УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЕРЕМЕННЫХ «СКОРОСТЬ–НАСЫЩЕННОСТЬ»

Г.А. Никифоров

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия

В работе предлагается метод решения задачи движения двухфазной жидкости в пористой среде в переменных «скорость–насыщенность». Уравнения для скорости решаются обычным методом контрольных объемов на прямоугольной сетке. Уравнение для насыщенности решается по явной схеме WENO с применением метода Рунге-Кутты для дискретизации по времени. Показано хорошее согласование решения с экспериментальными результатами R.A Dawe и C.A. Grattoni.

Ключевые слова: пористая среда, двухфазное течение, контрольный объем, схема WENO

MODELING OF TWO-PHASE FILTRATION USING “VELOCITY–SATURATION” VARIABLES

G.A. Nikiforov

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center RAS, Kazan, Russia

In this paper, we propose a numerical method for solving the problem of a two-phase immiscible flow in porous media in terms of “velocity–saturation” variables. The velocity equations are solved by a standard control-volume method on a rectangular grid. The saturation equation is solved using an explicit weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme with the Runge-Kutta time discretization. It is shown that the solution is in good agreement with the experimental results obtained by R.A Dawe and C.A. Grattoni.

Key words: porous media, two-phase flow, control volume, WENO scheme

1. Введение

Выбор метода решения задач движения двухфазной жидкости в разрабатываемых нефтяных пластах определяется специфическими особенностями, связанными со сложностью как геометрии изучаемого объекта (области течения), так и самих физико-химических процессов, происходящих в пористых средах. Математическое описание такого рода процессов обычно приводит к краевым задачам с сильно меняющимися разрывными коэффициентами с вырождением и уравнений, и краевых условий [1].

Двухфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей в пористой среде проявляет типичный конвекционно–диффузионный характер, причем в области течения можно наблюдать участки, где диффузионные потоки преобладают над конвективными (там, где капиллярные силы доминируют над силами, приложенными извне), и наоборот — где конвекция преобладает над диффузией. Обычно конвективный перенос массы имеет преимущество над диффузионным, и это необходимо учитывать при конструировании метода решения, чтобы получить его физически допустимым и неосциллирующим.

В последнее время широкое применение к задачам механики сплошных сред получил метод контрольных объёмов (control volume method) и различные его модификации. Основа метода заключается в том, что область течения разбивается на множество ячеек — контрольных (control volume) или конечных (finite volume) объемов — с последующим интегрированием законов сохранения по объёмам ячеек [2–4]. По своей сути метод контрольных объёмов совпадает с известным в отечественной литературе интегро-интерполяционным методом [5].

В настоящей работе метод контрольных объемов применяется для решения задачи двухфазной фильтрации в переменных «скорость–насыщенность». Решение отыскивается на прямоугольной сетке. Для аппроксимации уравнения насыщенности используются схема WENO и метод Рунге–Кутты третьего порядка точности [6], [7].

2. Постановка задачи

Рассматривается двухфазная изотермическая фильтрация несжимаемых несмешивающихся жидкостей в неоднородном недеформируемом пористом теле. Полагается, что динамические вязкости фаз постоянны, течение жидкостей медленное (то есть насыщенности фаз меняются квазиравновесным образом) и происходит без фазовых переходов, а функции относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления являются известными однозначными функциями насыщенности.

С учетом капиллярных и гравитационных сил законы фильтрации для двух фаз, одна из которых смачивающая $(i = w)$, а другая несмачивающая $(i = o)$, можно записать в виде [8]:

– уравнения неразрывности

$$m\frac{\partial S_i}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\mathbf{U}_i\right) = 0 \qquad \left(i = o, w\right), \tag{1}$$

– уравнения движения

$$\mathbf{U}_i = -k\frac{f_i}{\mu_i}\mathrm{grad}(P_i - \rho_i g z) \qquad \left(i = o, w\right), \tag{2}$$

где m — пористость, k — абсолютная проницаемость, g — ускорение свободного падения; а также для i-й фазы: P_i — давление, μ_i — динамическая вязкость, ρ_i — плотность, $\mathbf{U}_i$ — скорость фильтрации; S_i — насыщенность пористого тела i-й фазой, f_i — функция относительной фазовой проницаемости.

Разность давлений в фазах принимается равной капиллярному давлению:

$$P_o - P_w = P_c, \tag{3}$$

а насыщенности фаз удовлетворяют условию

$$S_o + S_w = 1. \tag{4}$$

Введем суммарную скорость фильтрации

$$\mathbf{U} = \mathbf{U_o} + \mathbf{U_w}. \tag{5}$$

Комбинируя (1) и (2) и учитывая (5), получим:

$$\mathrm{div}(\mathbf{U}) = 0 .$$

Обозначим: $K_o = k\dfrac{f_o}{\mu_o}$, $K_w = k\dfrac{f_w}{\mu_w}$, $F_{ow} = K_o\dfrac{K_w}{K}$, $K = K_o + K_w$ и $F = \dfrac{K_w}{K}$ — функция Баклея–Леверетта, $P_k = \Delta\rho gz + P_c$. Связь суммарной скорости фильтрации с давлением в несмачивающей фазе описывается уравнением:

$$\mathbf{U} = -K\,\mathrm{grad}\left(P_o - \rho_o gz\right) + K_w\,\mathrm{grad}\left(P_k\right).$$

Исключим давление из этого уравнения, поделив все его члены на K и применив к результату операцию $\mathrm{rot}(\cdot)$ [9], получим

$$\mathrm{rot}(\mathbf{U}/K) = \mathrm{rot}\left(F\,\mathrm{grad}(P_k)\right).$$

Таким образом, для определения поля скоростей фильтрации и насыщенности пласта смачивающей фазой S (здесь и далее индекс «w» опускается) будем иметь следующую систему уравнений:

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{U}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{U}/K\right) = \mathrm{rot}\left(F\,\mathrm{grad}\left(P_k\right)\right), \tag{7}$$

$$m\frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{div}\left[F\mathbf{U} + F_{ow}\,\mathrm{grad}\left(P_k\right)\right] = 0 . \tag{8}$$

Пусть процесс фильтрации происходит в области Ω с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей — $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Будем считать, что для начального момента времени известно распределение насыщенности $S = S^0$, а на $\partial\Omega$ задана нормальная составляющая скорости фильтрации U_n, которая должна удовлетворять условию $\int\limits_{\partial\Omega} U_n d\gamma = 0$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. На части границы $\partial\Omega_1$ будем считать известной насыщенность — $S\big|_{\partial\Omega_1} = S^0\big|_{\partial\Omega_1}$, а на другой ее части $\partial\Omega_2$ — $\partial S/\partial n\big|_{\partial\Omega_2} = 0$.

3. Метод численного решения

Область течения покроем прямоугольной сеткой с шагом Δx по оси x и Δy по оси y. Искомые значения скорости свяжем с серединами сторон ячеек, а насыщенности — с центрами ячеек.

3.1. Аппроксимация уравнений для скорости

Для уравнения (6) контрольные объёмы Ω_i выберем совпадающими с ячейками сетки. Для уравнения (7) контрольный объём G_j сместим на половину шага по каждой оси [10]. В качестве искомых величин возьмем нормальные составляющие скорости фильтрации в серединах сторон ячеек. Фрагмент сетки изображен на рисунке 1.

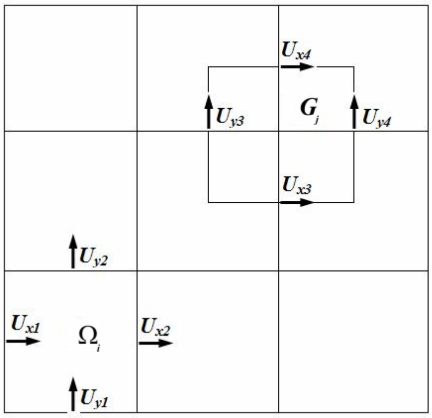

Рис. 1. Фрагмент разнесенной сетки

В соответствии с методом контрольных объёмов проинтегрируем (6) по объёму Ω_i ($1 \le i \le I$, I — число ячеек сетки) [10]. Получим

$$\int\limits_{\partial\Omega_i} U_n d\gamma = 0\,,$$

где **n** — внешняя нормаль к границе контрольного объема.

Уравнение (7) проинтегрируем по объёму G_j ($1 \le j \le J$, J — число внутренних узлов сетки):

$$\iint\limits_{G_j} \mathrm{rot}(\mathbf{U}/K)dA = \iint\limits_{G_j} \mathrm{rot}\left(F\,\mathrm{grad}(P_k)\right)dA\,,$$

откуда

$$\int\limits_{\partial G_j} U_\tau / K d\ell = \int\limits_{\partial G_j} F \frac{\partial P_k}{\partial \tau} d\ell\,,$$

где τ — вектор, касательный к границе контрольного объема G_j.

Учитывая, что нормаль к вертикальной стороне ячейки совпадает по направлению с направлением оси *x*, а нормаль к горизонтальной стороне ячейки — с направлением оси *y*, и, заменяя интегралы их приближенными значениями, получим

$$\left(U_{x2} - U_{x1}\right)\Delta y + \left(U_{y2} - U_{y1}\right)\Delta x = 0\,, \tag{9}$$

$$\left(\frac{U_{x3}}{K_3} - \frac{U_{x4}}{K_4}\right)\Delta x + \left(\frac{U_{y4}}{K_4} - \frac{U_{y3}}{K_3}\right)\Delta y = B\,, \tag{10}$$

где *B* — приближенное значение интеграла от правой части уравнения (7).

Для множества искомых значений компонент скорости фильтрации U_{xi} и U_{yj} в серединах сторон ячеек получим множество линейных алгебраических уравнений, которое должно быть дополнено граничными условиями:

$$U_{xi}\big|_{\partial\Omega_i} = q_{xi}, \qquad U_{yj}\big|_{\partial\Omega_j} = q_{yj}.$$

Заметим, что итоговое количество уравнений на одно больше, чем количество искомых значений скорости. Поэтому одно из уравнений системы линейных алгебраических уравнений может быть отброшено.

3.2. Аппроксимация уравнения для насыщенности

К уравнению насыщенности (8) также применим метод контрольных объемов. В качестве контрольного объема возьмем Ω_i с границей $\partial\Omega_i$ (тот же, что и для уравнения (6)) и, согласно методу контрольных объёмов, проинтегрируем (8) по Ω_i:

$$\iint_{\Omega_i} m\frac{\partial S}{\partial t}d\Omega + \iint_{\Omega_i} \operatorname{div}\left[F\mathbf{U} + F_{ow}\operatorname{grad}\left(P_k\right)\right]d\Omega = 0$$

или

$$\iint_{\Omega_i} m\frac{\partial S}{\partial t}d\Omega + \int_{\partial\Omega_i} (FU_n + F_{ow}\frac{\partial P_k}{\partial n})d\gamma = 0. \qquad (11)$$

Для аппроксимации потоков через границу контрольного объема используем схему WENO [6, 7].

3.2.1. WENO схема

Проиллюстрируем данную схему на одномерном случае. Рассмотрим гиперболический закон сохранения

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad (12)$$

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Пусть $I_j = \left[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\right]$ — j-я ячейка, $x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = h$. Множество $\{I_j\}$ принадлежит R. Обозначим $\{\bar{u}_j(.,t)\}$ — дифференциальное среднее слабого решения $u\left(x,t\right)$ задачи (12), то есть

$$\bar{u}_j(.,t) = \frac{1}{h}\int_{I_j} u(x,t)dx. \qquad (13)$$

Интегрируя (12) по каждой ячейке I_j, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_j(.,t) = -\frac{1}{h}\left[f(u(x_{j+1/2},t)) - u(x_{j-1/2},t))\right]. \qquad (14)$$

Необходимо вычислить $f(u(x,t))$ на каждой границе $x_{j+1/2}$. Воспользуемся для этого схемой WENO.

Схема WENO включает в себя два шага:

1-й шаг: для всех i с k-м порядком точности реконструируются значения $s^{-}_{i+1/2}$ и $s^{+}_{i+1/2}$;

2-й шаг: для всех i вычисляются монотонные потоки $\widehat{f}_{i+1/2}$, $\widehat{f}_{i-1/2}$, например, одним из следующих способов: по Годунову, по Engquist-Osher или по Lax-Friedrichs [11].

3.2.2. Реконструкция (третий порядок точности)

Для контрольного объема $I_i \equiv \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right]$ реконструируемое решение $R_i(x)$ представляется в виде выпуклой комбинации интерполянтов $p_L(x)$, $p_C(x)$, $p_R(x)$:

$$R_i(x) = w_L p_L(x) + w_C p_C(x) + w_R p_R(x),$$

где

$$p_L(x) = \overline{u}_i + \frac{\overline{u}_i - \overline{u}_{i-1}}{\Delta x_i}(x - x_i), \qquad p_R(x) = \overline{u}_i + \frac{\overline{u}_{i+1} - \overline{u}_i}{\Delta x_i}(x - x_i),$$

$$p_C(x) = \overline{u}_i - \frac{1}{12}(\overline{u}_{i-1} - 2\overline{u}_i + \overline{u}_{i+1}) + \frac{\overline{u}_{i+1} - \overline{u}_{i-1}}{2\Delta x_i}(x - x_i) + \frac{\overline{u}_{i-1} - 2\overline{u}_i + \overline{u}_{i+1}}{\Delta x_i^2}(x - x_i)^2,$$

$$w_L = \frac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_C + \alpha_R}, \qquad w_C = \frac{\alpha_C}{\alpha_L + \alpha_C + \alpha_R}, \qquad w_R = \frac{\alpha_R}{\alpha_L + \alpha_C + \alpha_R},$$

$$\alpha_L = \frac{1}{4(\varepsilon + IS_L)^2}, \qquad \alpha_C = \frac{1}{2(\varepsilon + IS_C)^2}, \qquad \alpha_R = \frac{1}{4(\varepsilon + IS_R)^2}.$$

Входящие сюда индикаторы гладкости находятся по формулам:

$$IS_L = (\overline{u}_i - \overline{u}_{i-1})^2, \qquad IS_R = (\overline{u}_{i+1} - \overline{u}_i)^2, \qquad IS_C = \frac{13}{3}(\overline{u}_{i-1} - 2\overline{u}_i + \overline{u}_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(\overline{u}_{i-1} - \overline{u}_{i+1})^2.$$

3.2.3. Монотонные потоки $\tilde{h}(.,.)$

Вычисление потоков $\tilde{h}(.,.)$ через границу контрольного объема осуществляется одним из возможных способов:

а) по Годунову

$$h^G(a,b) = \begin{cases} \min\limits_{a \le u \le b} f(u) & \text{если } a \le b, \\ \max\limits_{a \ge u \ge b} f(u) & \text{если } a > b; \end{cases} \tag{15}$$

б) по Engquist-Osher

$$h^{EO}(a,b) = \int_0^b \min\left(f'(s), 0\right) ds + \int_0^a \max\left(f'(s), 0\right) ds + f(0); \tag{16}$$

в) по Lax-Friedrichs

$$h^{LF}(a,b) = \frac{1}{2}\left[f(a) + f(b) - \beta(b - a)\right], \qquad \beta = \max_{\min(a,b) \le u \le \max(a,b)} \left|f'(u)\right|. \tag{17}$$

Преимущества и ограничения, связанные с использованием каждого из этих приемов вычисления монотонных потоков, обсуждаются в работах [11, 12].

Аппроксимируя $f(s(x_{j+1/2},t))$ в выражении (14) функцией $\tilde{h}\left(R_j(x_{j+1/2}),\, R_{j+1}(x_{j+1/2})\right)$ и $f\left(s(x_{j-1/2},t)\right)$ функцией $\tilde{h}\left(R_{j-1}(x_{j-1/2}),\, R_j(x_{j-1/2})\right)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\overline{u}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i}\left[\tilde{h}\left(R_i(x_{i+1/2}),\, R_{i+1}(x_{i+1/2})\right) - \tilde{h}\left(R_{i-1}(x_{i-1/2}),\, R_i(x_{i-1/2})\right)\right]. \quad (18)$$

3.2.4. Дискретизация по времени

Множество обыкновенных дифференциальных уравнений (18), которое представим как $\frac{du}{dt} = L(u)$, решается методом Рунге-Кутты третьего порядка:

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t L(u^n);$$
$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \Delta t L(u^{(1)});$$
$$u^{(n+1)} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L\left(u^{(2)}\right).$$

3.3. Алгоритм решения задачи

Алгоритм решения задачи в целом сводится к последовательному отысканию на каждом временном шаге поля скоростей из решения системы линейных уравнений (9), (10) и поля водонасыщенности по схеме WENO, в которой предпринимаются следующие действия:

– выполняется процедура реконструкции, в результате которой определяются два значения насыщенности в середине каждой стороны контрольного объема (слева и справа от границы);
– вычисляются монотонные потоки через границы;
– формируется система уравнений (18) и методом Рунге-Кутты отыскивается значение насыщенности для нового момента времени.

4. Численные результаты

В работе [13] описан эксперимент по вытеснению нефти водой на модели, представляющей собой составное пористое тело, ограниченное двумя прозрачными стенками и заполненное стеклянными шариками (схематично модель показана на рисунке 2). Верхняя и нижняя границы пористого тела, имеющего размеры 20×10×0,6 см, непроницаемы, а левая и правая стороны являются проточными. Область течения разбита на четыре зоны, характеризуемые коэффициентами абсолютной проницаемости k_{high} = 0,27 мкм^2 и k_{low} = 0,11 мкм^2. Пористость среды составляет $m = 0,4$, вязкость нефти μ_o = 5 мПа×с, вязкость воды μ_w = 1 мПа×с. Через левое сечение в модель пласта нагнетается вода с расходом Q = 1 мл/мин, а через правое сечение пласта осуществляется отбор жидкости. Результаты эксперимента в виде поля насыщенности и картины течения, полученные с помощью визуализации потока подкрашенной жидкостью, приведены на рисунках 3 и 5.

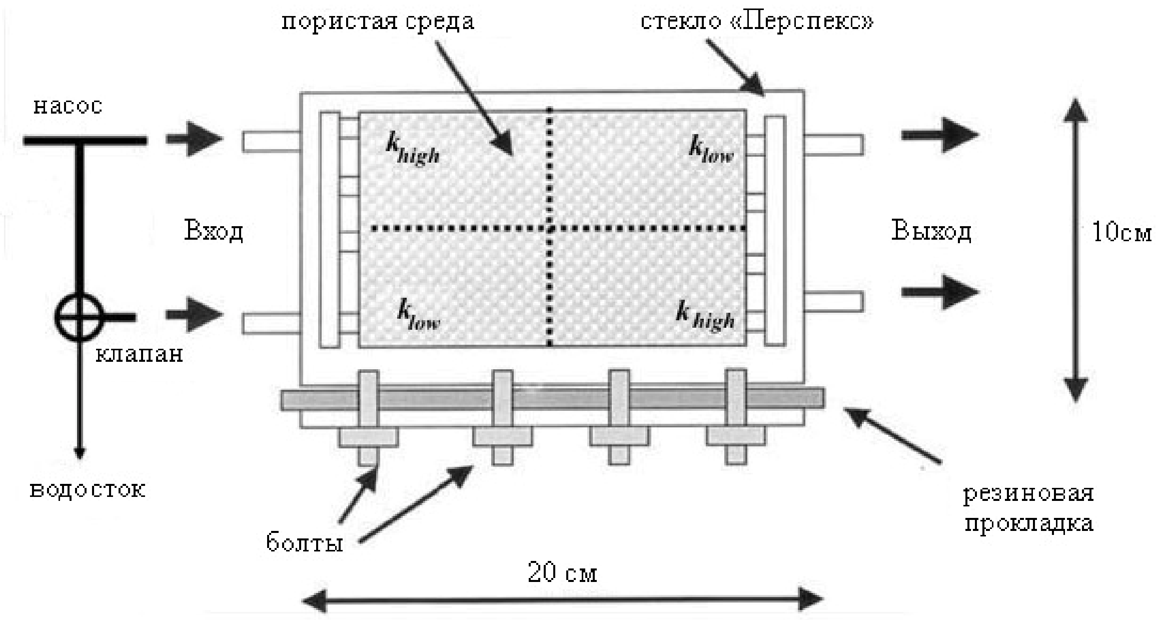

Рис. 2. Схема экспериментальной установки [13]

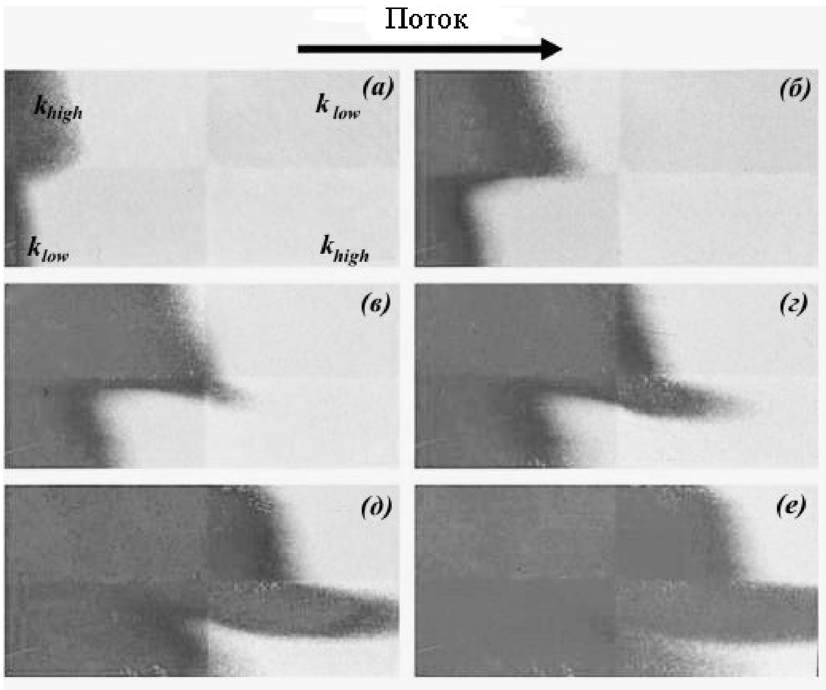

Рис. 3. Распределение водонасыщенности в модели. Эксперимент [13]

Результаты расчетов по предлагаемому алгоритму приведены на рисунках 4 и 6. Расчеты выполнены на сетке 161×161 узел. Монотонные потоки вычислены способом Годунова. Функции относительных фазовых проницаемостей f_i были приняты в следующем виде:

$$f_w = \left(\frac{S - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{S_{\max} - S}{S_{\max} - S_{\min}}\right)^2\right), \qquad f_o = \left(\frac{S_{\max} - S}{S_{\max} - S_{\min}}\right)^4,$$

где $S_{\min} = 0{,}3$ — насыщенность пласта связанной водой, $1-S_{\max} = 0{,}3$ — насыщенность пласта остаточной нефтью. Шаг по времени составлял $\Delta t = 0{,}1$ с. На рисунке 4 приведено вычисленное распределение водонасыщенности в модели на моменты времени $t = 2$, 5, 8, 11, 14 и 17 мин, а на рисунке 6 изображено поле скоростей, полученное в результате расчета при $t = 2$.

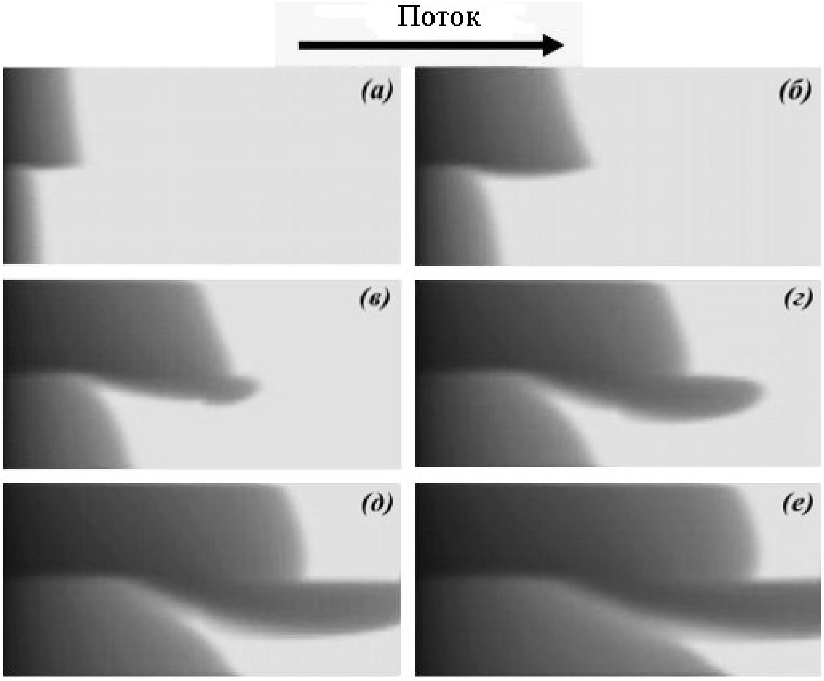

Рис. 4. Распределение водонасыщенности в модели. Расчет

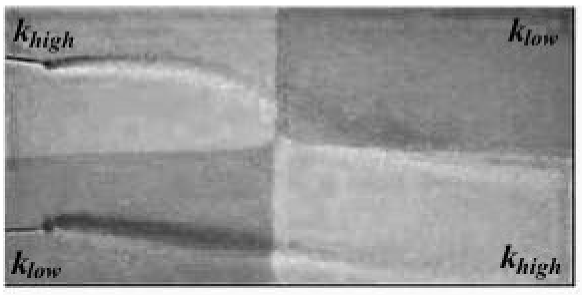

Рис. 5. Линии тока. Эксперимент [13]

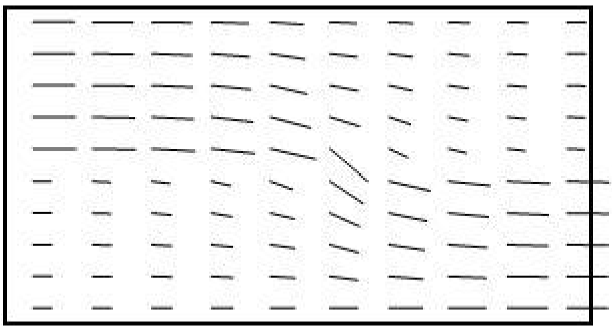

Рис. 6. Поле скоростей. Расчет

5. Заключение

Разработан метод численного решения задачи о движении двухфазной жидкости в пористой среде в переменных «скорость–насыщенность». В отличие от известного смешенного метода контрольных объемов в предлагаемом подходе не вычисляется поле давления, что позволяет сократить размерность решаемой системы линейных уравнений.

Реализован метод контрольных объемов на разнесенной прямоугольной сетке с применением схемы WENO третьего порядка для насыщенности. Монотонность решения уравнения для водонасыщенности достигается за счет реконструкции решения на гранях ячеек по их значениям в центрах и приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва на крутых фронтах.

Выполнены численные расчеты и проведено сравнение результатов вычислений и эксперимента, которое показало их удовлетворительное соответствие и позволило заключить, что построенная модель применима к обработке экспериментальных данных по вытеснению нефти водой из пористых образцов в случае, когда давление в образце знать не обязательно.

Литература

1. *Коновалов А.Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.
2. *Флетчер Р.* Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
3. *Li B., Chen Z., Huan G.* Control volume function approximation methods and their applications to modeling porous media flow // Advances in Water Resources. – 2003. – V. 26. – P. 435-444.
4. *Taniguchi N., Kobayashi T.* Finite volume method on the unstructured grid system // Computers Fluids. – 1991. – V. 19, N. 3/4. – P. 287-295.
5. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
6. *Chi-Wang Shu.* High-order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous galerkin methods for CFD // Int. J. Computational Fluid Dynamics. – 2003. – V. 17, N. 2. – P. 107-118.
7. *Huber R., Helmig R.* Node-centered finite volume discretizations for the numerical simulation of multiphase flow in heterogeneous porous media // Computational Geosciences. – 2000. – V. 4. – P. 141-164.
8. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 207 с.
9. *Никифоров А.И.* Об уравнениях двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации и оптимизации нефтедобычи. – Казань, 1990. – С. 75-78.
10. *Никифоров Г.А.* Применение метода контрольных объёмов для решения задач двухфазной фильтрации в переменных «скорость–насыщенность» // Вычислительные методы и программирование. – 2006. – Т. 7. – С. 224-228.
11. *Shu C.-W.* Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // NASA/CR-97-206253. ICASE Report. – 1997. – N. 97-65. – 78 p.
12. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
13. *Dawe R.A., Grattoni C.A.* Experimental displacement patterns in a 2×2 quadrant block with permeability and wettability heterogeneities – problems for numerical modeling // Transp. Porous Med. – 2008. – V. 71. – P. 5-22.

Поступила в редакцию 14.12.09

Сведения об авторе

Григорий Анатольевич Никифоров, асп., Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН (ИММ КазНЦ РАН), 420111, Казань, Лобачевского, 2/30; E-mail: ganikiforov@mail.ru