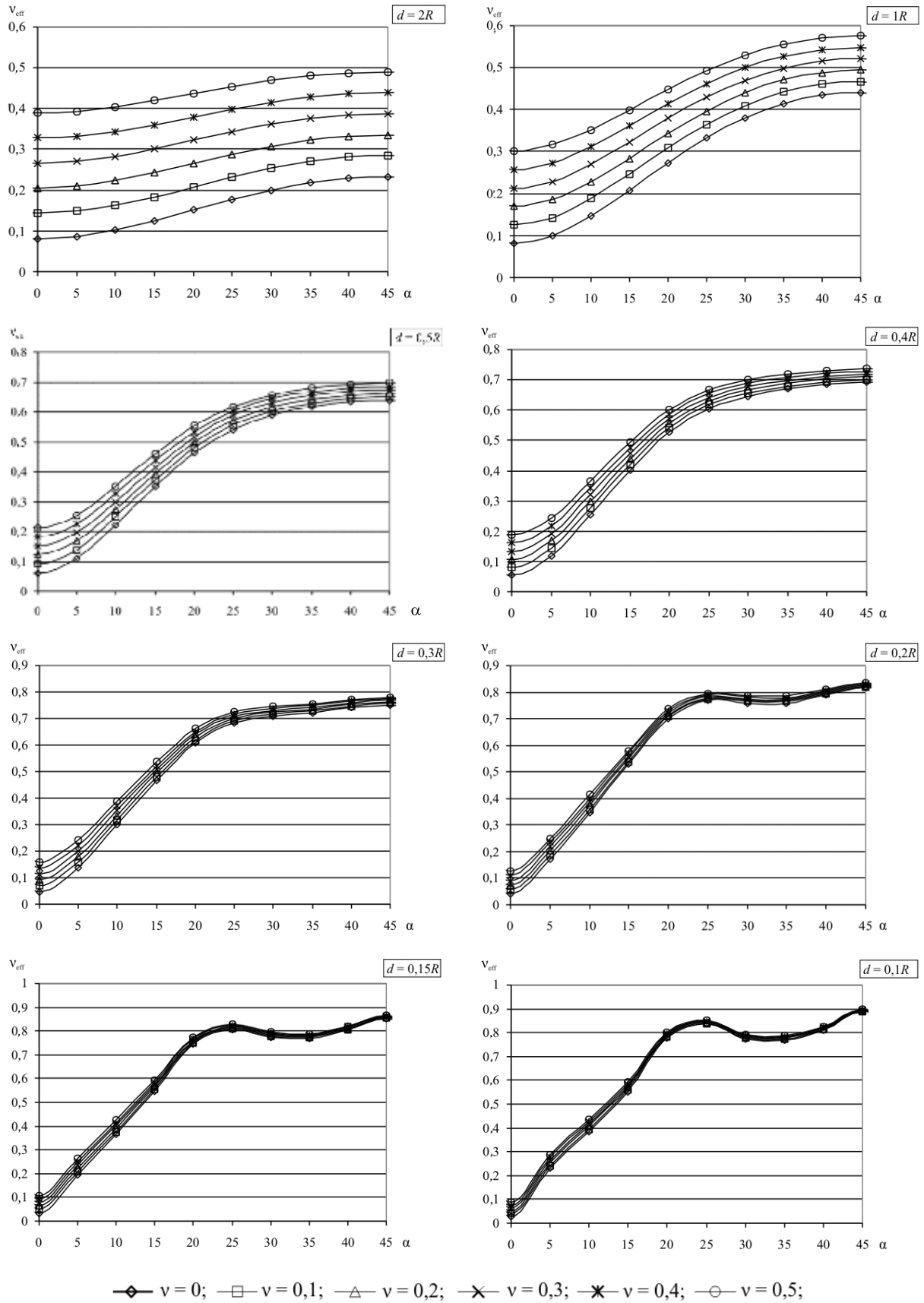


Рис. 4. Продолжение

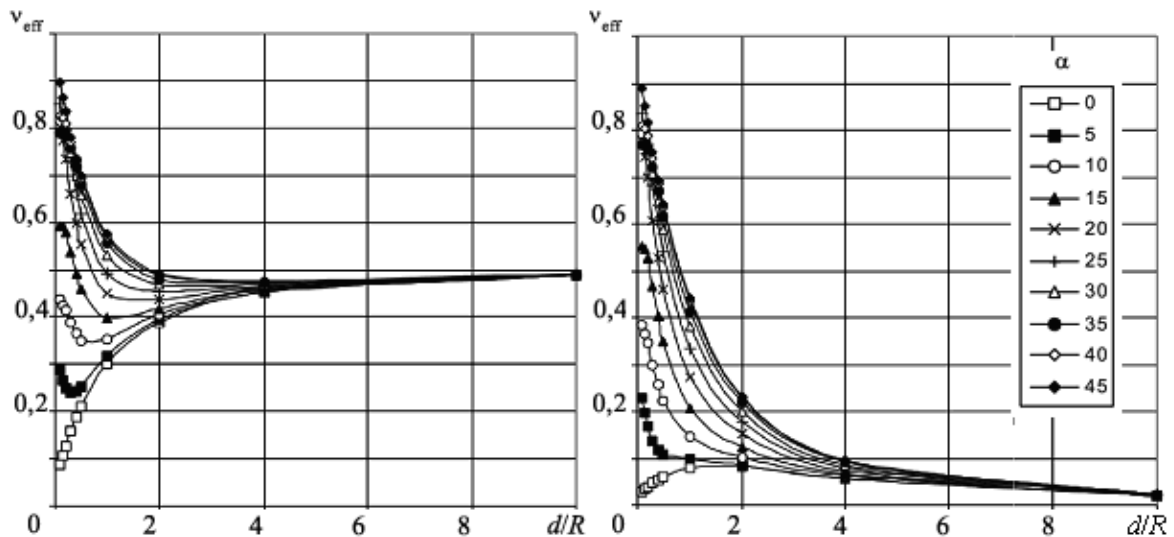


Рис. 5. Зависимость ν_{eff} от расстояния между отверстиями для значений коэффициента Пуассона матрицы $\nu = 0,5$ (а) и $\nu = 0$ (б) и различных ориентаций решётки α (град):

На рисунке 5 представлены графики зависимостей ν_{eff} от расстояния между отверстиями для коэффициентов Пуассона матрицы равных 0,5 и 0 соответственно. Из графиков видно, что зависимости могут иметь довольно сложный характер. Так, например, в случае $\nu = 0,5$ эффективный коэффициент Пуассона при уменьшении расстояния d сначала уменьшается, затем, достигая минимума при соотношении d/R от 0 до 4, начинает расти (за исключением ориентации решётки 0°). Таким образом, если известно направление прилагаемых к решётке нагрузок, то становится возможным вычисление геометрических характеристик системы, при которых поперечная деформация при продольном растяжении/сжатии будет минимально возможной.

Нельзя не отметить, что при $d < 2R$ существуют широкие области значений ориентации решётки, для которых ν_{eff} превышает максимальное для изотропных материалов значение 0,5. Подобное поведение известно для некоторых анизотропных материалов. В работах [7–9] приведён обзор ряда веществ с аномальными значениями эффективного коэффициента Пуассона ($\nu_{\text{eff}} > 0,5$ или $\nu_{\text{eff}} < 0$), а также дается теоретическое обоснование данного эффекта. В частности показано, что причиной аномалии является структурная особенность кристаллической решётки данных материалов.

6. Заключение

В представленной работе исследовано поведение эффективных податливостей и эффективного коэффициента Пуассона упругой плоскости с двоякопериодической системой круговых отверстий.

Продемонстрирована анизотропия эффективных упругих характеристик. Выделены три области значений отношения d/R , в которых характер анизотропии существенно различается. В области $d/R \geq 10$ анизотропия почти не проявляется (хотя эффективные упругие характеристики уже могут заметно отличаться от характеристик матрицы). При $0,5 \leq d/R \leq 10$ анизотропия носит выраженный синусоидальный характер. В случае $d/R \leq 0,5$ синусоидальный характер нарушается и, если ориентация решётки отлична от продольной (0°) и диагональной (45°), появляются локальные экстремумы.

Исследована разница между эффективной продольной податливостью и продольной податливостью матрицы, выявлен степенной характер зависимости этой разницы от отношения d/R .

Продемонстрировано снижение влияния коэффициента Пуассона матрицы на эффективный коэффициент Пуассона: при уменьшении расстояния между отверстиями величина ν_{eff} в подавляющей степени определяется выбранной ориентацией решётки. При этом диапазон значений углов ориентации, в котором $\nu_{\text{eff}} > 0,5$, довольно широк. Подобные аномально высокие значения эффективного коэффициента невозможны для изотропных сред, но обнаружены для некоторых анизотропных материалов.

Дальнейшее развитие темы возможно, в частности, в направлении распространения задачи на упругое пространство с использованием метода мультипольного разложения для трёхмерного случая [6].

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту РАН Р.В. Гольдштейну за ценные обсуждения и рекомендации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00696).

Литература

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 323с.
3. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
4. Григорюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
5. Мокряков В.В. Применение метода мультиполей для решения задачи о двух близко расположенных отверстиях // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – № 5. – С. 129-145.
6. Goldstein R.V. and Shushpannikov P.S. Application of the method of multipole expansions in the 3D-elasticity problem for a medium with ordered system of spherical pores // ZAMM. – 2009. – V. 89, N. 6. – P. 504-510.
7. Городцов В.А., Лисовенко Д.С. К механике углеродных и других слоистых наносуов // Инж. физика. – 2009. – № 4. – С. 36-38.
8. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Об отрицательности коэффициента Пуассона для анизотропных материалов // ДАН. – 2009. – Т. 429, № 5. – С. 614-616.
9. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Ауксетическая механика кристаллических материалов // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – №4. – С. 43-62.
10. Williams J.J., Evans K.E., Walton R.I. On the elastic constants of the zeolite chlorosodalite // App. Phys. Lett. – 2006. – V. 88, N. 2 – P. 021914.
11. Sanchez-Valle C., Sinogeikin S.V., Lethbridge Z.A.D., Walton R.I., Smith C.W., Evans K.E., Bass J.D. Brillouin scattering study on the single-crystal elastic properties of natrolite and analcime zeolites // J. Appl. Phys. – 2005. – V. 98, N. 5. – P. 053508.
12. Astala R., Auerbach S.M., Monson P.A. Normal mode approach for predicting the mechanical properties of solids from first principles: Application to compressibility and thermal expansion of zeolites // Phys. Rev. B. – 2005. – V. 71, N. 1. – P. 014112.

Поступила в редакцию 20.05.10

Сведения об авторе:

Мокряков Вячеслав Викторович, кфмн, нс, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), 119526, Москва, пр. Вернадского, д. 101-1; E-mail: mokr@ipmnet.ru