

УДК 534.113

ОТРАЖЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ОТ НАДРЕЗА В СТЕРЖНЕ, ПОГРУЖЕННОМ В ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ

М.А. Ильгамов, А.Г. Хакимов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

Исследуется отражение от поперечного надреза и прохождение продольной затухающей бегущей волны в стержне, погруженном в вязкую жидкость. Использована простейшая модель напряженно-деформированного состояния в зоне надреза. Получена зависимость решения от параметров надреза и характеристик затухания в материале стержня и окружающей жидкости. Решение обратной задачи позволяет определить координату надреза и параметр, содержащий его глубину и длину, по данным падающей и отраженной волн в месте наблюдения.

Ключевые слова: стержень, продольная волна, затухание, прямая и обратная задачи

REFLECTION OF A LONGITUDINAL WAVE FROM A NOTCH IN THE ROD IMMERSED INTO A VISCOUS FLUID

M.A. Ilgamov and A.G. Khakimov

Institute of Mechanics of Ufa Scientific Center RAS, Ufa, Russia

The reflection of a longitudinal damping traveling wave from a cross notch and its passage along the rod immersed into a viscous fluid have been investigated. The simplest model capable of describing the stress-strain state in the notch zone is used. The dependence of the solution on the notch parameters and the damping characteristics of the rod material and surrounding fluid has been obtained. The solution of the inverse problem enables us to find the coordinate of the notch and its depth and length parameters using the data for the incident and reflected waves obtained at the point of observation.

Key words: rod, longitudinal wave, damping, primal and inverse problems

В протяженных объектах типа штанговых колонн нефтедобывающих скважин, магистральных трубопроводных систем не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования [1]. Штанговая колонна соприкасается с водонефтяной смесью, а трубопровод может быть проложен в болотистой местности. В первом приближении влияние этой среды может быть описано моделью вязкой жидкости. При доступности визуального осмотра не во всех случаях представляется возможным определение зарождающихся повреждений конструкции. В связи с этим сочетание приборного диагностирования в доступном месте (точке наблюдения) и моделирования отраженных волн от удаленного повреждения протяженных объектов представляет определенный интерес. В [2] и ряде других работ для стержня, совершающего продольные колебания, трещина моделируется пружиной. Для балки, совершающей изгибные колебания, повреждение моделируется вращательной пружиной. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра частот изгибных колебаний [3]. В [4] дается решение задач определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня

от частоты возмущающей силы. Решению обратной задачи о продольных установившихся колебаниях в стержнях с повреждением посвящена работа [5]. В [6] рассматривается отражение продольной бегущей волны в стержне с повреждением без учета затухания волн.

1. Постановка задачи

Предполагается, что из удаленной точки стержня круглого поперечного сечения радиусом R слева направо распространяется продольная волна смещения, амплитуда и частота которой в точке наблюдения O с координатой $x = 0$ равны U и ω . Стержень при этом находится в вязкой несжимаемой жидкости. В точке с координатой x_c имеется надрез длиной l (Рис. 1). Длина надреза l значительно меньше длины волны L . В пределах надреза с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние. Однако здесь для простоты принимаем одноосное растяжение–сжатие. Требуется определить отраженную и проходящую волны по известным параметрам надреза, а также расположение надреза и его размеры по отраженной волне в точке наблюдения или по отраженной и проходящей волнам.

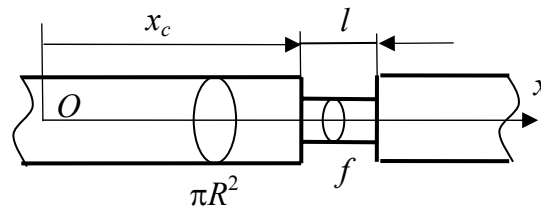


Рис. 1. Расчетная схема

Между напряжением σ и деформацией ε примем следующую зависимость:

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

где E , μ — модуль упругости и коэффициент внутреннего трения, u — перемещение, t — время.

Поведение жидкости определяется условием на поверхности соприкосновения

$$v_x = \partial u / \partial t \quad (r = R) \quad (2)$$

и условием несжимаемости

$$\frac{\partial (rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

где v_x , v_r — скорости жидкости в продольном и радиальном направлениях.

Касательное напряжение в продольном направлении равно

$$\tau = \mu_l \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Здесь μ_l — динамический коэффициент вязкости жидкости. Ввиду малости v_r по сравнению с v_x и их соответствующих первых производных при продольных колебаниях стержня вторые члены в соотношениях (3), (4) далее опускаем. Тогда

$$v_x = Vr^{-1}, \quad \tau = \mu_l Vr^{-2}.$$

Величина $V = R\partial u / \partial t$ определяется по формуле (2). На поверхность стержня действует напряжение

$$\tau = -\frac{\mu_l}{R} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5)$$

Из уравнения продольного движения стержня

$$\pi R^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \pi R^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\pi R \tau$$

и соотношений (1) и (5) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + b \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \\ a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad b = \frac{2\mu_l}{R^2 \rho}, \quad T = \pi R^2 E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где ρ , a , T — плотность, скорость звука и усилие натяжения в стержне, b — коэффициент влияния жидкости на продольное движение стержня.

В пределах надреза и вблизи него имеется сложное осесимметричное напряженно-деформированное состояние. Однако здесь для простоты принимаем, что имеет место одноосное растяжение–сжатие; сохраняется соотношение $\sigma(\varepsilon)$ в виде (1). Обозначая функции индексами «1», «2», «3», соответственно, в областях $-\infty \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq \infty$, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$:

$$\begin{aligned} u_1 = u_2, \quad T_1 = T_2, \quad (x = x_c), \\ u_2 = u_3, \quad T_2 = T_3, \quad (x = x_c + l). \end{aligned} \quad (7)$$

Условия вида (7) приводятся также в статье [7], где предложена универсальная процедура обработки данных разрезного стержня Гопкинсона [8]. Условия (7) с учетом (6) записываются в виде

$$\begin{aligned} u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = m \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right), \quad (x = x_c), \\ u_2 = u_3, \quad m \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial t}, \quad (x = x_c + l), \quad m = \frac{f}{\pi R^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где f — площадь поперечного сечения стержня в зоне надреза. Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата x_c , длина l и

безразмерный параметр m . В прямой задаче значения x_c, l, m (или отношение площадей $f/\pi R^2$) задаются. В обратной задаче значения x_c, l и параметра m необходимо определять.

Продольное перемещение в стержне без надреза задается в виде затухающей бегущей волны

$$u = Ue^{-\beta x} \sin(\omega t - \alpha x), \quad (9)$$

где α и β определяются из уравнений, вытекающих из (6):

$$\begin{aligned} \omega^2 + a^2\beta^2 - a^2\alpha^2 - 2\mu a^2\alpha\beta\omega &= 0, \\ a^2(2\alpha\beta + \mu\omega\beta^2 - \mu\omega\alpha^2) - b\omega &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение уравнений (10) имеет вид

$$\alpha = \frac{\omega(b + \mu\omega^2)}{2a(1 + \mu^2\omega^2)z_i}, \quad \beta = \frac{z_i}{a}, \quad (11)$$

где z_i — корни уравнения

$$4(1 + \mu^2\omega^2)^2 z^4 + 4\omega^2(1 - \mu b + \mu^2\omega^2 - \mu^3 b\omega^2)z^2 - \omega^2(b^2 + 2\mu b\omega^2 + \mu^2\omega^4) = 0,$$

которые равны

$$z_i = \pm \sqrt{\pm \frac{\omega(\sqrt{\mu^2 b^2 \omega^2 + \omega^2 + b^2 + \mu^2 \omega^4} + \mu b - 1)}{2(1 + \mu^2 \omega^2)}}.$$

Во многих случаях возможно пренебрежение величинами порядка $(\mu\omega)^2$ и b^2 , малыми по сравнению с единицей. Тогда из (11) следует:

$$\alpha = \frac{\omega}{a}, \quad \beta = \frac{1}{2a}(\mu\omega^2 + b), \quad L = \frac{2\pi a}{\omega}. \quad (12)$$

В таком приближении длина волны не зависит от затухания в системе.

2. Прямая задача

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$t^* = \omega t, \quad \xi = \frac{2\pi x}{L}, \quad \xi_c = \frac{2\pi x_c}{L}, \quad \varepsilon = \frac{2\pi l}{L}, \quad n = \frac{\beta L}{2\pi}, \quad u_i = \frac{u}{U},$$

представим (9) в виде

$$u_i = e^{-n\xi} \sin(t^* - \xi), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c. \quad (13)$$

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$u_{r1} = e^{-n(\xi_c - \xi)} \left[A_{r1} \cos(t^* + \xi) + B_{r1} \sin(t^* + \xi) \right] \quad \text{для области} \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{t1} &= e^{-n\xi} \left[A_{t1} \cos(t^* - \xi) + B_{t1} \sin(t^* - \xi) \right] \\ u_{r2} &= e^{-n(\xi_c + \varepsilon - \xi)} \left[A_{r2} \cos(t^* + \xi) + B_{r2} \sin(t^* + \xi) \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{для области} \quad \xi_c \leq \xi \leq \xi_c + \varepsilon, \quad (15)$$

$$u_{t2} = e^{-n(\xi - \xi_c - \varepsilon)} \left[A_{t2} \cos(t^* - \xi) + B_{t2} \sin(t^* - \xi) \right] \quad \text{для области} \quad \xi_c + \varepsilon \leq \xi \leq \infty. \quad (17)$$

Так как при $\xi = \xi_c$ выполняются равенства $u_1 = u_i + u_{r1}$, $u_2 = u_{r2} + u_{t1}$, а при $\xi = \xi_c + \varepsilon$ — равенства $u_2 = u_{r2} + u_{t1}$, $u_3 = u_{t2}$, то с учетом соотношений

$$\sin(\xi_c + \varepsilon) \approx \sin \xi_c + \varepsilon \cos \xi_c, \quad \cos(\xi_c + \varepsilon) \approx \cos \xi_c - \varepsilon \sin \xi_c$$

из условий (8) следует:

$$\begin{aligned} A_{r1} &= (m^2 - 1) \varepsilon \eta \left[(m^2 \varepsilon + 2m n + \varepsilon) \sin 2\xi_c + 2m(2n\varepsilon - 1) \cos 2\xi_c \right], \\ B_{r1} &= -(m^2 - 1) \varepsilon \eta \left[2m(2n\varepsilon + 1) \sin 2\xi_c + (m^2 \varepsilon + 2m n + \varepsilon) \cos 2\xi_c \right], \\ A_{t2} &= 2m \varepsilon \eta (1 - m)^2 (3n\varepsilon - 1), \\ B_{t2} &= -2m \eta (4m n \varepsilon - m^2 \varepsilon^2 - m^2 n \varepsilon - 2m - n \varepsilon - \varepsilon^2), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\eta = e^{-n\xi_c} \left(4m^2 + 4m n \varepsilon (1 - m)^2 + \varepsilon^2 (1 + m^2) \right)^{-1}.$$

Здесь сохранены члены, содержащие ε^2 и n^2 , но не учтены величины $n^2 \varepsilon^2$, малые по сравнению с единицей.

Решения (14), (17) можно представить также в виде

$$\begin{aligned} u_{r1} &= k_{r1} e^{-n(\xi_c - \xi)} \sin\left((t^* + \xi) - \varphi_{r1}\right), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \\ u_{t2} &= k_{t2} e^{-n\xi} \sin\left((t^* - \xi) - \varphi_{t2}\right), \quad \xi_c + \varepsilon \leq \xi \leq \infty, \end{aligned} \quad (19)$$

где k_{r1} и k_{t2} — коэффициенты отражения и прохождения, φ_{r1} и φ_{t2} — соответствующие фазы:

$$\begin{aligned} k_{r1} &= \sqrt{A_{r1}^2 + B_{r1}^2}, \quad k_{t2} = \sqrt{A_{t2}^2 + B_{t2}^2}, \\ \varphi_{r1} &= \operatorname{arctg}(-B_{r1}/A_{r1}), \quad \varphi_{t2} = \operatorname{arctg}(-B_{t2}/A_{t2}). \end{aligned} \quad (20)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициент отражения $k_{r1} \rightarrow 0$, а коэффициент прохождения $k_{t2} \rightarrow \exp(-n\xi_c)$. При обрыве стержня $m \rightarrow 0$ и коэффициенты равны: $k_{r1} = \exp(-n\xi_c)$, $k_{t2} = 0$. Случай, когда $n = 0$ рассмотрен авторами в работе [6].

Суммарное перемещение u_s элемента стержня в точке наблюдения ($\xi = 0$), выраженное через амплитуду C и фазу δ волны, имеет вид

$$u_s = u_i + u_{r1} = C \sin(t^* - \delta), \quad C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \text{tg}\delta = -C_1 / C_2, \quad (21)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} C_1 &= (m^2 - 1)\varepsilon\eta\left((m^2\varepsilon + 2mn + \varepsilon)\sin 2\xi_c + 2m(2n\varepsilon - 1)\cos 2\xi_c\right), \\ C_2 &= 1 - (m^2 - 1)\varepsilon\eta\left(2m(2n\varepsilon + 1)\sin 2\xi_c + (m^2\varepsilon + 2mn + \varepsilon)\cos 2\xi_c\right). \end{aligned} \quad (22)$$

На рисунке 2 приводятся зависимости перемещения элемента стержня в отраженной волне от безразмерного времени t^* при $n = 0,08$, $\varepsilon = 0,001$, $\xi = 0$ и различных m , вычисленные по формуле $u_{r1} = k_{r1}\exp(-n\xi_c)\sin(t^* - \varphi_{r1})$, для двух значений положения надреза ξ_c . Видно, что отраженные волны зависят от параметра m и координаты надреза. Чем больше отношение площадей m , тем меньше величина сигнала в отраженной волне.

Зависимости сдвига фазы в отраженной волне при $n = 0,08$ от положения надреза ξ_c и различных значений параметра m представлены на рисунке 3, а, а от параметра m и различных значений ξ_c даются на рисунке 3, б. Анализ графиков показывает, что сдвиг фазы в отраженной волне обуславливается положением надреза ξ_c периодическим образом, а длина надреза ε и параметр m практически не влияют на сдвиг фазы. Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения координаты надреза или зарождающегося повреждения.

Рисунок 4 содержит зависимости коэффициентов отражения k_{r1} и прохождения k_{t2} от параметра m . Фрагменты а и в соответствуют различным n (0; 0,04; 0,08) и длине надреза $\varepsilon = 0,001$, фрагменты б и г — различным длинам надреза ε (0,001; 0,005; 0,010) при $n = 0,08$. С ростом параметра m происходит уменьшение коэффициента отражения k_{r1} и увеличение коэффициента прохождения k_{t2} .

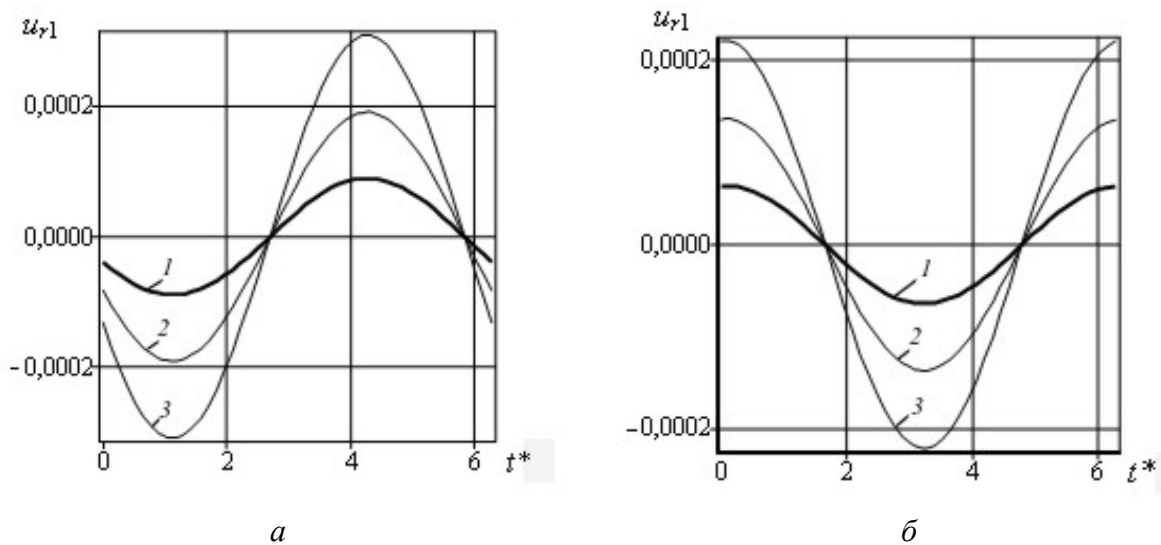


Рис. 2. Перемещения стержня в отраженной волне для положений надреза $\xi_c = 2\pi/3$ (а), $\xi_c = 2\pi$ (б) при различных m : 0,9 (кривая 1); 0,8 (2); 0,7 (3)

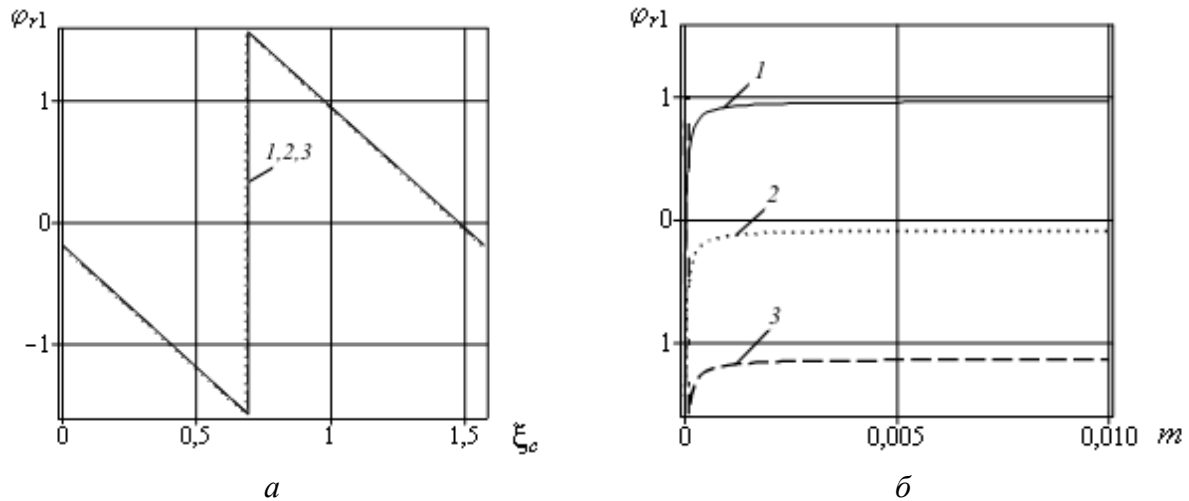


Рис. 3. Зависимости сдвига фазы в отраженной волне от положения надреза ξ_c (а) при значениях параметра m : 0,9 (кривая 1); 0,8 (2); 0,7 (3), и от параметра m (б) при различных значениях ξ_c : $\pi/3$ (кривая 1); $2\pi/3$ (2); π (3)

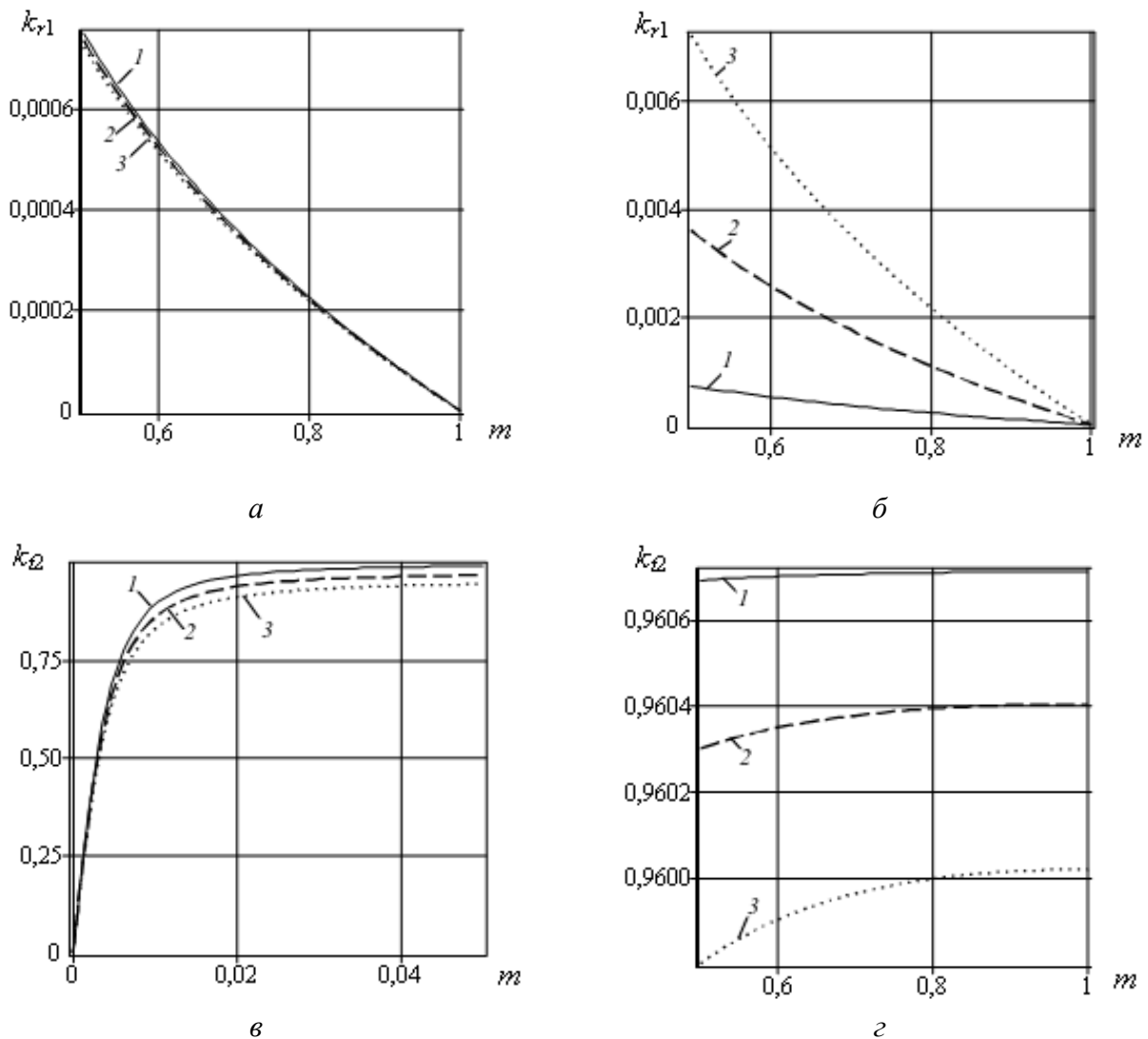


Рис. 4. Зависимости коэффициентов отражения $k_{r1}(a, б)$ и прохождения $k_{t2}(в, г)$ от параметра m для координаты надреза $\xi_c = 0,5$ при различных значениях n (фрагменты а, в): 0 (кривая 1); 0,04 (2); 0,08 (3); и различных длинах надреза l (фрагменты б, г): 0,001 (кривая 1); 0,005 (2); 0,010 (3)

3. Обратная задача

Могут быть использованы различные способы определения параметров надреза в стержне в зависимости от измеряемых характеристик волны с помощью приборных средств.

Способ 1. Выделение отраженных и проходящих волн и использование данных измерений перемещения в два момента времени. Выделение отраженных волн может быть достигнуто, например, сравнением данных замеров в точке $\xi = 0$ стержня с надрезом и в такого же стержня без надреза или сравнением данных в одном и том же стержне по истечении некоторого времени, достаточного для развития наметившегося повреждения. Могут быть и другие способы выделения отраженных волн. Если обозначить через $(u_{r1})_1$ и $(u_{r1})_2$ замеренные значения перемещения в отраженной волне в точке $\xi = 0$ в моменты времени t_1^* и t_2^* в пределах полупериода колебания, причем для простоты принять $t_1^* = 0$, $t_2^* = \pi/2$, а через $(u_{t2})_1$ — замеренное значение перемещения в проходящей волне в точке $\xi_1 = 2\pi$ в момент времени t_1^* , то из (14) и (18) последует система уравнений:

$$\begin{aligned} (u_{r1})_1 e^{n\xi_c} &= (m^2 - 1)\varepsilon\eta\left((m^2\varepsilon + 2mn + \varepsilon)\sin 2\xi_c + 2m(2n\varepsilon - 1)\cos 2\xi_c\right), \\ (u_{r1})_2 e^{n\xi_c} &= -(m^2 - 1)\varepsilon\eta\left(2m(2n\varepsilon + 1)\sin 2\xi_c + (m^2\varepsilon + 2mn + \varepsilon)\cos 2\xi_c\right), \\ (u_{t2})_1 e^{n(2\pi - \xi_c - \varepsilon)} &= 2m\varepsilon\eta(1 - m)^2(3n\varepsilon - 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Параметры m , ξ_c , ε определяются из (23) при заданных значениях $(u_{r1})_1$, $(u_{r1})_2$, $(u_{t2})_1$ и n . Система (23) может быть решена численно. Например, для $(u_{r1})_1 = 0,0004$, $(u_{r1})_2 = 0,0007$, $(u_{t2})_1 = -0,0002$ параметры равняются: $m = 0,4485$; $\xi_c = 0,4852$; $\varepsilon = 0,0009$.

Если один из параметров m , ξ_c , ε известен, то для нахождения двух остальных могут быть использованы следующие способы.

Способ 2. Выделение отраженных волн, использование данных измерений амплитуды и фазы волны. При обозначениях последних через $(u_{r1})_{\max}$ и (φ_{r1}) из (20) следует

$$(u_{r1})_{\max} = \sqrt{A_{r1}^2 + B_{r1}^2}, \quad \text{tg}(\varphi_{r1}) = -B_{r1}/A_{r1}. \quad (24)$$

Способ 3. Измерение перемещений в суммарной волне в два момента времени. Обозначая в (13), (14), (18) через $(u_s)_1$ и $(u_s)_2$ максимальные значения перемещения в точке $\xi = 0$ в суммарной волне в моменты времени $t_1^* = 0$, $t_2^* = \pi/2$, приходим к системе:

$$\begin{aligned} (u_s)_1 e^{n\xi_c} &= (m^2 - 1)\varepsilon\eta\left((m^2\varepsilon + 2mn + \varepsilon)\sin 2\xi_c + 2m(2n\varepsilon - 1)\cos 2\xi_c\right), \\ [(u_s)_2 - 1] e^{n\xi_c} &= -(m^2 - 1)\varepsilon\eta\left(2m(2n\varepsilon + 1)\sin 2\xi_c + (m^2\varepsilon + 2mn + \varepsilon)\cos 2\xi_c\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Способ 4. Измерение амплитуды C и фазы δ суммарной волны. При этом из (21) следуют уравнения

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \text{tg}(\delta) = -C_1/C_2, \quad (26)$$

где $C_1(m, \xi_c, \varepsilon)$ и $C_2(m, \xi_c, \varepsilon)$ определяются в соответствии с (22).

Способ 5. Измерение фаз. Если известны сдвиги фаз в отраженной φ_{r1} и проходящей φ_{r2} волнах, то могут быть использованы формулы (20).

Способ 6. Измерение коэффициентов отражения k_{r1} и прохождения k_{t2} . Из соотношений (20) следует, что по известным коэффициентам отражения k_{r1} и прохождения k_{t2} можно определить два из трех параметров m , ξ_c , ε .

На рисунке 5 приводятся зависимости координаты надреза ξ_c , длины надреза ε и параметра m от $(u_{r1})_1$ для различных значений $(u_{r1})_2$, при $(u_{t2})_1 = -0,0002$ и коэффициенте затухания $n = 0,08$. Кривые показывают, что по трем замеренным значениям $(u_{r1})_1$, $(u_{r1})_2$, $(u_{t2})_1$ определяются координата надреза ξ_c , длина надреза ε и параметр m .

Возможно использование и других измерений параметров падающей, отраженной от надреза и проходящей волн.

Требование повышенной точности измерений с помощью приборных средств и регуляризация в обратной задаче являются обычными. Они здесь не рассматриваются.

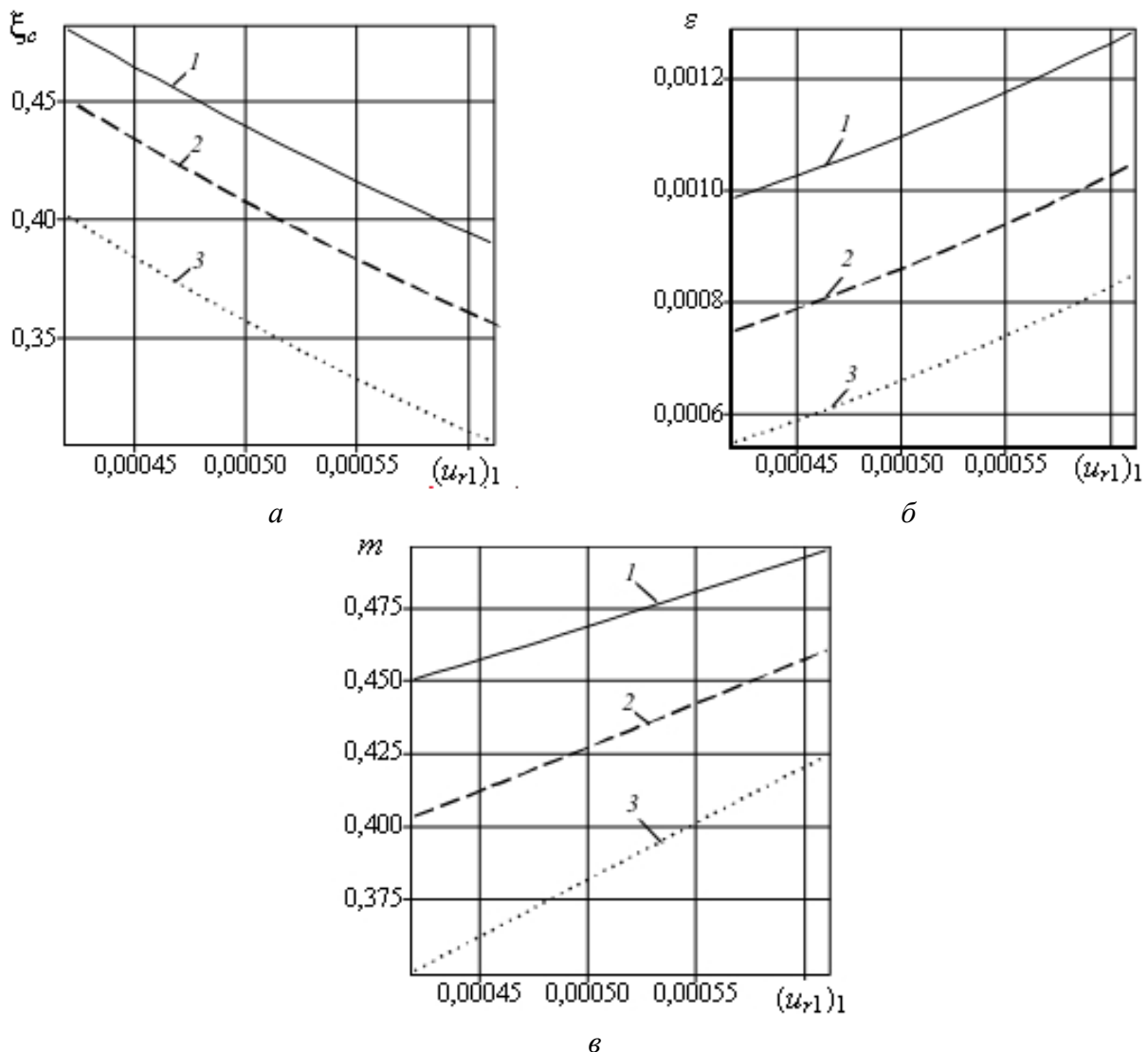


Рис. 5. Зависимости координаты надреза ξ_c (а), длины надреза ε (б) и параметра m (в) от $(u_{r1})_1$ при $(u_{t2})_1 = -0,0002$ и коэффициенте затухания $n = 0,08$ для различных значений $(u_{r1})_2$: 0,0007 (кривые 1); 0,0006 (2); 0,0005 (3)

Анализ отраженных и суммарных волн в стержне позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и сдвиг фазы зависят от величины и положения надреза. При этом зависимость сдвига фазы в отраженной волне от положения надреза ξ_c имеет периодический характер. Получено, что длина надреза ε и параметр m практически не влияют на сдвиг фазы. Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения координаты надреза или зарождающегося повреждения.

Полученная методика может использоваться при разработке системы диагностирования повреждений длинных стержневых систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-97008-р_Поволжье_а).

Литература

1. Сидоров Б.В., Мартынов С.А. Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. – 2005. – № 12. – С. 18-19.
2. Gladwell G.M.L. Inverse problems in vibration. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers. – 2004. (Русский перевод: Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 608 с.
3. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 83-89.
4. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
5. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. – 2005. – № 9. – С. 44-56.
6. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Отражение продольной бегущей волны в стержне с повреждением // Контроль. Диагностика. – 2009. – № 7. – С. 43-48.
7. Лопатников С.Л., Гама Б.А., Краутхаузер К., Джиллеспи Дж.Мл. О применимости классического анализа опытов с разрезным стержнем Гопкинсона // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30, вып. 3. – С. 39-46.
8. Kolsky H. An investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading // Proceedings of the Physics Society of London. – 1949. – V. 62, № 359. – P. 676-700.

Поступила в редакцию 14.05.10

Сведения об авторах

Ильгамов Марат Аксанович, дфмн, чл.-корр. РАН, зав. лаб., Институт механики Уфимского научного центра РАН (ИМех УНЦ РАН), 450054, Уфа, пр. Октября, д. 71; E-mail: ilgamov@anrb.ru
Хакимов Аким Гайфуллинович, кфмн, снс, ИМех УНЦ РАН; E-mail: hakimov@anrb.ru