

УДК 550.347.62

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА

В.В. Пак

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, Россия

Разработан эффективный численный подход к решению трехмерной задачи Стокса в естественных переменных, основанный на сочетании метода конечных элементов с методом проекции градиента, обладающий преимуществами как метода «векторный потенциал–завихренность», так и метода «скорость–давление»: условие несжимаемости выполняется с высокой степенью точности и не существует трудностей при решении задач со свободной границей. Предлагаемый подход позволяет значительно сократить размерность конечно-элементной задачи с сохранением разреженной структуры ее матрицы жесткости. Приводятся численные результаты тестирования на задачах со свободной границей, подтверждающие его преимущества.

Ключевые слова: трехмерное течение, уравнения Стокса, свободная граница, метод конечных элементов, метод проекции градиента

APPLICATION OF THE GRADIENT PROJECTION METHOD FOR NUMERICAL SOLVING THE THREE-DIMENSIONAL STOKES PROBLEM

V.V. Pak

Ilichev Pacific Oceanological Institute, Vladivostok, Russia

An efficient numerical approach is developed to solve the three-dimensional Stokes problem in natural variables by the finite element method combined with the gradient projection method. It has the advantages of both the vector potential-vorticity method and the pressure-velocity method. The incompressibility condition is fulfilled with a high degree of accuracy, and there is no difficulty in solving free boundary problems. The approach allows us to reduce sufficiently the dimension of the finite element problem and preserve the sparse structure of the stiffness matrix. Numerical results obtained for free boundary problems confirm the advantages of the proposed procedure.

Key words: three-dimensional flow, Stokes equations, free boundary, finite element method, gradient projection method

1. Введение

Численное моделирование трехмерных стоксовых (ползущих) течений со свободной границей, помимо многочисленных практических приложений (например, моделирование трехмерной конвекции в мантии Земли [1–3]), является одной из важных исследовательских проблем гидродинамики при малых числах Рейнольдса. В настоящее время разработан ряд численных алгоритмов ее решения [4–6].

При рассмотрении задачи в переменных «скорость–давление» [1, 2]) неизбежно возникают следующие трудности:

- так как условие несжимаемости заменяется на слабую сжимаемость, при численной реализации это может привести к появлению дополнительной погрешности, особенно в задачах со свободной границей [7];

- для определения давления необходимо решать неоднородную задачу Неймана [1], численное решение которой методом установления (например, попеременно-треугольным методом в трехслойной модификации с выбором итерационных параметров по методу сопряженных градиентов, используемым в [8]) имеет очень слабую сходимость даже в двумерном варианте [5];
- применяемый в [2] для решения задачи метод расщепления по физическим процессам [8], существенно увеличивает размерность системы разностных уравнений, поскольку предполагает совместное решение задач для скорости и давления, а также имеет слабую сходимость и низкую точность на свободной границе и границах разрыва вязкости.

При решении трехмерных задач гидродинамики достаточно хорошо зарекомендовал себя метод решения в переменных «завихренность–векторный потенциал» [5, 3, 9]. Несмотря на то, что в этом случае условие несжимаемости выполняется точно, возникает ряд дополнительных проблем:

- значительно увеличивается размерность вычислительной задачи, поскольку необходимо решать не три, а шесть уравнений для векторного потенциала и завихренности;
- векторный потенциал, в свою очередь, должен удовлетворять условию несжимаемости: только в этом случае задача сводится к решению шести простых уравнений Пуассона, однако в разработанных алгоритмах условие несжимаемости выполняется лишь на непроницаемой границе и не используются какие-либо специальные процедуры для достижения его точного выполнения в остальных точках расчетной области;
- данный метод не очень удобен для задач со свободной границей из-за трудности задания граничных условий: они получаются очень громоздкими, содержащими производные третьего порядка от искомых функций.

В настоящей работе осуществляется развитие на трехмерный случай эффективного численного подхода к решению задачи Стокса [12], который обладает преимуществами традиционных методов решения в переменных «векторный потенциал–завихренность» и «скорость–давление».

2. Система уравнений. Вариационная постановка задачи

В поле силы тяжести рассмотрим трехмерную область D с границей Γ , заполненную вязкой несжимаемой жидкостью. Медленное (ползущее) течение с переменной вязкостью и плотностью описывается уравнениями движения вязкой жидкости в приближении Стокса [4, 11]:

$$-\nabla p + 2\nabla \cdot (\mu \operatorname{def} \mathbf{u}) - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор; \mathbf{g} — ускорение силы тяжести; μ — коэффициент вязкости жидкости; ρ — плотность жидкости; \mathbf{u} — вектор скорости; p — давление; $\operatorname{def} \mathbf{u}$ — тензор скоростей деформации. Если обозначить через u_i компоненты скорости, то компоненты $\operatorname{def} \mathbf{u}$ равны $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, где $(i, j = \overline{1, 3})$.

Пусть Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. На части Γ_1 зададим условие полного прилипания

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{3}$$

или гладкого контакта

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{4}$$

а на Γ_2 — условие на подвижной границе:

$$(-p\mathbf{I} + 2\mu \operatorname{def} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}. \tag{5}$$

\mathbf{f} — вектор внешней нагрузки; \mathbf{n} — нормаль к соответствующей границе.

Если существуют внутренние границы разрыва вязкости и/или плотности, на них задаются условия непрерывности скоростей и напряжений:

$$[\mathbf{u}]_+^- = 0, \quad [-p\mathbf{I} + 2\mu \operatorname{def} \mathbf{u}]_+^- \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

где $[-p\mathbf{I} + 2\mu \operatorname{def} \mathbf{u}]_+^-$ — это скачок функции на границе.

Уравнения системы (1), (2) и граничные условия (3)–(6) позволяют записать основное интегральное тождество (принцип виртуальных работ) [11]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{P}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{v}) = 0, \tag{7}$$

где \mathbf{v} — произвольное трехмерное векторное поле; $\mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2 \iiint_D \mu \operatorname{def} \mathbf{u} \operatorname{def} \mathbf{v} \, dx_1 dx_2 dx_3$ — мощность внутренних напряжений; $\mathbf{P}(\mathbf{v}) = \iiint_D p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx_1 dx_2 dx_3$ — работа, совершаемая давлением; $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \iint_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dS - \iiint_D \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dx_1 dx_2 dx_3$ — работа внешних поверхностных и массовых сил.

Так как $\mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — симметричный и положительно определенный оператор, то решение краевой задачи (1), (2) существует и единственно [6]. Если перейти к эквивалентной задаче минимизации, искомое решение является минимумом функционала $[\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{u})]$ на пространстве соленоидальных функций.

3. Описание метода

Численное решение задачи Стокса определялось методом конечных элементов [6, 11]. Приближенное решение находилось в виде:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}^k \varphi_k, \tag{8}$$

где \mathbf{U}^k — узловые значения; φ_k — система базисных функций.

Для решения конечноэлементной задачи, получающейся в результате дискретизации функционала (7), воспользуемся модифицированным методом проекции градиента, который позволяет исключить часть компонент узловых значений скорости

U^k путем введения дискретного аналога функции тока [12]. Простой перенос этого метода на трехмерный вариант невозможен, но, как будет показано ниже, и в этом случае удастся найти экономичную процедуру исключения.

Решим задачу на примере прямоугольного параллелепипеда $\Pi = [0, X_1] \times [0, X_2] \times [0, X_3]$, который с помощью одномерных сеток разобьем на частичные параллелепипеды. Рассмотрим произвольный элемент разбиения, который обозначим через d . В качестве базисных используем функции, имеющие форму тензорного произведения квадратичных одномерных лагранжевых элементов: $\phi_k(x_1, x_2, x_3) = L_2^k(x_1)L_2^k(x_2)L_2^k(x_3)$ [11]. В этом случае каждый элемент содержит 27 узлов, которые расположены в вершинах d , на серединах ребер и в центре (Рис 1).

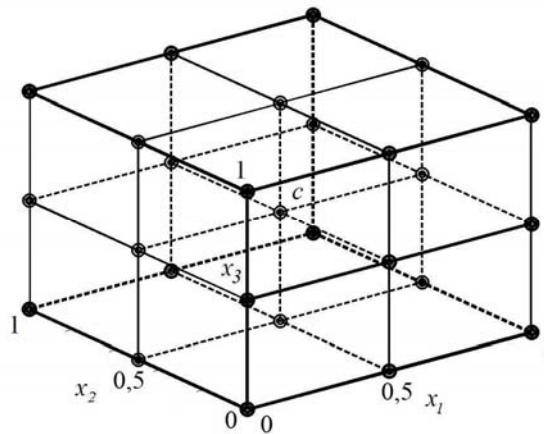


Рис. 1. Трехмерный прямоугольный элемент с 27 узлами

Используя метод, аналогичный [6], можно исключить компоненты скорости во внутреннем узле элемента, одновременно улучшив аппроксимацию давления. Аппроксимируем давление кусочно-непрерывной функцией, линейной на каждом элементе: $P = p_0 + p_i x_i$, $i = \overline{1, 3}$. В качестве \mathbf{v} выберем векторное пространство, состоящее из следующих элементов:

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{bmatrix} \phi_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_k \end{bmatrix} \right\} \quad (k = \overline{1, N}). \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (7), получим следующую конечноэлементную задачу:

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \mathbf{C}(\mathbf{U}, \mathbf{v}) - \sum_{k=1}^{27} p_0 \iiint_d \nabla \cdot \mathbf{U} \, dx_1 dx_2 dx_3 - \sum_{k=1}^{27} p_j \iiint_d x_j \nabla \cdot \mathbf{U} \, dx_1 dx_2 dx_3 - \mathbf{F}(\mathbf{v}) = 0. \quad (10)$$

Тогда дискретный аналог условия несжимаемости, которому должны удовлетворять U^k , примет вид:

$$\begin{aligned} \iiint_d \nabla \cdot \mathbf{U} \, dx_1 dx_2 dx_3 &= 0, \\ \iiint_d x_i \nabla \cdot \mathbf{U} \, dx_1 dx_2 dx_3 &= 0 \quad (i = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем второй интеграл в (11), используя формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_d x_i \nabla \cdot \mathbf{U} dx_1 dx_2 dx_3 = \sum_{m=1}^6 \iint_{S_m} x_i \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_d U_i dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad (12)$$

где S_m — грани элемента d ; \mathbf{n} — нормаль к грани.

Для удобства перепишем (12) следующим образом:

$$\iiint_d x_i \nabla \cdot \mathbf{U} dx_1 dx_2 dx_3 = \sum_{m=1}^6 \iint_{S_m} x_i \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS - \sum_{j \neq c} \mathbf{U}^j \iiint_d \phi_j dx_1 dx_2 dx_3 - \mathbf{U}^c \iiint_d \phi_c dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad (13)$$

где c — центральный узел элемента d . Базисные функции узла c равны нулю на границе d , следовательно, значения скоростей \mathbf{U}^c не входят в поверхностный интеграл, и уравнения (12) можно решить относительно этих значений, а затем исключить их из задачи (10), не нарушая разреженную структуру матрицы жесткости.

Теперь преобразуем первый интеграл из (11) по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_d \nabla \cdot \mathbf{U} dx_1 dx_2 dx_3 = \sum_{m=1}^6 \iint_{S_m} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (14)$$

Обозначим через j_m номера узлов, расположенных на m -й грани, причем j_m^c расположен в центре грани, а узлы с четными номерами — на серединах ребер. Так как любое соленоидальное поле можно представить как ротор соответствующего векторного потенциала $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$ [5], поверхностный интеграл по каждой грани из (14) можно определить через контурный интеграл

$$\iint_{S_m} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S_m} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{m=1}^4 \int_{r_m} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (15)$$

где r_m — ребро m -й грани.

Введем сеточную функцию A_m , определенную в узлах, расположенных на ребрах расчетной сетки, равную в каждом узле значению интеграла вдоль этого ребра с произвольно заданным направлением интегрирования. Подставляя ее в (15), получим:

$$\iint_{S_m} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS - \sum_{m=1}^4 \varepsilon_m A_m = 0, \quad (16)$$

где $\varepsilon_m = \pm 1$ (в зависимости от того, совпадает ли направление интегрирования с направлением, заданным при определении величин A_m , или нет). Если c_m — центральный узел m -й грани, то

$$\iint_{S_m} \mathbf{U}^{c_m} \cdot \mathbf{n} \phi_{c_m} dS + \sum_{j \neq c_m} \iint_{S_m} \mathbf{U}^j \cdot \mathbf{n} \phi_j dS - \sum_{m=1}^4 \varepsilon_m A_m = 0. \quad (17)$$

Поскольку скорости \mathbf{U}^j , соответствующие центральному узлу грани, относятся только к одной грани, то, решив каждое из уравнений (17) относительно узловых значений одной из компонент скорости \mathbf{U}^j , которые назовем базисными, исключим их из системы разностных уравнений. Нетрудно видеть, что в этом случае первое условие из (11) будет выполняться точно: при суммировании по всем граням элемента каждая из величин A_m встречается только два раза и с противоположными знаками.

На непроницаемых границах для векторного потенциала можно задать следующие условия [5, 9]: $A_{\tau_1} = 0$, $A_{\tau_2} = 0$, где τ_1 и τ_2 — индексы тангенциальных (касательных) к границе компонент скорости. Тогда величины A_m получаются равными нулю:

$$A_m = 0. \quad (18)$$

Таким образом, путем введения дискретного аналога векторного потенциала получено явное решение системы (11) относительно базисных скоростей для узлов на серединах граней прямоугольных элементов. При исключении базисных скоростей из (10) разреженная структура матрицы жесткости сохраняется.

Используя поле скоростей \mathbf{U} , найдем приближенное давление. Сначала, решая уравнения (13), в которых \mathbf{U} заменены соответствующими им величинами $\mathbf{C}(\mathbf{U}, \mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{v})$, определим градиенты давления p_i . После этого исключим их из (10) и установим компоненты давления p_0 . При этом из преобразованной системы достаточно выбрать уравнения, соответствующие базисным компонентам. Легко видеть, что каждое уравнение полученной системы содержит не более двух значений дискретного давления, и после соответствующей перенумерации узлов матрицу системы можно привести к двухдиагональному виду.

Определим размерность преобразованной системы уравнений по сравнению с исходной для прямоугольной сетки $N_{node} = (2m+1) \times (2n+1) \times (2k+1)$, имеющей параметры: число трехмерных прямоугольных элементов $N_{el} = mnk$; число ребер элементов $N_{edge} = n(m+1)(k+1) + m(n+1)(k+1) + k(n+1)(m+1)$; число граней элементов $N_f = nm(k+1) + nk(m+1) + mk(n+1)$. Отсюда число исходных узловых значений скоростей составляет $3N_{node}$. В результате применения метода проекции градиента добавляется N_{edge} новых переменных A_m и исключаются следующие величины: все компоненты скорости в центральных узлах элементов — $3N_{el}$; по одной компоненте на каждой грани элементов — N_f ; компоненты скорости на непроницаемой границе расчетной области — N_b . Если свободной является только верхняя граница, то относительное уменьшение размерности конечноэлементной матрицы равно:

$$\eta = \frac{(3N_{node} + N_{edge} - 3N_{el} - N_f - N_b)}{3N_{node}}. \quad (19)$$

При больших значениях n , m и k эта величина стремится к $\eta \approx 7/8$, что свидетельствует об уменьшении размерности матрицы жесткости примерно на 9%.

Таким образом, предлагаемый модифицированный метод проекции градиента обеспечивает выполнение дискретного условия несжимаемости и одновременно позволяет сократить размерность задачи (10), (11), сохраняя разреженную структуру матрицы жесткости.

4. Численные результаты

Предлагаемый численный подход, сочетающий метод конечных элементов с методом проекции градиента, тестировался на решении следующих трехмерных задач Стокса в естественных переменных: задачи гидростатики и задачи с переменной нагрузкой на верхней границе.

4.1. Задача гидростатики

Полагаем, что: плотность постоянна в пределах расчетной области; верхняя граница представляет собой горизонтальную плоскость, на которой задано условие свободной поверхности; боковые границы — гладкие неподвижные стенки; на нижней границе имеет место условие жесткого сцепления.

Несмотря на простоту, эта задача является хорошим тестом на соблюдение условия несжимаемости. Так как в применяемых другими исследователями методах решения в естественных переменных [1, 2] условие несжимаемости выполняется приближенно, задача гидростатики имеет ненулевое решение. В [7] приводятся примеры, показывающие, что жидкость может непрерывно сжиматься к нулевому объему при постоянном приложении даже малейших гидростатических напряжений. Покажем, что при использовании предлагаемого метода задача гидростатики решается точно.

В силу того, что правая часть разностных уравнений для вертикальной составляющей скорости в каждом элементарном объеме равна

$$\rho g_3 \iiint_d \phi_j dx_1 dx_2 dx_3, \quad (20)$$

а для горизонтальных составляющих скорости она нулевая, исключение из условий (13) значений скоростей в центральном узле каждого элемента приводит к тому, что вместо выражения (20) в правой части (13) получается поверхностный интеграл от нормальной составляющей скорости, умноженный на значение плотности по границе носителя базисной функции:

$$\rho g \iint_{S_m} x_i \phi_j n_3 dS. \quad (21)$$

Следовательно, в каждом уравнении, соответствующем внутренним узлам расчетной сетки и непроницаемым границам, правая часть получается нулевой. Так как верхняя граница горизонтальна, ненулевые значения (21) получаются равными. В результате редукции одной из компонент скорости в центральных узлах граней элементов по формулам (17) правые части уравнений, соответствующих вершинам и серединам ребер расчетной сетки, обнуляются. Правые части уравнений, соответствующих A_m , также получаются нулевыми, поскольку являются суммой только двух величин из (21), взятых с обратными знаками. Таким образом, задача гидростатики имеет точное решение.

4.2. Задача с переменной нагрузкой на верхней границе

Решим задачу для области, верхняя граница которой является свободной, боковые границы — гладкие неподвижные стенки, а нижняя граница жестко закреплена. Зададим на нижней границе условие жесткого контакта, на боковых границах — условие гладкого контакта. К верхней границе приложим переменную нагрузку: $f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = -\cos\pi x_1 \cos\pi x_2$.

Точное аналитическое решение этой задачи получено методом Фурье (см., например, [10]). Решение ищется в виде:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \dot{\mathbf{u}}(\pi, \pi, x_3) e^{i\pi(x_1+x_2)}, \quad (22)$$

где $\dot{\mathbf{u}}$ — преобразование Фурье вектор-функции \mathbf{u} по переменным x_1, x_2 . Подставив (22) в уравнения (1), (2) и граничные условия (3)–(6), в результате решения получим:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\pi \sin \pi x_1 \cos \pi x_2 \frac{x_3 \operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch} k x_3 + \operatorname{sh} k x_3 (k x_3 - k - x_3 \operatorname{ch} k \operatorname{sh} k)}{k^2 + \operatorname{ch}^2 k}, \\ u_2 &= -\pi \cos \pi x_1 \sin \pi x_2 \frac{x_3 \operatorname{ch}^2 k \operatorname{ch} k x_3 + \operatorname{sh} k x_3 (k x_3 - k - x_3 \operatorname{ch} k \operatorname{sh} k)}{k^2 + \operatorname{ch}^2 k}, \\ u_3 &= -\cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \left[\frac{\operatorname{ch} k x_3 (k^2 x_3 - k^2 - \operatorname{ch}^2 k - \operatorname{ch} k \operatorname{sh} k)}{k^2 + \operatorname{ch}^2 k} + \frac{\operatorname{sh} k x_3 (k x_3 \operatorname{ch}^2 k - k + \operatorname{ch} k \operatorname{sh} k)}{k^2 + \operatorname{ch}^2 k} \right], \\ P &= -2k \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \frac{\operatorname{ch} k x_3 (k - \operatorname{ch} k \operatorname{sh} k) + \operatorname{sh} k x_3 \operatorname{ch}^2 k}{k^2 + \operatorname{ch}^2 k}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $k = \pi\sqrt{2}$.

Далее на рисунках приводятся результаты численного решения на сетке $11 \times 11 \times 11$ для двух срезов прямоугольного параллелепипеда Π : $X_3 = 1$ (Рис. 2) и $X_1 = 0,2$ (Рис. 3). Сплошными линиями показаны изолинии давления, пунктирными — изолинии точного значения давления, стрелками — направления проекций скоростей в данном срезе, цветом — относительная невязка. Максимальное значение невязки составляет примерно 0,9%. Зоны ее наибольших значений расположены в окрестности угловых точек расчетной области.

Также следует отметить хорошую аппроксимацию горизонтальной составляющей скорости в «погранслое» около верхней подвижной границы (Рис. 4).

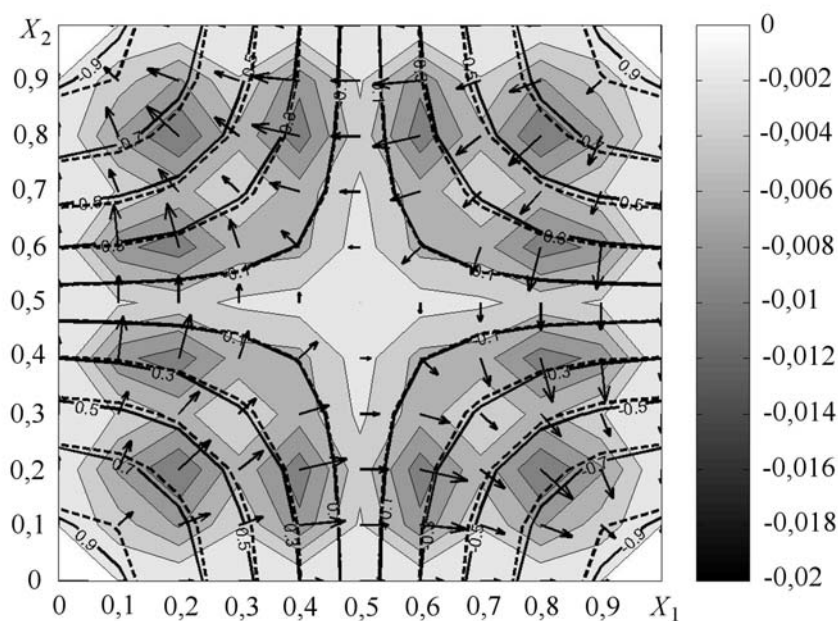


Рис. 2. Поле скоростей, давление и невязка численного решения на верхней границе $X_3 = 1$

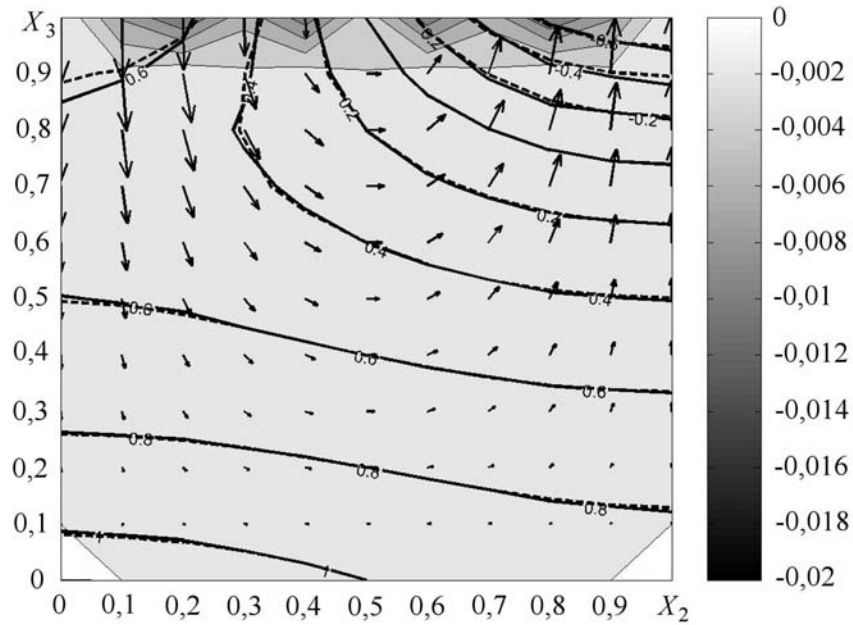


Рис. 3. Поле скоростей, давление и невязка численного решения на срезе $X_1 = 0,2$

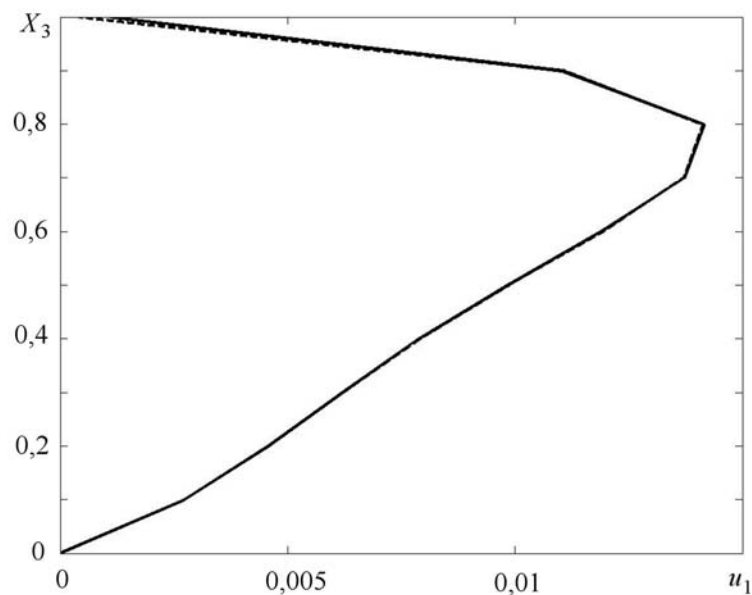


Рис. 4. Компонента скорости u_1 на отрезке $0 \leq X_3 \leq 1$ ($X_1 = 0,2$; $X_2 = 0,2$)

5. Заключение

Разработан эффективный численный подход к решению трехмерной задачи Стокса в естественных переменных методом конечных элементов в сочетании с методом проекции градиента, который обладает преимуществами как метода «векторный потенциал–завихренность», так и метода «скорость–давление».

Основной особенностью предлагаемого метода является достаточно точное соблюдение условия несжимаемости в каждом элементарном объеме. Благодаря улучшенной аппроксимации давления удастся устранить дополнительную погрешность, связанную с приближенным выполнением этого условия и характерную для большинства

разработанных ранее методов решения в естественных переменных. Как показано в численных примерах, предлагаемым методом задача гидростатики решается точно, тем самым достигается надежность и устойчивость численного счета.

Общая размерность задачи получается меньшей, чем при решении в естественных переменных традиционными методами, хотя квадратичные элементы приводят к более высокой степени заполненности матрицы жесткости по сравнению с линейными элементами. Введение новых переменных в виде интегралов от векторного потенциала вдоль ребер расчетной сетки позволяет понизить размерность системы разностных уравнений с сохранением разреженной структуры матрицы жесткости. Кроме того, задачи вычисления скоростей и давления решаются раздельно, тогда как обычно они решаются совместно. Вследствие такого разделения достигается экономия вычислительных ресурсов, которая имеет существенное значение в трехмерном случае.

Численные результаты показали хорошую работоспособность предлагаемого подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Дальневосточного отделения РАН (грант 09-III-A-07-317).

Литература

1. Рыков В.В., Трубицын В.П. Численное моделирование трехмерной мантийной конвекции и тектоника литосферных плит // Вычисл. сейсмология. – 1994. – Вып. 26. – С. 94-102.
2. Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением последовательности сеток // Вычисл. технологии. – 2002. – Т. 7, № 3. – С. 85-92.
3. Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением завихренности и векторного потенциала // Вычисл. технологии. – 2002. – Т. 7, № 1. – С. 114-125.
4. Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 352 с.
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 612 с.
6. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
7. Woidt, W.D. Neugebauer, H.J. Finite element models of density instability by means of bicubic spline interpolation // Phys. Earth and Planet. Inter. – 1980. – V. 21. – № 2/3. – P. 176-180.
8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – Новосибирск: Наука, 1978. – 536 с.
9. Richardson S. M. and Cornish A. R. H. Solution of three-dimensional incompressible flow problems // J. Fluid Mech. – 1977. – V. 82, N. 2. – P. 309-319.
10. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: ИЛ, 1954. – 863 с.
11. Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
12. Пак В.В. Численное решение задачи Стокса со свободной границей модифицированным методом проекции градиента // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 80-91.

Поступила в редакцию 20.11.09