

УДК 539.3

**ВЕРИФИКАЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО РЕШЕНИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ, УСТОЙЧИВОСТИ
И ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ОБОЛОЧЕК**

А.А. Артемьева, В.Г. Баженов, А.И. Кибец, П.В. Лаптев, Д.В. Шошин

*Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

Приводится конечно-элементная методика анализа в трехмерной постановке квазистатических и динамических процессов упругопластического деформирования, потери устойчивости и закритического поведения конструкций, включающих тонкостенные оболочки. Эффективность методики подтверждается результатами верификационных расчетов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, верификация, упругопластичность, нестационарные задачи, оболочки

**VERIFICATION OF THE FINITE-ELEMENT SOLUTION
OF 3D NON-STATIONARY PROBLEMS OF ELASTO-PLASTIC DEFORMATION,
STABILITY AND SUPERCRITICAL BEHAVIOR OF SHELLS**

A.A. Artemjeva, V.G. Bazhenov, A.I. Kibetz, P.V. Laptev and D.V. Shoshin

Research Institute of Mechanics, Nizhny Novgorod Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, Russia

FEM technique is used to analyze the quasi-static and dynamic processes of elasto-plastic deformation, stability loss and supercritical behavior of thin-walled shell structures in three-dimensional formulation. The effectiveness of the proposed approach has been verified in numerical experiments.

Key words: finite-element method, verification, elasto-plasticity, non-stationary problems, shells

1. Введение

Несмотря на накопленный положительный опыт [1-4], границы применимости метода конечных элементов (МКЭ) для исследования геометрически и физически нелинейных задач динамики и устойчивости оболочечных конструкций еще недостаточно изучены. Серьезной проблемой, с которой приходится сталкиваться при построении конечных элементов (КЭ), является эффект так называемого «запирания». Суть его заключается в том, что в процессе деформирования КЭ демонстрирует сильно завышенную жесткость, в результате чего невозможно получить необходимую точность решения при измельчении сетки. В ряде случаев развиваются моды нулевой энергии (неустойчивость типа «песочные часы»). В силу отмеченных недостатков численных схем представляются актуальными экспериментальные и теоретические исследования, позволяющие верифицировать существующие и разрабатываемые методы решения рассматриваемого класса задач. Ниже приводится конечно-элементная методика анализа трехмерных нелинейных задач динамики конструкций, включающих тонкостенные оболочки, и верификационные тесты для оценки ее достоверности.

2. Определяющая система уравнений

Для описания движения деформируемой среды применяется текущая лагранжева формулировка [5, 6]. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} P_i \delta \dot{U}_i d\gamma + \int_{\Gamma_q} P_i^q \delta \dot{U}_i d\gamma \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

где \dot{U}_i — компоненты вектора скорости перемещения в общей декартовой системе координат X ; σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений Коши и скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений); ρ — плотность; P_i^q — контактное давление; P_i — распределенная нагрузка; Ω — исследуемая область; Γ_q — поверхность контакта; Γ_p — зона действия внешнего давления; $\delta \dot{\epsilon}_{ij}$, $\delta \dot{U}_i$ — вариации $\dot{\epsilon}_{ij}$, \dot{U}_i (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями $\delta \dot{U}_i = 0$); точка над символом означает частную производную по времени t ; по повторяющимся индексам ведется суммирование. Компоненты тензора скорости деформаций определяются в метрике текущего состояния:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= (\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}) / 2 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ \dot{U}_{i,j} &= \partial \dot{U}_i / \partial X_j, \\ X_i &= X_i|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_i dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений находятся из соотношений теории течения с изотропным упрочнением:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} + \sigma^v \delta_{ij}, & \dot{\sigma}^v &= -3K \dot{\epsilon}^v, & \dot{\epsilon}^v &= \dot{\epsilon}_{ii} / 3, \\ \dot{\epsilon}'_{ij} &= \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}^v \delta_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p, & \dot{\epsilon}_{ii}^p &= 0, & D_J \sigma'_{ij} &= 2G \dot{\epsilon}'_{ij}, \\ \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \sigma'_{ij}, & \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} &= 2/3 \sigma_T^2 (\chi), & \chi &= \sqrt{2/3} \int_0^t \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь σ'_{ij} , $\dot{\epsilon}'_{ij}$, σ^v , $\dot{\epsilon}^v$ — девиаторные и шаровые компоненты тензоров напряжения и скоростей деформаций; $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ — скорости пластических деформаций; G , K — модули сдвига и объемного сжатия; δ_{ij} — символы Кронекера; D_J — производная Яуманна: $D_J \sigma'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ik} W_{kj} - \sigma'_{jk} W_{ik}$, где $W_{ij} = (\dot{U}_{i,j} - \dot{U}_{j,i}) / 2$; σ_T — динамический предел текучести; $\dot{\lambda}$ — параметр, тождественно равный нулю при упругом деформировании и определяемый при упругопластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки. На контактной поверхности формулируются условия непроникания по нормали и свободного скольжения вдоль касательной к поверхности контакта:

$$\dot{U}_n^1 = \dot{U}_n^2, \quad q_n^1 = -q_n^2, \quad q_i^1 = q_i^2 = 0, \quad i = \tau_1, \tau_2. \quad (4)$$

Связь контактирующих подобластей полагается односторонней, то есть, возможен отрыв поверхностей друг от друга и повторное вступление в контакт. Система уравнений (1)–(4) дополняется начальными условиями и кинематическими граничными условиями.

3. Метод решения

Для дискретизации определяющей системы уравнений по пространственным переменным применяется метод конечных элементов, а дискретизация по времени базируется на явной конечно-разностной схеме типа «крест» [7]. Деформируемая конструкция заменяется лагранжевой сеткой, состоящей из 8-узловых конечных элементов. В узлах сетки определяются ускорения $\{\ddot{U}\}$, скорости $\{\dot{U}\}$ и перемещения $\{U\}$ в общей системе координат $\{X\} = \{X_1 X_2 X_3\}^T$. Конечный элемент с помощью полилинейного изопараметрического преобразования отображается на куб $-1 \leq \xi_i \leq 1$ ($i = \overline{1, 3}$):

$$X_i = \sum_{k=1}^8 X_i^k N_k(\xi_1 \xi_2 \xi_3), \quad N_k = (1 + \xi_1 / \xi_1^k)(1 + \xi_2 / \xi_2^k)(1 + \xi_3 / \xi_3^k) / 8, \quad (5)$$

где X_i^k, ξ_i^k — координаты узлов в базисах $\{X\}, \{\xi\}$; N_k — функции формы. Компоненты скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ аппроксимируются в КЭ линейными функциями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^0 + \alpha_1 \dot{\varepsilon}_{ij}^1 \xi_1 + \alpha_2 \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \alpha_3 \dot{\varepsilon}_{ij}^3 \xi_3. \quad (6)$$

По аналогии с теорией оболочек $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ — значения компонент скорости деформаций в центре КЭ, далее будут называться безмоментными составляющими, а их градиенты $\dot{\varepsilon}_{ij}^k = \partial \dot{\varepsilon}_{ij} / \partial \xi_k = \text{const}$ — моментными составляющими. Чтобы не завышать сдвиговую жесткость элемента, в (6) учитываются только компоненты $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$, соответствующие изгибающим и крутящим моментам в теории оболочек типа Тимошенко [8]. Весовые коэффициенты α_k вводятся для регулирования влияния моментных составляющих скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$ на численное решение ($0 < \alpha_k \leq 1, k = \overline{1, 3}$). На основе (6) разработано семейство конечных элементов для моделирования сложных составных конструкций.

Тип А — конечный элемент сплошной среды. Наиболее простой вариант КЭ получается при $\alpha_k \ll 1, k = \overline{1, 3}$. В этом случае пластические свойства материала учитываются при вычислении напряжений в центре КЭ, а связь $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$ и соответствующих им моментных составляющих скоростей напряжений полагается линейно упругой. Как показали тестовые расчеты, при $\alpha_k \approx 0,01$ введение $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$ в численную схему позволяет подавить моды с нулевой энергией и сохранить точность методов [9, 10]. Элементы типа «А» можно применять для исследования динамики массивных тел и тонкостенных конструкций. Однако в пластинах и оболочках для достижения приемлемой точности решения сетка расчетной области должна иметь не менее четырех элементов по толщине, что многократно повышает затраты вычислительных ресурсов и оправдано только при интенсивных локальных воздействиях.

Тип В — конечный элемент оболочки. Предполагается, что в тонкостенных элементах конструкций поперечные сдвиговые и изгибные деформации малы, а смещения и углы поворота поперечного сечения произвольны. В каждом конечном элементе вводится локальный базис $\{x\} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ (ось x_3 направлена по нормали к срединной поверхности), отслеживающий вращение КЭ как жесткого целого [1, 11]. При этих условиях можно считать, что ось ξ_3 совпадает с x_3 и $\alpha_3 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 \ll 1$. Конечный элемент разбивается вдоль ξ_3 на ряд подслоев. Напряжения в подслоях определяются в точках $\xi_1 = \xi_2 = 0$ из уравнений состояния, исходя из линейного распределения скорости деформаций по толщине оболочки: $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\epsilon}_{ij}^3 \xi_3$. Для улучшения сходимости численного решения при дискретизации тонкостенных конструкций трехмерными конечными элементами вводится дополнительная гипотеза [12]: компонента тензора напряжений, направленная по нормали к срединной поверхности, не меняется по толщине оболочки. Моментные составляющие $\dot{\epsilon}_{ij}^1, \dot{\epsilon}_{ij}^2$, описывающие изменение скорости деформаций в срединной поверхности КЭ оболочки, применяются для регуляризации численного решения (подавления мод нулевой энергии) и определяются как в КЭ сплошной среды.

Тип С — конечный элемент оболочки. Там, где в процессе деформирования возможны большие локальные формоизменения, целесообразно все коэффициенты α_k в (6) положить равными единице. В направлении нормали к срединной поверхности (ось ξ_3) конечный элемент разбивается на ряд подслоев. В отличие от предыдущего КЭ, вычисление скоростей деформаций и напряжений осуществляется не в центрах подслоев, где $\xi_1 = \xi_2 = 0$, а в квадратурных точках Гаусса. Для численного интегрирования в уравнении баланса виртуальных мощностей (1) применяются формулы, используемые в работе [3].

Мощность виртуальной работы в каждом конечном элементе выражается через матрицу масс, узловые ускорения и статически эквивалентные узловые силы. После замены интегрирования по области Ω суммированием по элементам получается дискретный аналог уравнений движения (1):

$$[M]\{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (7)$$

где $[M]$ — диагональная матрица масс; $\{\ddot{U}\}, \{F\}$ — векторы, составленные из ускорений узлов КЭ-сетки и результирующих узловых сил в общей системе координат. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (7) интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест».

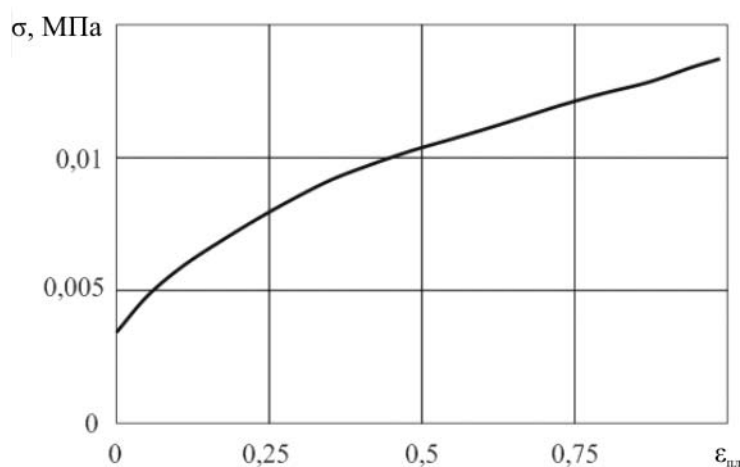
Изложенная методика реализована в рамках вычислительного комплекса «Динамика-3» [13]. Далее проводится ее верификация на ряде тестовых задач.

4. Верификационные расчеты

Задача 1. Численно и экспериментально исследован процесс неосесимметричного выпучивания стальной цилиндрической оболочки ($h = 10^{-3}$ м, $L/h = 92$, $R/h = 14,5$) с массивными оголовками (Рис. 1, а) при осевом сжатии в квазистатическом режиме нагружения. Материал образца — сталь X18H10T (модуль упругости $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м³), диаграмма деформирования которой приведена на рисунке 1, б.



а



б

Рис. 1. Исследуемый образец (а) и диаграмма деформирования стали X18H10T (б)

Известно [14-16], что выпучивание металлических цилиндрических оболочек при осевом квазистатическом и динамическом сжатии происходит по осесимметричным или неосесимметричным формам. Реализация той или иной формы волнообразования зависит от скорости удара, соотношения масс ударяющего тела и оболочки, геометрии и материала оболочки. Одним из главных параметров, определяющих форму потери устойчивости оболочек средней длины, является отношение радиуса кривизны срединной поверхности к толщине оболочки R/h . Выпучивание достаточно толстых оболочек происходит с образованием складок вблизи торцов и сопровождается пластическим течением. Ниже приводятся результаты верификационных расчетов, позволяющие оценить применимость разработанных конечных элементов в этом классе задач.

В силу симметрии в расчетах рассматривалась четвертая часть оболочки, которая покрывалась сеткой из 920 конечных оболочечных элементов типа «В» или «С» (92 КЭ вдоль образующей и 10 КЭ в направлении угла поворота). Массивные оголовки моделировались конечными элементами типа «А». Результаты численного решения сравнивались с экспериментальными данными, полученными Казаковым Д.А. (НИИ механики Нижегородского университета, Н. Новгород) на установке УМЭ-10-ТМ. Процесс выпучивания происходил следующим образом. Сначала оболочка, за исключением краев, равномерно расширялась. Затем у ее торцов намечались осесимметричные складки, а прогибы в средней части фиксировались. Дальнейший рост

нагрузки вызывал вначале одновременное увеличение амплитуды обеих складок. Затем рост одной из них прекращался, нагрузка достигала своего предельного значения, и наблюдалась несимметрия прогибов на растущей складке и рядом с ней. После начала трансформации осевые усилия на торце начинали уменьшаться. За складкой образовывалась вмятина, и поперечное сечение оболочки в этой области приобретало эллиптическую форму.

При исследовании устойчивости оболочки по неосесимметричной форме в расчетах задавались несовершенства в виде начальной погиби: $w = A \cos(\beta) \sin(2\pi x/l)$. Здесь $A = 0,1 h$, h — толщина оболочки, $0 \leq \beta \leq 90^\circ$ — координата по углу поворота, $0 \leq x \leq (l/2)$ — координата вдоль образующей, l — длина выпучины, определяемая из осесимметричного расчета. Сжатие оболочки проводилось до величины осадки $\Delta L = 8h$.

На закритической стадии процесса выпучивания учитывалось контактное взаимодействие при замыкании гофров. В конечных элементах оболочки типа «В» при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01$ в случае больших изгибных деформаций в зоне гофров развиваются моды нулевой энергии. На рисунке 2 изображена остаточная форма трубчатого образца, полученная в эксперименте (Рис. 2, а) и при численном решении задачи (Рис. 2, б) с использованием конечного элемента оболочки типа «С», который обеспечивает устойчивость счета и приемлемую точность расчетов.

Как показали исследования, в процессе выпучивания оболочки имеют место упругая разгрузка и сложное нагружение. Момент начала разгрузки и ее продолжительность на срединном слое заметно отличаются от соответствующих величин на лицевых поверхностях оболочек. Сложное нагружение наиболее существенно проявляется в наружных волокнах. Анализ траекторий деформирования позволяет классифицировать их как траектории малой и средней кривизны. Большая кривизна наблюдается только на участках упругих разгрузок.

На рисунке 3 приведены графики изменения радиальных перемещений W в точках, отмеченных на рисунке 2, б цифрами I, II, а также осевых усилий F в зоне закрепления

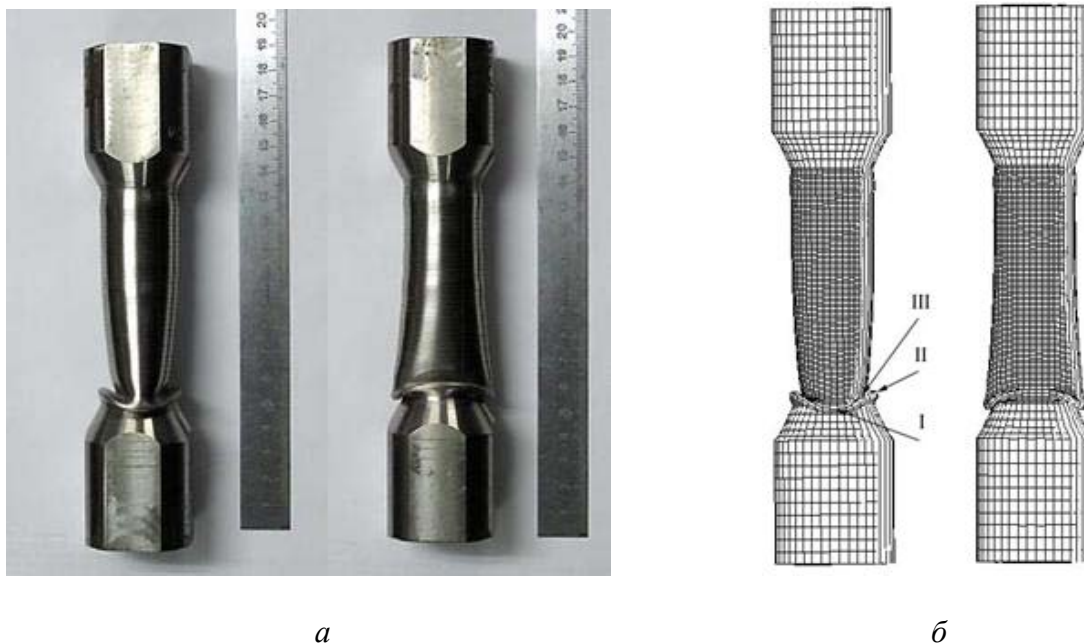


Рис. 2. Остаточная форма образца, полученная в эксперименте (а), в расчете (б)

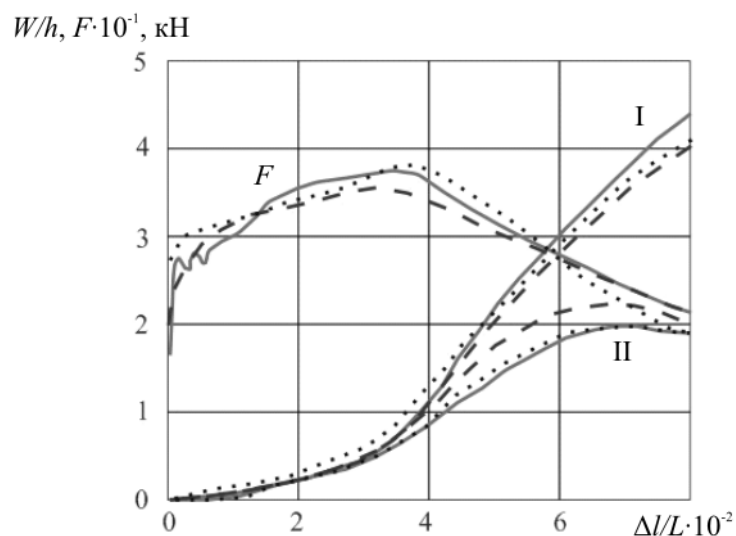


Рис. 3. Графики изменения радиальных перемещений и осевых усилий F в зависимости от сближения торцов оболочки

оболочки в зависимости от сближения торцов. Пунктирные линии отвечают экспериментальным данным, сплошные — расчету по изложенной методике с применением КЭ типа «С», штриховые — расчету с помощью пакета программ ANSYS). Расчетные и экспериментальные значения интегральных параметров процесса (прогибов и усилий) хорошо согласуются между собой. Как следует из графиков, неосесимметричная форма потери устойчивости развивается с момента, когда осесимметричная выпучина начинает превышать толщину оболочки.

Для рассмотренного выше цилиндрического образца также моделировалась задача ударного сжатия. Результаты расчета сравнивались с данными натурального эксперимента, полученными Деменко П.В. и Лаптевым П.В. (НИИ механики Нижегородского университета, Н. Новгород) на установке РСГ–60 [17]. Одним из торцов образец свободно опирался на мерный стержень, по другому торцу бил ударник массой 5,4 кг с начальной скоростью $V_0 = 11,93$ м/с. Ударник и мерный стержень были выполнены из стали и в расчетах предполагались упругими.

На рисунке 4, *a* и *b* представлены остаточные прогибы вдоль образующей рабочей части. Точками обозначены экспериментальные значения амплитуд выпучин. Величина осадки образца составляла: в расчете — $11,5 h$, в эксперименте — $12 h$. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными, несмотря на большие формоизменения и сложный характер нагружения.

Задача 2. Составная стальная оболочка коробчатого профиля ($h = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м), изображенная на рисунке 5, деформировалась при соударении с плитой, имеющей массу 500 кг и начальную скорость 5 м/с. На правом торце конструкции задавались условия неподвижного заземления, на левом торце — условия контактного взаимодействия с плитой. Механические характеристики материала равнялись: модуль упругости — 1,99355 ГПа; коэффициент Пуассона — 0,3; плотность — 7800 кг/м³; предел текучести — 185,4 МПа; модуль линейного изотропного упрочнения — 540 МПа. При решении задачи конструкция разбивалась на 1536 конечных элементов. Результаты решения представлены на рисунках 6, 7 в виде графика зависимости сжимающей силы F от продольного смещения левого торца оболочки и формы оболочки на момент времени 16 мс.

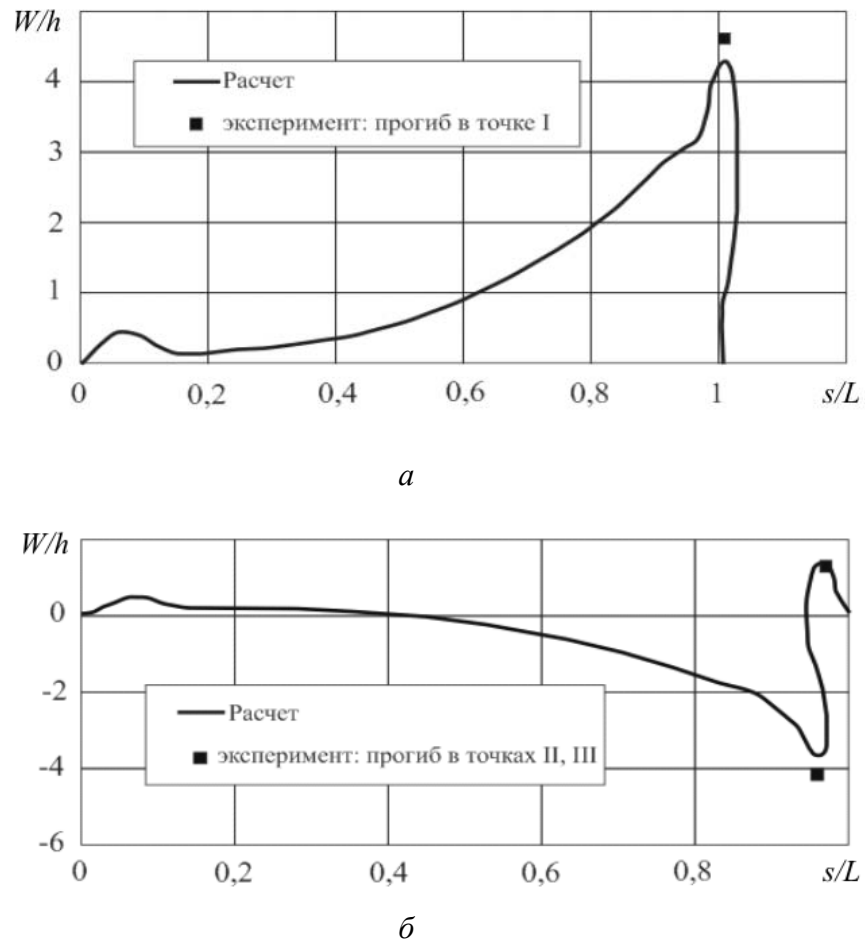


Рис. 4. Остаточные прогибы вдоль образующей цилиндрической оболочки в сечении, проходящем через точки I (*a*) и II, III (*б*) (s – длина дуги вдоль образующей цилиндрической оболочки $0 \leq s \leq L$)

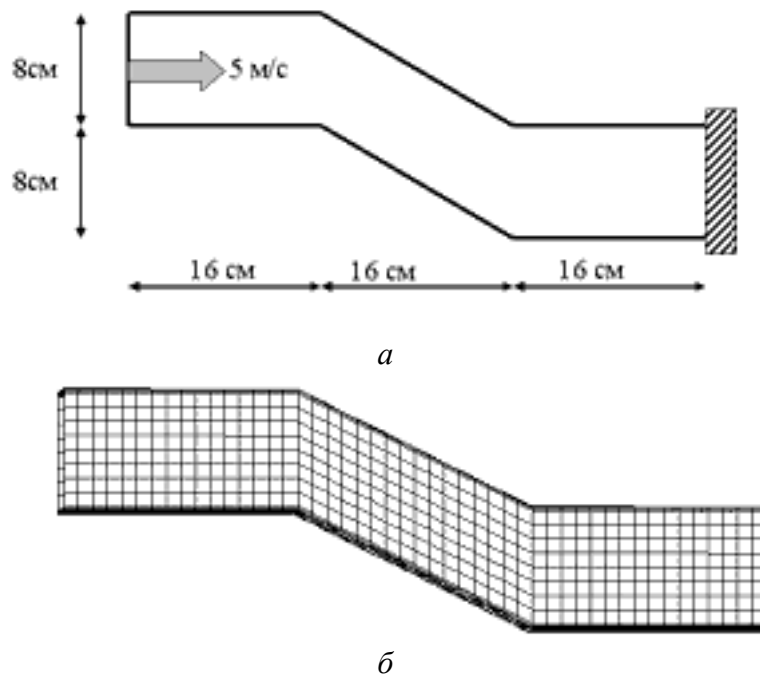


Рис. 5. Расчетная область (*a*) и конечно-элементная сетка (*б*) для задачи 2

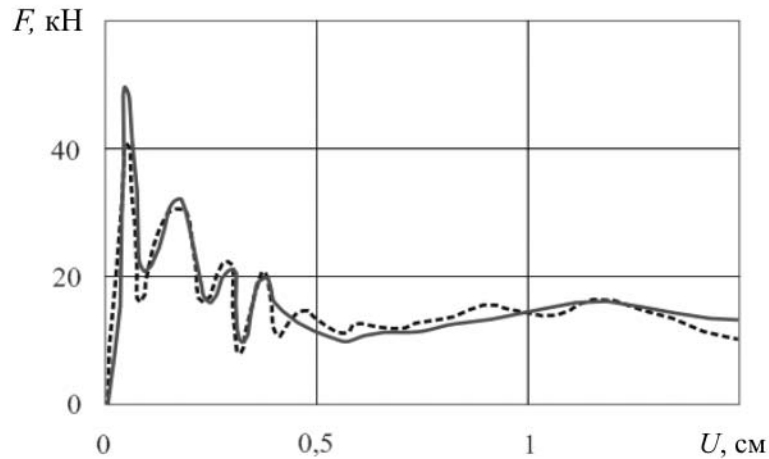


Рис. 6. Зависимость контактной силы от продольного смещения левого торца оболочки

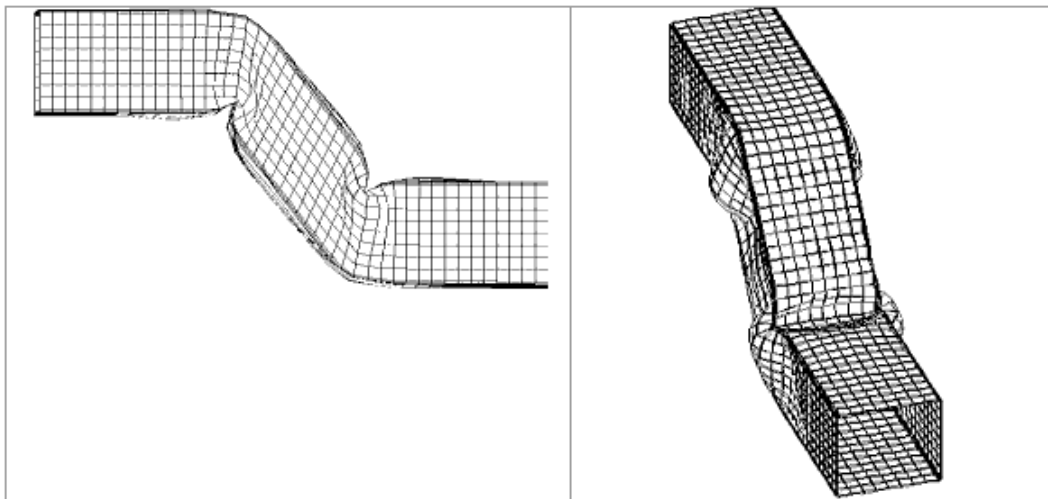


Рис. 7. Форма оболочки на момент времени 16 мс

Сплошной и пунктирной линиями на рисунке 6 отмечены результаты, полученные на основе оболочечного конечного элемента типа «С» и 4-узлового конечного элемента оболочки [18] соответственно. Расхождение этих графиков незначительно.

5. Заключение

Результаты верификационных расчетов подтвердили эффективность разработанных моментных конечных элементов, предназначенных для математического моделирования нестационарных задач динамического деформирования тонкостенных конструкций при больших формоизменениях в условиях сложного нагружения, характерного для упругопластического выпучивания оболочек.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-08-00560_a, 08-01-00500_a, 09-08-97034_p_Поволжье_a) и Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (грант НШ-3367.2008.8).

Литература

1. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 391 с.
2. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures. – New York: John Wiley & Sons, 2000. – 600 p.
3. Bathe K.-Y. Finite element procedures. – New Jersey: Upper Saddle River «Prentice Hall», 1996. – 1037p.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – V. 1. – 689 p.; V. 2. – 459 p.
5. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
6. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
7. Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1995. – № 2. – С. 20-26.
8. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
9. Flanagan D.P., Belytschko T. A Uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1981. – V. 17. – P. 679-706.
10. Уилкинс М., Френч С., Сорем М. Конечно-разностная схема для решения задач, зависящих от трех пространственных координат и времени // Численные методы в механике жидкостей. – М.: Мир, 1973. – С. 115-119.
11. Коробейников С.Н., Шутов А.В. Выбор отсчетной поверхности в уравнениях пластин и оболочек // Вычислительные технологии, 2003. – Т. 8, № 6. – С. 38-59.
12. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982. – 480 с.
13. Программный продукт «Пакет прикладных программ для решения трехмерных задач нестационарного деформирования конструкций, включающих массивные тела и оболочки, «Динамика-3» (ППП «Динамика 3») : Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.ME20.H00338 / 2000.
14. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Экспериментально-теоретическое исследование упругопластического выпучивания цилиндрических оболочек при осевом ударе // Прикладная механика, 1983. – Т. 19, № 6. – С. 63-69.
15. Абакумов А.И., Квасков Г.А., Новиков С.А., Сеницын В.А., Учаев А.А. Исследование упругопластического деформирования цилиндрических оболочек при осевом ударе // ПМТФ, 1988. – № 3. – С. 150-153.
16. Коробейников С.Н. Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения // Вычислительные технологии, 2001. – Т. 6, № 5. – С. 39-59.
17. Деменко П.В. Установка для динамических испытаний структурно-неоднородных материалов на основе разрезного стержня Гопкинсона диаметром 60 мм // Проблемы прочности и пластичности. – Н. Новгород, 2001. – Вып. 63. – С. 186-190.
18. Zeng Q., Combescure A. A new one-point quadrature, general non-linear quadrilateral shell element with physical stabilization // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1998. – N. 42. – P. 1307-1338.

Поступила в редакцию 23.11.09

Сведения об авторах

Артемова Анастасия Анатольевна, мнс, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского» (НИИ механики ННГУ), Россия, 603950, Н.Новгород, ГСП-1000, пр. Гагарина,23, корп.6; E-mail: aranan@mail.ru

Баженов Валентин Георгиевич, дфмн, проф., зав.лаб., НИИ механики ННГУ; E-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Кибец Александр Иванович, дфмн, гнс, НИИ механики ННГУ; E-mail: kibec@dk.mech.unn.ru

Лантев Павел Владимирович, кфмн, снс, НИИ механики ННГУ; E-mail: mechanik@bk.ru

Шошин Дмитрий Викторович, мнс, НИИ механики ННГУ; E-mail: Shoshin86@mail.ru