

УДК 539.3: 534.1

ОПТИМИЗАЦИЯ ОСТАТОЧНОГО ПРОГИБА КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ СТЕКЛУЮЩЕГОСЯ ПОЛИМЕРА ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ОХЛАЖДЕНИИ

О.Ю. Сметанников

Пермский государственный технический университет, Пермь, Россия

Решается задача минимизации остаточных перемещений в круглой пластинке из эпоксидной смолы ЭД-20 с помощью дополнительного силового воздействия. Для описания термомеханического поведения материала с релаксационным переходом используется разработанная ранее модель. При численном расчете применяется методика суперпозиции пошаговых решений задач термоупругости, реализованная в конечно-элементном пакете ANSYS. Показано, что введение дополнительного ограничения на регулируемую нагрузку позволяет существенно снизить ее уровень и повысить корректность задачи.

Ключевые слова: стеклование, численные методы, технологические напряжения, остаточные напряжения, метод конечных элементов, оптимизация

OPTIMIZATION OF THE RESIDUAL BENDING FLEXURE OF ROUND POLYMER PLATE WITH GLASS TRANSITION AT NON-UNIFORM COOLING

O.Yu. Smetannikov

Perm State Technical University, Perm, Russia

The problem of minimization of the residual displacements in the round epoxy resin ED-20 plate by additional force loading is solved. For the description of thermomechanical behaviour of a material with relaxation transition the model developed earlier is used. The technique of superposition of step-by-step thermoelasticity problems solving, realized in ANSYS program, is used at numerical calculations. It is shown, that additional restriction allows to lower considerably a level of operating loading and to increase reasonableness of a problem.

Ключевые слова: vitrification, numerical methods, technological stresses, residual stresses, finite element method, optimization

В статье развивается предложенная ранее методика оптимизации остаточных напряжений в изделиях из стеклующихся полимерных материалов [1]. Для описания термомеханического поведения среды используется модель упругого приближения, учитывающая эффект «замораживания» деформаций при охлаждении материала и плавность релаксационного перехода, завершенность которого описывается степенью стеклования N [1, 2]. В работе [1] для иллюстрации возможностей предложенного алгоритма минимизации остаточных напряжений решена одномерная модельная задача поиска оптимального кинематического воздействия для неравномерно охлаждаемого пакета стеклующихся стержней. Настоящая статья рассматривает двумерную осесимметричную постановку с силовым воздействием, при этом форма исследуемой конструкции и режим охлаждения близки к условиям натурального эксперимента, описанного в работе [3].

В эксперименте исследовались образцы, изготовленные по следующей технологии. Отвердитель триэтаноламинтитанат нагревался до 60°C , затем в течение 1 часа

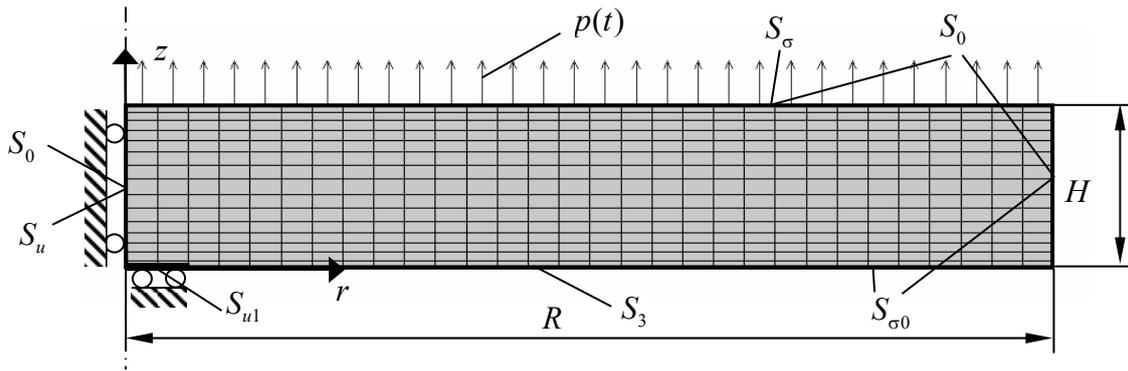


Рис. 1. Расчетная схема задачи

в условиях вакуума смешивался со смолой ЭД-20 в весовой пропорции 1:10. Полученный состав заливался в форму и выдерживался в вакуумном шкафу при комнатной температуре 3 часа, после чего отверждался при 100°C в течение 5–6 часов. Доотверждение производилось в процессе повторного нагрева до $160\text{--}170^{\circ}\text{C}$ и последующего охлаждения вместе с отключенным термощкафом в течение 4 часов. Из полученной таким образом цилиндрической заготовки вырезались пластины размерами $H = 6 \div 8$ мм, $D = 75$ мм, которые затем отжигались в печи при температуре 140°C для снятия остаточных напряжений.

Далее моделируется процесс неравномерного осесимметричного охлаждения в воде круглой пластинки из эпоксидной смолы ЭД-20 с размерами $R = 37,5$ мм, $H = 6,5$ мм (Рис. 1). В соответствии с программой эксперимента, описанного в [3], подготовленный образец нагревается до $150\text{--}170^{\circ}\text{C}$ (температура, превышающая условную температуру начала стеклования T_{g1} , при которой степень стеклования $N(T > T_{g1}) = 0$ [1]) и затем охлаждается путем погружения в воду нижней поверхности пластины. Результаты опыта [3] свидетельствуют, что как во время, так и по окончании охлаждения в конструкции возникают прогибы порядка 1 мм, обусловленные существенными градиентами температуры по толщине круглой пластинки.

Поставим задачу оптимизации остаточного деформированного состояния в следующей формулировке: с помощью переменного во времени силового воздействия равномерно распределенной поверхностной нагрузкой $p(t)$ требуется минимизировать отклонение от плоскостности $\tilde{u}_z(r) = u_z(r, H) - u_z(0, H)$ верхней поверхности образца (Рис. 1). При этом будем полагать, что взаимным влиянием дополнительного силового воздействия и температурного поля можно пренебречь (возникающие в конструкции температурные деформации пластины не изменяют значение приложенной нагрузки, а тепловыделение, обусловленное диссипацией энергии дополнительного силового воздействия, пренебрежимо мало).

Для описания термомеханического поведения материала образца воспользуемся предложенной ранее моделью упругого приближения вида [2]

$$\hat{\sigma}(t) = ({}^4\hat{C}_1 + {}^4\hat{C}_2 N(t)) \cdot \bar{\varepsilon}(t) - {}^4\hat{C}_2 \cdot \int_0^{N(t)} \bar{\varepsilon}(\tau) dN(\tau), \quad (1)$$

где ${}^4\hat{C}_2 = {}^4\hat{C}_g - {}^4\hat{C}_1$; ${}^4\hat{C}_g$, ${}^4\hat{C}_1$ — тензоры упругих констант материала в стеклообразном и высокоэластическом состояниях соответственно; $\bar{\varepsilon}(t) = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_T$; $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon}_T$ — тензоры

полных и температурных деформаций соответственно; $\varepsilon_{Tij} = \int_{T_0}^{T(t)} \alpha_{ij}(\tau) dT(\tau)$; $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$;

α — коэффициент температурного расширения; δ_{ij} — символ Кронекера; $\hat{\sigma}(t)$ — тензор напряжений; $T(t)$, T_0 — текущая и начальная температуры соответственно; t — время. Связь между степенью стеклования N и температурой T , можно описать, например, зависимостью [2]

$$N(T, \dot{T}) = \begin{cases} 1 - 0,5 \exp\left(\frac{T - T_g(\dot{T})}{\gamma}\right), & T < T_g, \\ 0,5 \exp\left(\frac{-(T - T_g(\dot{T}))}{\gamma}\right), & T \geq T_g, \end{cases} \quad (2)$$

где γ — параметр, определяющий ширину интервала стеклования; T_g — температура стеклования.

Для определения остаточного напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции с учетом сделанных допущений требуется последовательно решить две краевые задачи: задачу нестационарной теплопроводности и, на ее основе, задачу НДС.

Нестационарное температурное поле $T(\mathbf{x}, t)$ в области Ω определяется из решения задачи теплопроводности

$$\dot{T}(\mathbf{x}, t) = a^2 \Delta T(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t^*]; \quad (3)$$

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} (T(\mathbf{x}, t^*)) < T_{g2}; \quad (4)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0; \quad T(\mathbf{x}, t) = T_{fn}, \quad t > t^*; \quad (5)$$

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \text{grad}(T) = h(T(\mathbf{x}, t) - T_s(t)), \quad \mathbf{x} \in S_3; \quad (6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}(T) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0; \quad (7)$$

где T_{g2} — условная температура конца стеклования ($N(T > T_{g2}) = 1$).

В работе [1] показано, что для материалов, имеющих физические соотношения вида (1), в силу физической и геометрической линейности задачи расчета НДС, можно применить принцип суперпозиции отдельных решений «температурной» и «силовой» задач. Разобьем отрезок времени до момента окончательного охлаждения $[0, t^*]$ на N_t не обязательно равных частей. Под «силовой» понимается задача определения НДС на каждом шаге по времени:

$$\text{div } \delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (8)$$

$$\delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_k) = ((\nabla \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k))^T + \nabla \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k))/2; \quad (9)$$

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u \cup S_{ul}; \quad (10)$$

$$\delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \delta p(t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_\sigma; \quad \delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S_{\sigma 0}; \quad (11)$$

$$\delta \hat{\sigma}(t) = \left[{}^4\hat{C}_1 + {}^4\hat{C}_2 N(T(t_k)) \right] \cdot \delta \hat{\varepsilon}(t_k) \quad \delta \hat{\varepsilon}_T = \hat{0} \quad (12)$$

где $\delta p(t_k) = p(t_k) - p(t_{k-1})$ — приращение величины внешней распределенной нагрузки на k -ом шаге по времени; $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — вектор внешней нормали. Главным отличительным признаком данной постановки является учет внешнего силового воздействия при отсутствии температурных деформаций. Прямая буква «Т» в формуле (9) обозначает операцию транспонирования.

«Температурная» краевая задача также решается на каждом временном шаге и предполагает свободное (без регулирующей нагрузки $p(t)$) охлаждение конструкции:

$$\operatorname{div} \delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (13)$$

$$\delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_k) = ((\nabla \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k))^T + \nabla \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)) / 2; \quad (14)$$

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u \cup S_{u1}; \quad (15)$$

$$\delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t_k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma \cup S_{\sigma 0}; \quad (16)$$

$$\delta \hat{\sigma}(t_k) = ({}^4\hat{C}_1 + {}^4\hat{C}_2 N(t_k)) \cdot \delta \bar{\varepsilon}(t_k), \quad (17)$$

где $\delta \bar{\varepsilon} = \delta \hat{\varepsilon} - \delta \hat{\varepsilon}_T$; $\delta \hat{\varepsilon}_T(t_k) = \int_{T(t_{k-1})}^{T(t_k)} \alpha(T) \hat{E} dT$, \hat{E} — единичный тензор второго ранга.

Остаточные напряжения и перемещения в момент полного остывания t^* вычисляются в соответствии с [1] как суперпозиция «силового» и «температурного» решений:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^*) = \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t^*) + \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t^*), \quad (18)$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x}, t^*) = \hat{\sigma}^P(\mathbf{x}, t^*) + \hat{\sigma}^T(\mathbf{x}, t^*).$$

При этом, в силу линейности задачи, каждое из слагаемых в (18) может быть определено как сумма приращений перемещений и напряжений на каждом шаге по времени от соответствующих приращений температуры и давления

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t^*) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t_k), \quad \hat{\sigma}^P(\mathbf{x}, t^*) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \hat{\sigma}^P(\mathbf{x}, t_k); \quad (19)$$

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t^*) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t_k), \quad \hat{\sigma}^T(\mathbf{x}, t^*) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \hat{\sigma}^T(\mathbf{x}, t_k), \quad (20)$$

где $\delta \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t_k)$, $\delta \hat{\sigma}^P(\mathbf{x}, t_k)$ — решение «силового» задачи (8)–(12); $\delta \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t_k)$, $\delta \hat{\sigma}^T(\mathbf{x}, t_k)$ — решение «температурной» задачи (13)–(17).

С учетом сказанного задача безусловной оптимизации остаточных перемещений в системе, описываемой моделью (8)–(17) при наличии управляющего воздействия $p(t)$ формулируется в виде:

$$\Phi(p(t)) = \int_{S_c} [F(\mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t^*) + \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t^*))]^2 dS \rightarrow \min, \quad (21)$$

где S_c — поверхность, на которой контролируется плоскостность образца; $F(\mathbf{u})$ — некоторая скалярная функция вектора перемещений. В соответствии с условием задачи для контроля плоскостности образца после охлаждения выбрана осевая компонента вектора перемещений:

$$F(\mathbf{u}) = u_z(r, H).$$

Для конечно-элементной реализации поставленной краевой задачи используется программный комплекс ANSYS. В качестве базового выбран элемент PLANE42 с опцией осевой симметрии. Конечно-элементная сетка представлена на рисунке 1. Термомеханические свойства материала взяты из работы [5]. Теплофизические свойства в соответствии с [6] имеют следующие значения: $\lambda = 0,19$ Вт/(м К), $c = 1000$ Дж/(кг К), $\rho = 1200$ кг/м³.

Пространственная дискретизация в конечно-элементных расчетах сводит задачу (21) к решению системы линейных алгебраических уравнений вида $[C_p]\{P\} = \{D_p\}$ относительно вектора управляющей нагрузки P , которая имеет размерность, равную числу шагов по времени N_t . Матрица $[C_p]$, как показал анализ, является плохо обусловленной, что характерно для обратных задач [7], к которым относится рассматриваемая задача. По мере увеличения числа шагов по времени растет и число обусловленности матрицы и может достигать величины, приводящей к существенной потере точности и пилообразному виду решения. При этом даже для $N_t < 50$, когда влияние некорректности задачи еще не столь ощутимо и остаточные перемещения удается снизить в 100 и более раз, получаемый в процессе решения уровень регулирующей нагрузки может оказаться на порядки превышающим технологически допустимый.

С целью снижения порядка разрешающей системы уравнений искомым закон распределения регулирующей нагрузки во времени далее представим в виде полинома степени N_a . При условии, что в начальный момент времени ($t = 0$), а также в конце охлаждения ($t = t^*$) нагрузка отсутствует, выражение для $p(t)$ приобретает вид

$$p(\bar{t}) = (\bar{t} - 1) \sum_{i=1}^{N_a} a_i \bar{t}^i, \quad (22)$$

где $\bar{t} = t/t^*$ — приведенное время, $\bar{t} \in [0, 1]$. Тем самым задача минимизации целевой функции $\Phi(p(t))$ (21) относительно $p(t)$ сводится к процедуре безусловной оптимизации относительно неизвестных коэффициентов a_i . После внесения первого множителя под знак суммы выражение (22) принимает форму:

$$p(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{N_a} a_i (\bar{t}^{i+1} - \bar{t}^i). \quad (23)$$

Учитывая (19) и (23), получим выражение для остаточных перемещений, являющееся решением «силовой» задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, 1) &= \sum_{k=1}^{N_t} \delta \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, \bar{t}_k) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \bar{\mathbf{u}}^P(\mathbf{x}, \bar{t}_k) \Delta p_k = \\ &= \sum_{k=1}^{N_t} \delta \bar{\mathbf{u}}^P(\mathbf{x}, \bar{t}_k) \sum_{i=1}^{N_a} a_i (\bar{t}_k^{i+1} - \bar{t}_{k-1}^{i+1} - \bar{t}_k^i + \bar{t}_{k-1}^i) = \sum_{k=1}^{N_t} \delta \bar{\mathbf{u}}^P(\mathbf{x}, \bar{t}_k) \sum_{i=1}^{N_a} a_i \Delta t_{ik}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\delta \bar{\mathbf{u}}^P(\mathbf{x}, \bar{t}_k)$ — решение «силовой» задачи (8)–(12) при единичном приращении внешней нагрузки $\Delta p_k = 1$, $\Delta t_{ik} = (\bar{t}_k^{i+1} - \bar{t}_{k-1}^{i+1} - \bar{t}_k^i + \bar{t}_{k-1}^i)$. Тогда задача оптимизации (21) преобразуется к следующей дискретной форме:

$$\Phi(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{N_u} \left[\sum_{k=1}^{N_t} \bar{u}_{jk} \sum_{i=1}^{N_a} a_i \Delta t_{ik} + u_j^T \right]^2 \rightarrow \min, \quad (25)$$

где $\bar{u}_j^k = \delta \bar{u}_z^P(\mathbf{x}_j, \bar{t}_k) - \delta \bar{u}_z^P(\mathbf{x}_0, \bar{t}_k)$; \mathbf{x}_j — радиус-вектор j -го узла на верхней поверхности образца (поверхности контроля плоскостности); $\mathbf{x}_0 = \{0, H\}$; $u_j^T = u_z^T(\mathbf{x}_j, 1) - u_z^T(\mathbf{x}_0, 1)$. После дифференцирования по неизвестным коэффициентам полинома получим систему линейных уравнений относительно коэффициентов a_i :

$$[C]\{A\} = \{D\},$$

где

$$c_{li} = \sum_{j=1}^{N_u} \left[\sum_{k=1}^{N_t} \bar{u}_{jk} \Delta t_{lk} \right] \left[\sum_{k=1}^{N_t} \bar{u}_{jk} \Delta t_{ik} \right]; \quad d_l = - \sum_{j=1}^{N_u} u_j^T \left[\sum_{k=1}^{N_t} \bar{u}_{jk} \Delta t_{lk} \right] \quad (l, i = \overline{1, N_a}). \quad (26)$$

Исследование свойств матрицы $[C]$ показало, что число обусловленности $\mu = \|C\| \|C^{-1}\|$ в норме $\|C\| = \max_{1 \leq j \leq N_a} \sum_{i=1}^{N_a} |c_{ij}|$ для значений N_a от 4 до 10 равно $10^{18} - 10^{30}$, что примерно на 10–15 порядков меньше, чем у матрицы $[C_p]$ в задаче (21) (в зависимости от значения N_t). Но задача по-прежнему остается некорректной. Результаты решения согласно постановке (25) для $N_a = 6$ приведены на рисунках 2, а и 4, а. Из рисунка 2, а видно, что оптимальная нагрузка, необходимая для поддержания остаточных перемещений на минимальном уровне, в этом случае превышает 400 ГПа, а осевые перемещения на внешнем радиусе пластины составляют 600 мм, (Рис. 3, а). Полученные значения обоих параметров находятся на неприемлемом с точки зрения практической реализации уровне. В то же время остаточные перемещения (Рис. 4, а) близки к нулю, то есть поставленная цель достигнута, однако способы ее достижения не реализуемы.

Для улучшения решения используем регуляризирующий алгоритм [7]. Введем в целевую функцию (25) дополнительный сглаживающий оператор и учтем запись регулирующей функции в виде (23):

$$\Phi(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{N_u} \left[\sum_{k=1}^{N_t} \bar{u}_{jk} \sum_{i=1}^{N_a} a_i \Delta t_{ik} + u_j^T \right]^2 + K \int_0^1 (\bar{t})^\beta \sum_{i=1}^{N_a} a_i (\bar{t}^{i+1} - \bar{t}^i) d\bar{t} \rightarrow \min. \quad (27)$$

Назначение дополнительного слагаемого — включение в процесс минимизации интегрального по времени уровня управляющей нагрузки, что приводит в конечном итоге к сглаживанию решения. Роль параметра регуляризации [7] в данном случае выполняет коэффициент K . При формировании второго слагаемого в выражении (27) учитывается, что для деформирования пластинки на завершающей стадии охлаждения, когда основная часть материала перешла в стеклообразное состояние, требуются более значительные усилия, нежели на начальном этапе процесса. Большой вклад управляющей нагрузки в конце охлаждения реализуется с помощью множителя $(\bar{t})^\beta$ (см. второе слагаемое в (27)). Коэффициенты K и β подбираются в зависимости от условий задачи.

С учетом дополнительного ограничения получим результирующую систему уравнений:

$$[G]\{A\} = \{D\}, \quad (28)$$

где $[G] = [C] + K[C1]$; $c1_{ij} = \frac{1}{l+i+2\beta+1} - \frac{2}{l+i+2\beta+2} + \frac{1}{l+i+2\beta+3}$; компоненты матрицы $[C]$ и вектора $\{D\}$ вычисляются по формулам (26).

Для уменьшения зависимости диапазона варьирования коэффициента K от степени аппроксимирующего полинома N_a представим этот коэффициент в виде произведения $K = K_1 K_2$, где коэффициент K_2 определяется из условия соразмерности элементов матриц $[C]$ и $[C1]$, входящих в уравнение (28):

$$K_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} \left| \frac{c_{ij}}{c1_{ij}} \right|}{(N_a)^2}.$$

Сведение задачи оптимизации к виду (28) позволяет снизить число обусловленности на 8–10 порядков в зависимости от степени аппроксимирующего $p(t)$ полинома. Таким образом, для получения приемлемого с точки зрения уровня остаточных деформаций и уровня регулирующей нагрузки решения в окончательном варианте задачи оптимизации (28) необходимо осуществлять дополнительную процедуру подбора теперь уже параметров β и K_1 .

Исходя из того, что наибольшие вертикальные перемещения, возникающие при оптимальном внешнем силовом воздействии $\bar{p}(t)$, на всем временном интервале охлаждения не должны превышать соответствующих величин при свободном остывании образца, запишем следующее ограничение:

$$\max_{t \in [0, t^*]} |u_z^P(t, \bar{p}(t), R, H)| \leq \max_{t \in [0, t^*]} |u_z^T(t, R, H)|. \quad (29)$$

Далее для каждого значения N_a методом простого перебора находим величины β и K_1 , удовлетворяющие данному условию.

Задача оптимизации решена для следующих значений порядка полинома, аппроксимирующего функцию силового воздействия $\bar{p}(t)$: $N_a + 1 = 5; 7; 9$. Результаты приведены в таблице и на рисунках 2–4.

Таблица. Параметры задачи оптимизации

Параметр	Порядок полинома $N_a + 1$					
	Задача без регуляризации (25)			Задача с регуляризацией (27)		
	5	7	9	5	7	9
β	0	0	0	3	3	3
K_1	0	0	0	0,01	0,10	0,10
$\ \Delta u\ _{\max}$	2,79	1,84	0,742	8,29	7,01	6,38
$\ \Delta u\ _L$	3,77	1,27	0,792	7,56	7,46	6,65

Параметры $\|\Delta u\|_{\max}$ и $\|\Delta u\|_L$ характеризуют относительный уровень остаточных перемещений при оптимальном режиме нагружения в равномерной и лагранжевой нормах соответственно:

$$\|\Delta u\|_{\max} = \frac{100\%}{N_u} \left\{ \sum_{j=1}^{N_u} (u_{zj}^P(t^*) + u_{zj}^T(t^*))^2 / \sum_{j=1}^{N_u} (u_{zj}^T(t^*))^2 \right\}^{0,5};$$

$$\|\Delta u\|_L = \max_{j=1, N_u} |u_{zj}^P(t^*) + u_{zj}^T(t^*)| / \max_{j=1, N_u} |u_{zj}^T(t^*)| \cdot 100\%.$$

В первых трех колонках таблицы представлены результаты решения задачи без регуляризации (25). Уровень остаточных перемещений снижается более чем в 100 раз при $N_a = 8$ по сравнению с уровнем, полученным без оптимизации. Из анализа результатов решения (27) (последние три колонки таблицы) видно, что существенного уменьшения остаточного отклонения от плоскостности удается добиться уже при достаточно низких степенях аппроксимирующей нагрузки полинома. В частности, при $N_a = 4$ максимальное и среднее отклонения снижаются более чем в 10 раз. Последующий рост N_a до 8, как видно из таблицы, уменьшает уровень остаточных перемещений еще примерно на 20%. Невозможность дальнейшего снижения остаточных прогибов объясняется наличием ограничения на величину управляющей нагрузки (27), вклад которого в целевую функцию регулируется параметром K_1 . При этом, как показано в таблице, требование удовлетворения критерию (29) приводит к росту K_1 в 10 раз для N_a , равных 6 и 8. Увеличение степени полинома улучшает результаты, что косвенно свидетельствует о сходимости решения

Вид оптимальной управляющей нагрузки для задачи (27) при различных значениях N_a показан на рисунке 2, б–г. На всех графиках наблюдается отрицательный экстремум в момент времени $t \approx 10$ с. Его наличие, с точки зрения механики, объясняется необходимостью компенсации начального температурного прогиба образца при охлаждении нижних слоев материала (см. участок 0–10 с на кривых 2 рисунка 3, б–г). На данном промежутке времени регулирующая нагрузка действует практически синхронно прогибу, но в противоположном ему направлении (отрицательный знак p соответствует отрицательному давлению на поверхность S_σ , (Рис. 1)). Наибольшее положительное давление, как видно из рисунка 2, б–г, реализуется на временном интервале 100–150 с, когда значительная часть материала пластины еще находится в высокоэластическом

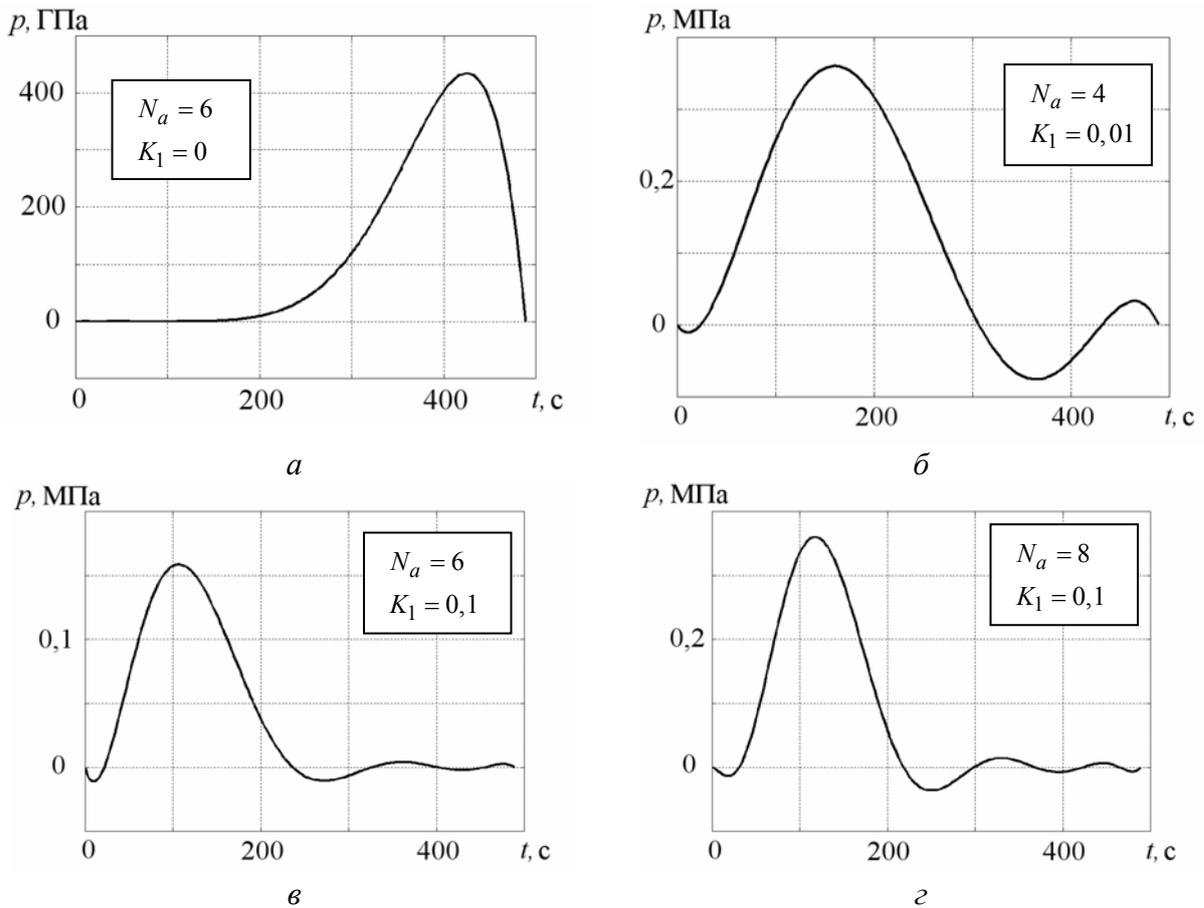


Рис. 2. Зависимость оптимальной управляющей нагрузки от времени

состоянии, но изгибная жесткость существенно больше, чем на начальной стадии охлаждения. Отсюда следует рост уровня давления, компенсирующего стремление свободной от нагрузки пластины прогнуться в обратном направлении при $t = 100 - 500$ с. (кривые 2 на рисунке 3, б-г).

Графики перемещений под нагрузкой без учета температурных деформаций $u_z^P(t)$ (кривые 1, Рис. 3, б-г) показывают сходимость решения к устойчивой форме с двумя доминирующими экстремумами — максимумом при $t \approx 10$ с и следующим за ним минимумом при $t \approx 100$ с. В результате на суммарном графике перемещений охлаждаемого образца, подверженного оптимальному силовому воздействию (кривые 3, Рис. 3, б-г), существенно снижен начальный пик перемещений $u_z^T(t)$, наблюдаемый при свободном охлаждении (кривая 1, Рис. 3, б-г). В интервале до $t \approx 70$ с отрицательный прогиб образца растет до максимума порядка 1 мм с последующим уменьшением практически до нуля в течение ~ 200 с.

На рисунке 4, б-г представлены профили остаточного прогиба верхней поверхности образца после свободного охлаждения (кривые 1) и охлаждения с регулирующим силовым воздействием $p(t)$ (кривые 2). Сравнение кривых показывает, что, начиная с $N_a = 4$, форма остаточного прогиба не изменяется и максимальные остаточные перемещения при этом уменьшаются, но незначительно (в 1,13 раз).

Введение регуляризующего слагаемого в целевую функцию требует анализа влияния параметра регуляризации на качество решения для обоснования выбора значения коэффициента K_1 . На рисунке 5 приведены графики зависимости от этого

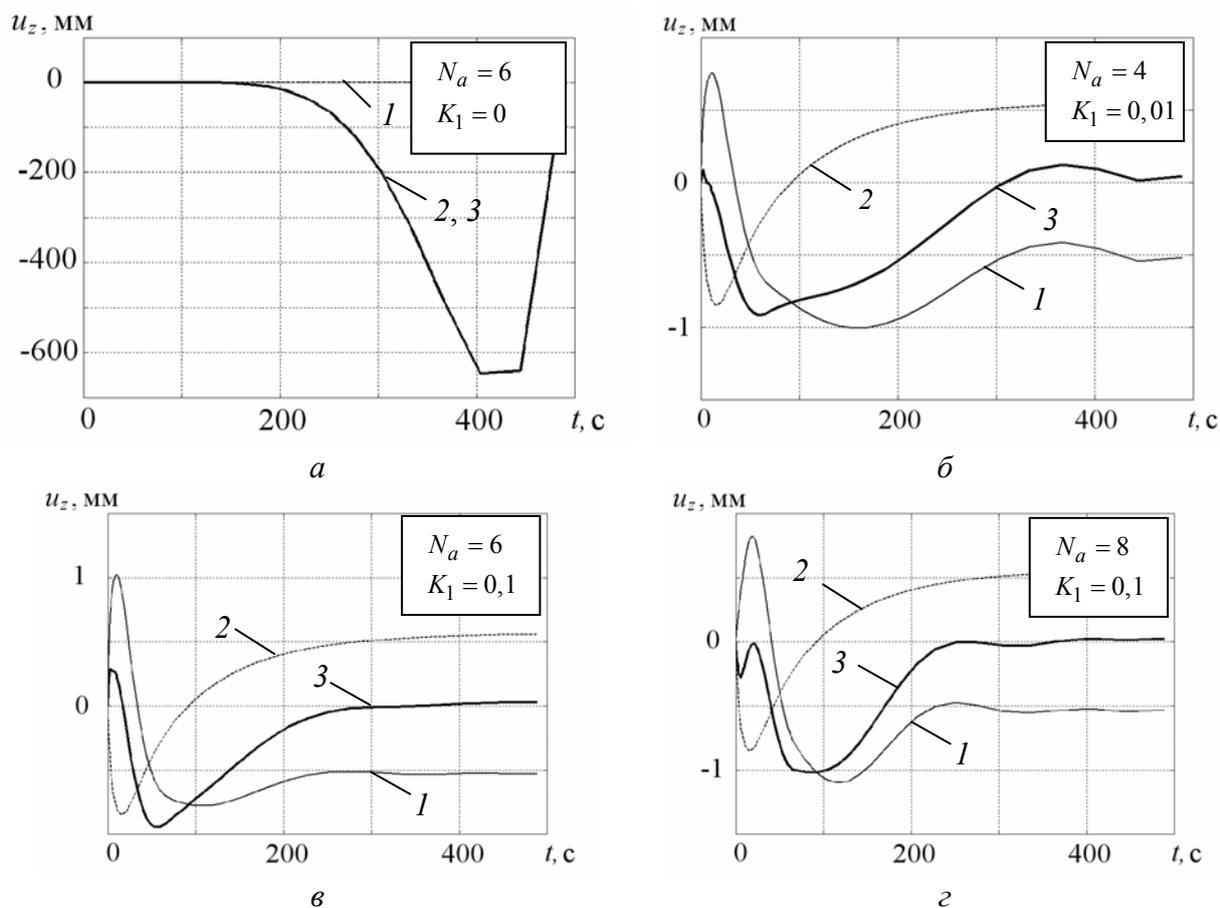


Рис. 3. Зависимость от времени перемещений u_z в точке $r = R$, $z = H$:
 кривые 1 – $u_z^p(t)$; 2 – $u_z^T(t)$; 3 – $u_z^T(t) + u_z^p(t)$

параметра двух основных характеристик оптимизации — максимального значения управляющей нагрузки и наибольшего удельного остаточного отклонения от плоскостности. Из рисунка видно, что увеличение вклада сглаживающего слагаемого в (27) приводит к снижению p_{\max} с одновременным повышением уровня остаточных перемещений. Кроме того, влияние K_1 зависит от степени аппроксимирующего полинома (с ростом N_a графики смещаются вправо). Приведенными диаграммами можно пользоваться для поиска приемлемого решения. Например, при предельно допустимом значении управляющего давления $[p_{\max}] = 1 \text{ МПа}$ для $N_a = 8$ (кривая 3, Рис. 5, а) определяется $\lg K_1 = -1,8$. По графику рисунка 5, б данному значению коэффициента отвечает $\|\Delta u\|_{\max} = 5\%$, что соответствует снижению остаточных перемещений примерно в 20 раз по сравнению с перемещениями, полученными без внешнего силового воздействия. Уменьшение уровня допустимых усилий в 10 раз при прочих равных условиях вызывает рост остаточных перемещений ($\|\Delta u\|_{\max} = 7,5\%$).

Следует также отметить наличие участков «стабильности» уровня остаточных перемещений. Например, в интервале $\lg K_1 \in [-3, 0]$ значение $\|\Delta u\|_{\max}$ практически постоянно для $N_a = 6$ (кривая 2, Рис. 5, а), в то время как величина P_{\max} в данном диапазоне меняется почти на порядок. Рост степени полинома при прочих равных условиях снижает уровень остаточных деформаций. В частности, при

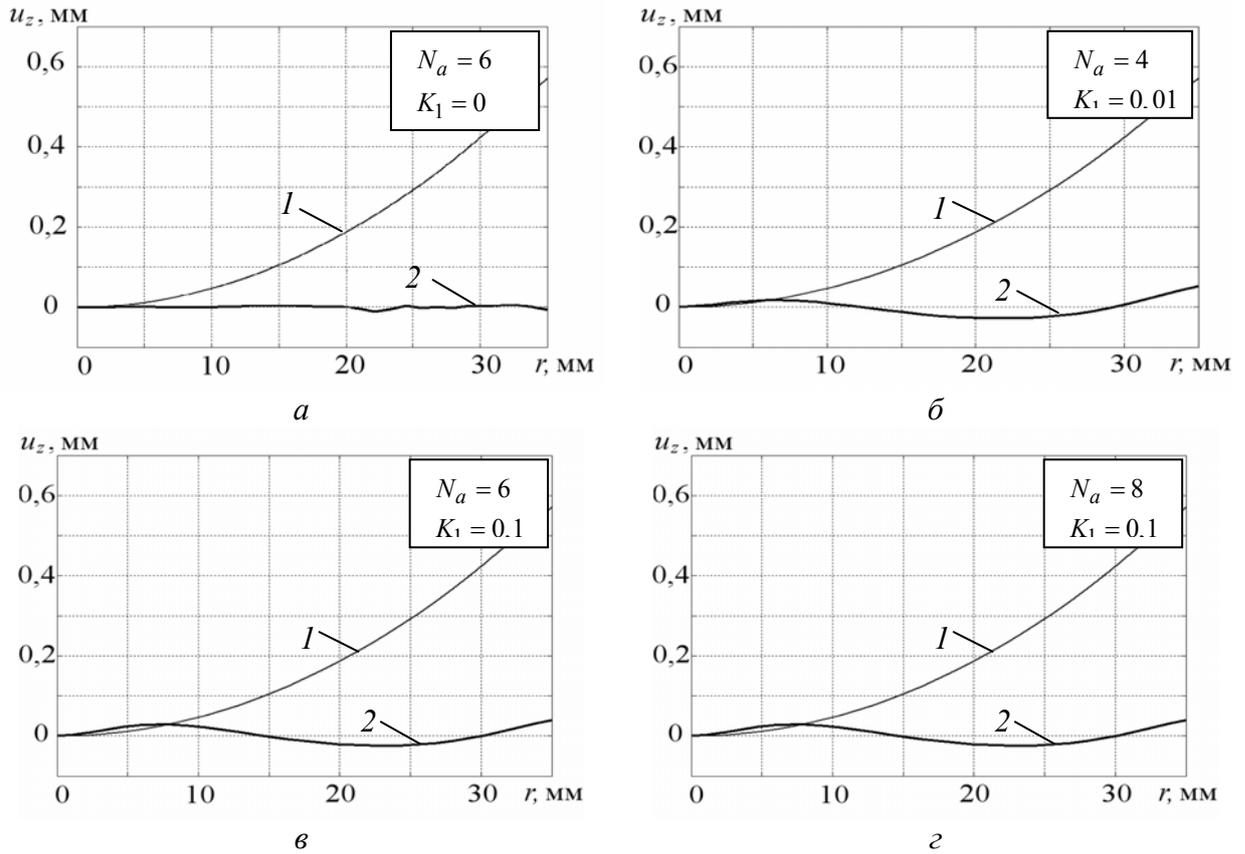


Рис. 4. Распределение остаточных перемещений u_z по радиусу ($z = H$):
 кривые 1 — $u_z^T(t^*)$; 2 — оптимальное распределение $u_z^T(t^*) + u_z^p(t^*)$

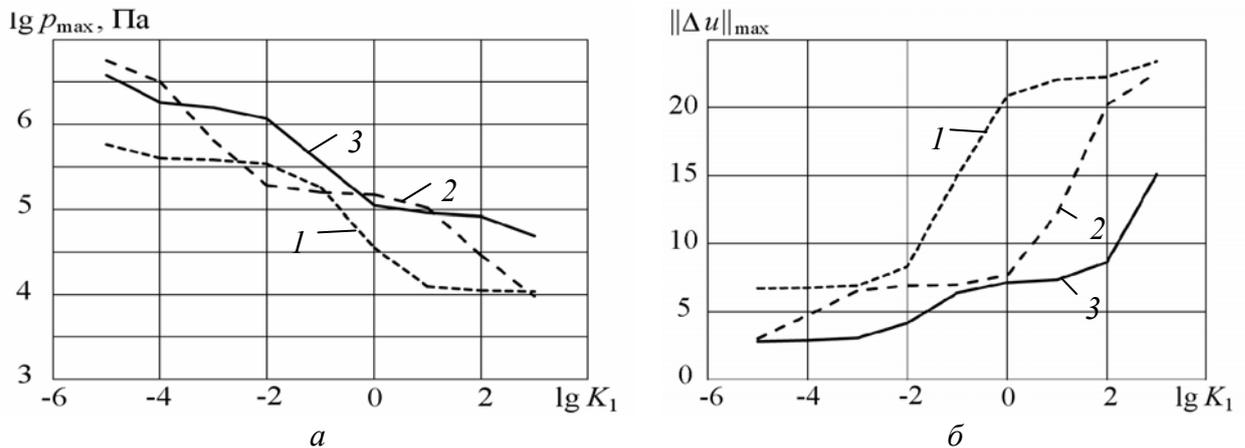


Рис. 5. Максимальное управляющее давление (а) и остаточное отклонение от плоскости (б) в зависимости от параметра регуляризации при различных значениях порядка полинома N_a :
 4 (кривые 1); 6 (2); 8 (3)

ограничении $[p_{\max}] = 0,1$ МПа можно достичь снижения $\|\Delta u\|_{\max}$ до 17,5%, 12,5%, 7,5% от первоначального уровня при значениях N_a , соответственно равных 4, 6 и 8.

Таким образом, поставлена и решена задача минимизации остаточных перемещений в круглой пластинке из материала с термомеханическими свойствами, описываемыми моделью (1). Показано, что в рамках принятых ограничений,

упрощающих вид управляющего воздействия, а также учитывающих линейность физических соотношений, можно существенно уменьшить объем расчетов, сводя задачу безусловной оптимизации к решению системы линейных уравнений, коэффициенты которой вычисляются однократным решением двух прямых задач. Для численной реализации прямой краевой задачи термомеханики применен метод суперпозиции пошаговых решений задач термоупругости, выполняемых в конечно-элементном пакете ANSYS. Предложенная методика сглаживания функции управляющей нагрузки позволяет получить ощутимое снижение уровня остаточных перемещений пластинки с учетом ограничения по величине управляющего воздействия путем варьирования параметра регуляризации, оставаясь в рамках линейной задачи.

Предметом дальнейших исследований должно стать строгое доказательство существования и единственности оптимального решения, анализ возможности и целесообразности применения предложенной методики к различным видам конструкций, а также включение в постановку задачи классических ограничений в виде неравенств.

Литература

1. *Сметанников О.Ю.* Об одной модели регулирования остаточных напряжений в изделиях из стеклюющихся полимеров // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 6 (65). – С. 309-321.
2. *Сметанников О.Ю.* Об одной модели термомеханического поведения полимерных материалов с релаксационным переходом // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 9/1 (59). – С. 216-231.
3. *Сметанников О.Ю.* Экспериментально-расчетное исследование поведения круглой пластины из ЭДТ-10 при неравномерном охлаждении // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 3. – С. 96-105.
4. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник / Под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 832с.
5. *Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А.* Экспериментальная идентификация модели термомеханического поведения стеклюющихся полимеров // Вестник Удмуртского университета. Механика. – 2009. – Вып. 4. – С. 133-145.
6. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592с.
7. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М: Наука, 1990. – 232с.

Поступила в редакцию 22.06.09.

Сведения об авторе:

Сметанников Олег Юрьевич, кфмн, доц., Пермский государственный технический университет, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29; E-mail: sou@cpl.pstu.ac.ru