

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ КОНУСА С НЕГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Т.О. Корепанова, В.П. Матвеевко, Н.В. Севодина

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

Рассматриваются варианты метода построения собственных решений линейной теории упругости для полубесконечного конуса при наличии на его боковой поверхности образующих, где нарушается гладкость поверхности или имеет место смена типа краевых условий. Приводятся результаты вычислений показателей сингулярности напряжений в вершине кругового конуса со смешанными граничными условиями на боковой поверхности и для конуса с негладкой боковой поверхностью.

*Ключевые слова:* сингулярность напряжений, конические тела, метод конечных элементов

## NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS SINGULARITIES AT THE APEX OF A CONE WITH UNSMOOTH LATERAL SURFACE

T.O. Korepanova, V.P. Matveenko and N.V. Sevodina

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

We consider two variants of construction of the eigensolutions of the linear theory of elasticity for a semi-infinite cone having generatrices on its lateral surface, where the surface smoothness is broken or where the boundary conditions are changed. This study presents numerical results concerning stress singularity indices at the apex of a circular cone with mixed boundary conditions on its lateral surface and for a cone with unsmooth lateral surface.

*Key words:* stress singularity, conic bodies, finite-element method

В работе [1] рассмотрен метод построения сингулярных решений линейной теории упругости для конических тел с гладкой боковой поверхностью и приведены численные результаты, определяющие характер сингулярности напряжений в вершине однородных и составных, круговых и некруговых конусов при различных граничных условиях на боковой поверхности конуса. Вместе с тем представляет интерес оценка напряжений в вершине при наличии на боковой поверхности конического тела областей, где имеет место или нарушение гладкости, или смена типа краевых условий. Подобные задачи для различных вариантов пространственных трещин рассматривались в работах [2–7].

В настоящей работе обсуждаются варианты численного построения собственных решений для различных конических тел с негладкой боковой поверхностью и приводятся новые результаты, свидетельствующие о наличии или отсутствии сингулярности напряжений в вершине и иллюстрирующие возможности используемых методов.

### 1. Метод решения

Рассматривается полубесконечный конус, на боковой поверхности которого имеются образующие, где нарушается гладкость боковой поверхности конуса или имеет

место смена типа краевых условий. Вершина конуса совпадает с центром сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$ , а основание перпендикулярно оси  $\theta = 0$ .

Для анализа сингулярности напряжений необходимо построить собственные решения задачи, совпадающие с известным в линейной теории упругости асимптотическим представлением решения в окрестности угловых точек [8]:

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^\lambda F_k(\theta, \varphi) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Такая форма представления решения использовалась при построении собственных решений для конусов с гладкой боковой поверхностью [1]. В трехмерной задаче условие  $-0,5 \leq \operatorname{Re} \lambda < 1$  определяет область сингулярных решений, которые приводят к бесконечным значениям напряжений в вершине конуса.

Необходимо заметить, что в рассматриваемых конических телах особые решения, связанные с появлением бесконечных напряжений, могут быть не только в вершине конуса, но и на образующих (ребрах), где нарушается гладкость поверхности или меняется тип граничных условий. Известно [9], что на этих особых линиях характер сингулярного решения определяется из решений задач плоско-деформированного состояния и антиплоской деформации для двумерного полубесконечного клина, который образуется касательными к боковой поверхности пространственного клина, проходящими через особую линию и лежащими в плоскости, перпендикулярной к этой линии.

Информация о характере сингулярного решения для двумерного клина может быть получена на основе анализа собственных решений [10], которые для плоско-деформированного состояния  $(u_r, u_\varphi)$  и для антиплоской деформации  $(u_z)$  имеют вид:

$$u_r = r^\beta \xi_r(\varphi), \quad u_\varphi = r^\beta \xi_\varphi(\varphi), \quad u_z = r^\beta \xi_z(\varphi). \quad (2)$$

Здесь  $r, \varphi$  — полярные координаты с центром в вершине клина, а ось  $z$  перпендикулярна плоскости клина. В этом случае собственные решения с  $0 \leq \operatorname{Re} \beta \leq 1$  являются сингулярными.

В работе [2] предлагается строить собственные решения, которые учитывают характер сингулярности на особых линиях боковой поверхности, следующим образом:

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^\eta \rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha_2} \dots \rho_j^{\alpha_j} \dots \rho_n^{\alpha_n} \xi_k(\theta, \varphi) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Здесь  $\rho_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) эквивалентно расстоянию от оси  $\theta = 0$  до  $j$ -й особой линии.

В качестве величины  $\alpha_j$  из всех собственных значений с  $\operatorname{Re} \beta_i < 1$  задач для плоского клина при плоско-деформированном состоянии и антиплоской деформации, определяющих сингулярность напряжений на соответствующем ребре конуса, выбирается собственное значение с наименьшей величиной  $\operatorname{Re} \beta_i$ . При этом если среди собственных решений для ребра  $j$  отсутствуют значения  $\beta_i$  с  $\operatorname{Re} \beta_i < 1$ , то множитель  $\rho_j^{\alpha_j}$  исключается из выражения (3).

Расстояние до ребра  $\rho_j$  в частном случае  $\theta_j = 0$  определяется соотношением

$$\rho_j(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta. \quad (4)$$

В общем случае расстояние  $\rho_j$  определяется по формуле:

$$\rho_j(r, \theta, \varphi) = r \sqrt{1 - [\cos \theta \cos \theta_j + \sin \theta \sin \theta_j \cos(\varphi - \varphi_j)]^2} \quad (5)$$

или

$$\rho_j(r, \theta, \varphi) = r \sqrt{f_j}. \quad (6)$$

С учетом (6) выражение для собственных решений (3) примет вид:

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^\lambda \sqrt{f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_j^{\alpha_j} \dots f_n^{\alpha_n}} \cdot \xi_k(\theta, \varphi) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Здесь  $\theta_j, \varphi_j$  — координаты  $j$ -й особой линии;  $\lambda = \eta + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j + \dots + \alpha_n$ .

Представление решения в виде (3) продиктовано следующим соображением. При наличии на боковой поверхности ребра, где может иметь место сингулярность, функции  $F_k(\theta, \varphi)$  должны эту сингулярность аппроксимировать. Численная аппроксимация функций  $F_k(\theta, \varphi)$  в дальнейшем отрицательно скажется на точности и сходимости численного метода. Например, в работе [11] показано, что при решении плоских задач методом конечных элементов погрешность в отсутствие сингулярности имеет порядок  $O(h^2)$ , а при наличии ( $\alpha = 0,5$ ) —  $O(\sqrt{h})$ , где  $h$  — характерный размер элемента. В связи с этим можно предположить, что выделение сингулярности из функций  $F_k(\theta, \varphi)$  повысит скорость сходимости численной процедуры.

Для обоснования выбора в качестве  $\alpha_j$  собственного значения с наименьшей величиной  $\operatorname{Re} \beta_i$  можно привести следующие соображения [2]. Пусть имеется одно ребро  $\theta = 0$ . Тогда при малых углах  $\theta$ , согласно (4),  $\rho = r\theta$  и функции  $F_k(\theta, \varphi)$  представляются как

$$F_k(\theta, \varphi) = \theta^\alpha \xi_k(\theta, \varphi), \quad (8)$$

где  $\alpha$  — наименьшее из собственных значений с  $\operatorname{Re} \alpha < 1$ . При другом условии, а именно  $\operatorname{Re} \alpha^* > \operatorname{Re} \alpha$ , (8) принимает вид:

$$F_k(\theta, \varphi) = \theta^{\alpha^*} \xi_k^*(\theta, \varphi). \quad (9)$$

Для аппроксимаций (8) и (9) напряжения пропорциональны следующим соотношениям:

$$\sigma_{ij} \sim \frac{\partial u_k}{\partial \theta} \sim \theta^{\alpha-1} \xi_k(\theta, \varphi); \quad \sigma_{ij} \sim \theta^{\alpha^*-1} \xi_k^*(\theta, \varphi). \quad (10)$$

Приравнивание этих соотношений дает

$$\xi_k^*(\theta, \varphi) = \theta^{\alpha-\alpha^*} \xi_k(\theta, \varphi).$$

Здесь функция  $\xi_k(\theta, \varphi)$  ограничена, а если взять  $\alpha^* > \alpha$ , то  $\xi_k^*(\theta, \varphi)$  становится неограниченной, и цель — исключить сингулярность из функций  $\xi_k(\theta, \varphi)$ , не достигается.

Метод построения решений при использовании представления (1) изложен в работе [1]. Для собственных решений вида (3) процедура аналогична. Эти решения должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (11)$$

и однородным граничным условиям в перемещениях

$$\mathbf{u} = 0 \quad (12)$$

или в напряжениях

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{n} \text{ div } \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u} = 0. \quad (13)$$

Здесь  $\nabla$  — оператор набла;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Подстановка собственных решений в уравнения равновесия приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций  $\xi_k(\theta, \varphi)$  и параметра  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} L_1(\lambda, \xi_k) = & f(\theta, \varphi) \left\langle (2(1-\nu)(\lambda^2 + \lambda - 2)\xi_1 + (\lambda - 3 + 4\nu) \left( \xi_2 \text{ctg } \theta + \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ & + (1-2\nu) \left( \text{ctg } \theta \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \varphi^2} \right) + (\lambda - 3 + 4\nu) \left( A \xi_2 + \frac{1}{\sin \theta} B \xi_3 \right) + \\ & \left. + (1-2\nu) \left[ \left( F + \frac{D}{\sin^2 \theta} \right) \xi_1 + 2A \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} + \frac{2B}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \right] \right\rangle = 0; \\ L_2(\lambda, \xi_k) = & f(\theta, \varphi) \left\langle \left[ \lambda(\lambda + 1)(1-2\nu) - \frac{2(1-\nu)}{\sin^2 \theta} \right] \xi_2 + (4 + \lambda - 4\nu) \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} - \right. \\ & - (3-4\nu) \frac{\text{ctg } \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} + 2(1-\nu) \left( \text{ctg } \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{1-2\nu}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \varphi^2} + \\ & + (\lambda + 4 - 4\nu) A \xi_1 + 2(1-\nu) F \xi_2 + \frac{1-2\nu}{\sin^2 \theta} D \xi_2 - (3-4\nu) \frac{\text{ctg } \theta}{\sin \theta} B \xi_3 + \frac{E}{\sin \theta} \xi_3 + \\ & \left. + 4(1-\nu) A \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + \frac{B}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} + \frac{A}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} + \frac{2(1-2\nu)}{\sin^2 \theta} B \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \right\rangle = 0; \\ L_3(\lambda, \xi_k) = & f(\theta, \varphi) \left\langle (1-2\nu) \left( \lambda^2 + \lambda - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \xi_3 + [\lambda + 4(1-\nu)] \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. + (3-4\nu) \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} + \frac{2(1-\nu)}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \theta \partial \varphi} + (1-2\nu) \left( \text{ctg } \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \theta^2} \right) + \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& + [\lambda + 4(1-\nu)] \frac{B}{\sin \theta} \xi_1 + \frac{1}{\sin \theta} [E + (3-4\nu)B \operatorname{ctg} \theta] \xi_2 + \frac{2(1-\nu)D}{\sin^2 \theta} \xi_3 + (1-2\nu)F \xi_3 + \\
& + \left. \frac{4(1-\nu)B}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} + \frac{A}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} + \frac{B}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + 2(1-2\nu)A \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $f(\theta, \varphi) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_j^{\alpha_j} \dots f_n^{\alpha_n}$ ;  $F = \operatorname{ctg} \theta \cdot A + C$ ;

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial \theta} \cdot \frac{\alpha_i}{f_i}; \quad B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \cdot \frac{\alpha_i}{f_i}; \quad C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial^2 f_i}{\partial \theta^2} - \left( \frac{\partial f_i}{\partial \theta} \right)^2 / f_i \right] \frac{\alpha_i}{f_i} + A^2$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial^2 f_i}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \right)^2 / f_i \right] \cdot \frac{\alpha_i}{f_i} + B^2; \quad E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial^2 f_i}{\partial \varphi \partial \theta} - \left( \frac{\partial f_i}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \right) / f_i \right] \cdot \frac{\alpha_i}{f_i} + A \cdot B.$$

Граничные условия (13) с учетом представления (7) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
M_1 & \equiv n_2 \left[ \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} + \xi_2(\lambda - 1) + \xi_1 A \right] + n_3 \left[ \frac{B}{\sin \theta} \xi_1 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} - \xi_3(1 - \lambda) \right] = 0; \\
M_2 & \equiv 2n_2 \left[ (1-\nu) \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + (1+\nu\lambda)\xi_1 + \nu \operatorname{ctg} \theta \xi_2 + \frac{\nu}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} + (1-\nu)A \xi_2 + \frac{\nu B}{\sin \theta} \xi_3 \right] + \\
& + n_3(1-2\nu) \left[ \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta \xi_3 + \frac{B}{\sin \theta} \xi_2 + \xi_3 A \right] = 0; \\
M_3 & \equiv 2n_3 \left[ (1+\nu\lambda)\xi_1 + (1-\nu) \operatorname{ctg} \theta \cdot \xi_2 + \nu \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{\sin \theta} \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} + B \xi_3 \right) + \nu A \xi_2 \right] + \\
& + (1-2\nu)n_2 \left[ \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta \xi_3 + A \xi_3 + \frac{B}{\sin \theta} \xi_2 \right] = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Полученные дифференциальные уравнения (14) записываются в слабой форме [11]. Для этого они умножаются на соответствующие вариации  $\delta \xi_k(\theta, \varphi)$  и интегрируются по области  $S$ , вырезаемой конусом на сфере:

$$\int_S \left[ \sum_{k=1}^3 L_k(\lambda, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \delta \xi_k(\theta, \varphi) \right] dS = 0. \tag{16}$$

Для решения уравнений (16) предлагается использовать процедуру метода конечных элементов (МКЭ). Конечно-элементная реализация этих уравнений достаточно сложна, так как требуется использование двумерных элементов, обеспечивающих, наряду с непрерывностью функций  $\xi_k$ , непрерывность их первых производных. В связи с этим проводятся тождественные преобразования с целью понижения порядка производных функций  $\xi_k$  в уравнении (16) и учитываются граничные условия (15):

$$\int_{\theta_\varphi} f(\theta, \varphi) \left\langle \left\{ 2(1-\nu)(\lambda^2 + \lambda - 2) \sin^2 \theta \xi_1 + (\lambda - 3 + 4\nu) \left( \sin \theta \cos \theta \xi_2 + \sin^2 \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \Big) \Big\} \psi_1 - (1-2\nu) \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} \psi_1 \right) + \\
 & + \left\{ (\lambda - 3 + 4\nu)(A \sin^2 \theta \xi_2 + B \sin \theta \xi_3) + (1-2\nu) \left[ \left( F \xi_1 + A \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} \right) \sin^2 \theta + D \xi_1 + B \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \right] \right\} \psi_1 + \\
 & + \left\{ \left[ \lambda(\lambda + 1)(1-2\nu) \sin^2 \theta - 2(1-\nu) \right] \xi_2 + (4 + \lambda - 4\nu) \sin^2 \theta \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} - (3-2\nu) \cos \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \right\} \psi_2 - \\
 & - 2(1-\nu) \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \frac{d\psi_2}{d\theta} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \psi_2 \right) - (1-2\nu) \left( \sin \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right) - \\
 & - 2\nu \left( \sin \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) + \left\{ (\lambda + 4 - 4\nu) \sin^2 \theta A \xi_1 + 2(1-\nu) F \sin^2 \theta \xi_2 + (1-2\nu) D \xi_2 - \right. \\
 & - (3-4\nu) B \cos \theta \xi_3 + E \sin \theta \xi_3 + 2(1-\nu) A \sin^2 \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + 2\nu B \sin \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} + \\
 & \left. + (1-2\nu) \left( A \sin \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} + B \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \right) \right\} \psi_2 + \left\{ (1-2\nu)(\lambda^2 \sin^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta - 1) \xi_3 + \right. \\
 & + \left[ \lambda + 4(1-\nu) \right] \sin \theta \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + 2(1-\nu) \cos \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \Big\} \psi_3 - 2(1-\nu) \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} - 2\nu \sin \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} - \\
 & - (1-2\nu) \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} \frac{d\psi_3}{d\theta} + \sin \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \right) - (1-2\nu) \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} \psi_3 + \\
 & + \left\{ \left[ \lambda + 4(1-\nu) \right] B \sin \theta \xi_1 + \left[ E \sin \theta + (3-4\nu) B \cos \theta \right] \xi_2 + 2(1-\nu) D \xi_3 + (1-2\nu) F \sin^2 \theta \xi_3 + \right. \\
 & \left. + 2(1-\nu) B \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} + 2\nu A \sin \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} + (1-2\nu) \left( A \sin^2 \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} + B \sin \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \right) \right\} \psi_3 \Big) d\theta d\varphi + \\
 & + \int_l f(\theta, \varphi) \left\langle (1-2\nu) \left\{ n_2 \left[ (1-\lambda) \xi_2 - A \xi_1 \right] \sin \theta + n_3 \left[ \sin \theta \xi_3 (1-\lambda) - B \xi_1 \right] \right\} \psi_1 - \right. \\
 & - \left\{ 2n_2 \left[ (1+\nu\lambda) \sin \theta \xi_1 + (\nu \cos \theta + (1-\nu) A \sin \theta) \xi_2 + \nu B \xi_3 \right] + \right. \\
 & + (1-2\nu) n_3 \left[ -\cos \theta \xi_3 + B \xi_2 + \xi_3 A \sin \theta \right] \Big\} \psi_2 - \\
 & - \left\{ 2n_3 \left[ (1+\nu\lambda) \sin \theta \xi_1 + (1-\nu) \cos \theta \xi_2 + (1-\nu) B \xi_3 + \nu A \sin \theta \xi_2 \right] + \right. \\
 & \left. \left. + (1-2\nu) n_2 \left[ -\cos \theta \xi_3 + A \sin \theta \xi_3 + B \xi_2 \right] \right\} \psi_3 \right\rangle dl = 0,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где  $l$  — граница поверхности  $S$ , на которой заданы напряжения.

Понижение порядка производных позволяет использовать конечные элементы, обеспечивающие только непрерывность функций  $\xi_k$ . Разбиению на конечные элементы подвергается часть сферической поверхности, вырезаемой конусом, вершина которого совпадает с центром сферы. В качестве конечных элементов выбираются треугольные элементы с лагранжевой аппроксимацией линейными полиномами функций  $\xi_k$ . Процедура Галеркина в совокупности с МКЭ приводит поставленную задачу к отысканию собственных значений и собственных векторов алгебраической несимметричной матрицы, имеющей ленточную структуру.

Для решения полученной алгебраической проблемы комплексных собственных значений авторами был разработан оригинальный алгоритм, основанный на использовании метода Мюллера [12] и принципа аргумента [13]. Именно их совместное использование обеспечивает надежное получение численных результатов, так как позволяет определить все собственные значения  $\text{Re}\lambda_i \leq 1$ .

## 2. Результаты расчетов

*Пример 1.* Рассматривается круговой полубесконечный конус, часть боковой поверхности которого  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$  неподвижна, а остальная часть  $\varphi_1 < \varphi \leq 360^\circ$  свободна от напряжений (Рис. 1, а). Для конуса с углом  $\theta_0 = 120^\circ$  на рисунке 2, а приведена зависимость собственных значений  $\text{Re}\lambda_i \leq 1$  от величины угла  $\varphi_1$ , определяющей границу смены типа краевых условий. Здесь сплошная линия соответствует действительным собственным значениям, а пунктирная — комплексным.

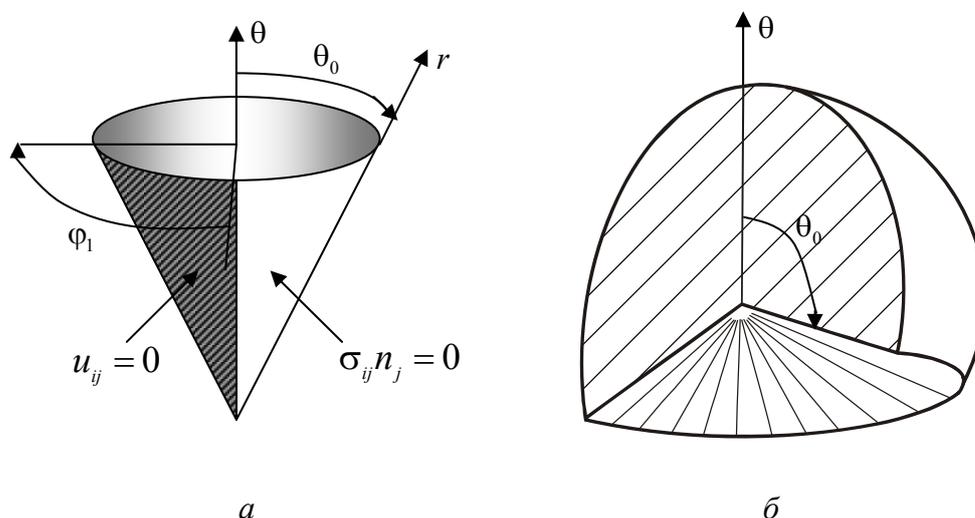


Рис. 1. Варианты конических тел: круговой конус со смешанными граничными условиями (а); полуконус (б).

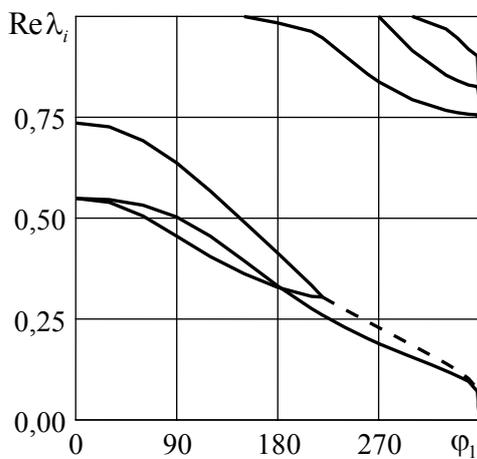
*Пример 2.* Рассматривается половина кругового конуса (полуконус, Рис. 1, б). Контур сферы служит только для целей визуализации.

При  $\theta_0 = 90^\circ$  расчетная область представляет собой четверть полупространства, и согласно рассуждениям, приведенным во втором разделе данной работы, собственные значения, полученные на основе трехмерной постановки задачи для конической области, должны совпадать с собственными значениями для плоского клина с углом раствора  $\gamma = 90^\circ$  при плоско-деформированном состоянии и антиплоской деформации.

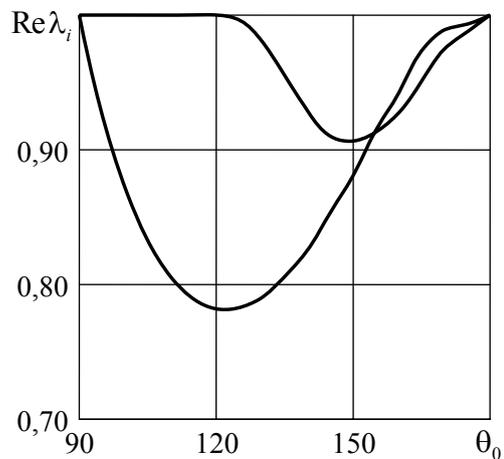
Для расчетной области с одной неподвижной боковой поверхностью и второй боковой поверхностью, свободной от напряжений, в таблице представлены результаты аналитического решения задачи для плоского клина и численного решения задачи для конуса при различной степени дискретизации расчетной области. Здесь числитель содержит данные, полученные при использовании представления решения в виде (1), а знаменатель — в виде (3). Анализ результатов позволяет сделать следующий вывод: представления (1) и (3) при увеличении степени дискретизации приводят к приемлемой точности решения и, в отличие от выводов работы [2], к результатам, не отличающимся друг от друга по скорости сходимости.

Таблица. Сравнение аналитического и численного решений

Аналитическое решение для плоского клина	Численное решение для полуконуса			
	Число узловых переменных			
$\beta$	183	663	2400	6927
0,7117	$\frac{0,7320}{0,7376}$	$\frac{0,7174}{0,7191}$	$\frac{0,7132}{0,7138}$	$\frac{0,7119}{0,7123}$
	$\frac{1,0673}{1,0419}$	$\frac{1,0167}{1,0091}$	$\frac{1,0042}{1,0022}$	$\frac{1,0014}{1,0007}$
$1,7151 \pm 0.5405i$	$\frac{1,7366 \pm 0.5798i}{1,7238 \pm 0.5776i}$	$\frac{1,7208 \pm 0.5501i}{1,7177 \pm 0.5497i}$	$\frac{1,7165 \pm 0.5431i}{1,7158 \pm 0.5430i}$	$\frac{1,7157 \pm 0.5414i}{1,7153 \pm 0.5414i}$



а



б

Рис. 2. Собственные значения с  $\text{Re} \lambda_i \leq 1$  для конуса со смешанными граничными условиями (а) и для полуконуса со свободными от напряжений боковыми поверхностями (б)

Рисунок 2, б демонстрирует собственные значения с  $\text{Re} \lambda < 1$  при свободных от напряжений боковых поверхностях полуконуса в зависимости от угла  $\theta_0$  при  $\nu = 0,3$ .

Представляет интерес сопоставление результатов с данными, полученными для кругового конуса при  $\nu = 0,3$ . Здесь может быть использовано представление решения в виде ряда Фурье по окружной координате. Аналитические [14] и численные [1] расчеты показывают, что собственные значения с  $\text{Re} \lambda \leq 1$  имеют место при нулевой, первой и второй гармониках ряда Фурье. Сравнение дает совпадение результатов, полученных для полуконуса, с результатами для кругового конуса при первой и второй гармониках ряда Фурье.

### 3. Заключение

Рассмотрены два варианта представления собственных решений линейной теории упругости для полубесконечных конусов, на боковой поверхности которых есть образующие, где нарушается ее гладкость или имеет место смена типа краевых условий. Первый вариант совпадает по форме с известным асимптотическим представлением решения линейной упругой задачи в угловых точках [8]. Во втором варианте в этом представлении решения вводятся дополнительные множители, которые учитывают характер сингулярности напряжений на ребрах боковой поверхности.

Приводится сравнение численных процедур, реализующих оба варианта представления решений. Сравнение показало, что в рассмотренных задачах, в отличие от работ других авторов, заметных различий в скорости сходимости численных процедур, основанных на методе конечных элементов, не обнаружено.

Получены новые численные результаты, свидетельствующие о сингулярном характере напряжений в вершине кругового конуса, часть боковой поверхности которого неподвижна, а оставшаяся часть свободна от напряжений, и в вершине конуса с негладкой боковой поверхностью и однородными граничными условиями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-08-99127-р\_офи) и Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МК 5286.2010.1).

## Литература

1. *Матвеевко В.П., Накарякова Т.О., Севодина Н.В., Шардаков И.Н.* Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях // ПММ. – 2008. – Т. 72, вып. 3. – С. 487-494.
2. *Bazant Z.P.* Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: a general numerical method // Int. J. Eng. Sci. – 1974. – N. 12. – P. 221-243.
3. *Bazant Z.P., Estenssoro L.F.* Surface singularity and crack propagation // Int. J. Solids Struct. – 1979. – N. 15. – P. 405-426.
4. *Chen L., Liu G.R., Nourbakhsh-Nia N., Zeng K.* A singular edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for bimaterial interface cracks // Comput. Mech. – 2010. – V. 45. – P. 109-125.
5. *Wu Z., Liu Y.* Asymptotic fields near an interface corner in orthotropic bi-materials. // Int. J. Fract. – 2009. – N. 156. – P. 37-51.
6. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // Int. J. Fract. – 2010. – N. 161. – P. 79-95.
7. *Yosibash Z., Omer N., Costabel M., Douge M.* Edge stress intensity functions in polyhedral domains and their extraction by a quasilocal function method // Int. J. Fract. – 2005. – N. 136. – P. 37-73.
8. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московского математического общества. – 1967. – Т. 16. – С. 209-292.
9. *Михайлов С.Е.* Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – N. 5. – С. 103-110.
10. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
11. *Strang G., Fix G.* An analysis of the finite element method. – Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1973. – 306 p.
12. *Muller D.E.* A method for solving algebraic equation using an automatic computer // Mathematical Table and Other Aids to Computation. – 1956. – N. 10. – P. 208-215.
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
14. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J.* Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations: Amer. Math. Soc., ser. Mathematical Surveys and Monographs. – N.J.: Providence RI, 2001. – V. 85. – 436 p.

Поступила в редакцию 15.09.10

---

### Сведения об авторах

*Корепанова Татьяна Олеговна*, кфмн, мнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; E-mail: ton@icmm.ru

*Матвеевко Валерий Павлович*, дтн, акад., директор ИМСС УрО РАН; E-mail: mvp@icmm.ru

*Севодина Наталья Витальевна*, ктн, нс, ИМСС УрО РАН; E-mail: natsev@icmm.ru