

УДК 539.3: 534.1

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВРАЩАЮЩИХСЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Н.А. Шевелев, И.В. Домбровский

*Пермский государственный технический университет, Пермь, Россия*

Предлагаются алгоритмы численного решения задач о свободном и вынужденном движении вращающихся осесимметричных упругих и упруговязких тел, использующие метод конечных элементов и разложение по собственным формам колебаний соответствующей консервативной задачи. Кроме задачи о собственных частотах и формах колебаний вращающихся упругих тел для получения полной информации о «динамическом паспорте системы» рассмотрена задача неконсервативной упругой устойчивости. В зависимости от характера найденных собственных значений сделано заключение об устойчивости системы в рамках теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Собственные формы неконсервативной задачи представлены в виде разложения по собственным формам консервативной задачи, что снижает размерность матриц и позволяет решать комплексную проблему собственных значений с использованием уже разработанных и апробированных схем. Для случая гармонического внешнего возбуждения построены амплитудно-частотные характеристики неконсервативной системы при различных значениях угловой скорости, соответствующих устойчивому и неустойчивому режимам. Диссипативные эффекты в случае вынужденного движения моделируются линейными наследственными соотношениями.

*Ключевые слова:* численный анализ, свободные и вынужденные колебания, устойчивость

## NUMERICAL ANALYSIS OF THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF ROTATING DEFORMED STRUCTURES

N.A. Shevelev and I.V. Dombrovskiy

*Perm State Technical University, Perm, Russia*

This study presents an algorithm based on the finite element method for the numerical solution of the problem on free and forced vibrations of rotating dynamically symmetric bodies. To obtain all the information on «the dynamic passport of a system», in addition to the problem on free and forced vibrations of rotating elastic bodies it is necessary to consider the non-conservative elastic stability problem. Judging from the character of the found eigen values, the conclusion can be drawn regarding the stability of the system, for instance in the framework of Lyapunov's theorems on stability in a first approximation/ It is proposed to seek the eigen modes of the non-conservative problem in the form of an expansion in eigen modes of the conservative problem, which reduces the dimensionality of matrices and allows us to solve the complex eigen value problem using the developed and verified schemes. The amplitude-frequency characteristics of the non-conservative system are constructed for different values of the angular velocity parameter referred to stable and unstable modes.

*Ключевые слова:* numerical analysis, free and compelled fluctuations, stability

Современные направления развития машиностроительной отрасли неразрывно связаны с повышением надежности и долговечности машин, снижением материалоемкости, уменьшением вибраций в элементах конструкций, что приводит к необходимости рассматривать работу ответственных узлов машин и агрегатов вблизи пределов прочности и устойчивости. Последнее обстоятельство накладывает особые требования на используемые в расчетах математические модели и точность получаемых

результатов. Если говорить более конкретно, то математическая модель должна в полной мере учитывать специфику условий нагружения и эксплуатации конструкций.

В настоящей работе рассматриваются модели, описывающие поведение и учитывающие вращение неконсервативных систем, например, таких как элементы авиационных двигателей, роторы электрических машин большой мощности, накопители энергии, то есть модели, в которых учитываются дополнительные силы инерции. С точки зрения задачи на собственные значения в этом случае приходится иметь дело с комплексной спектральной проблемой [1], [2]. Качественное описание поведения некоторых неконсервативных систем с учетом вращения можно найти в [2]. Но, вследствие того, что конечно-элементная реализация практической задачи приводит к несимметричным матрицам высокой размерности, известные методы решения спектральных задач в нашем случае становятся малоэффективными.

Далее предлагаются постановка задачи устойчивости и процедуры изменения известных методов решения спектральных задач для случая неконсервативной системы, а так же приводится один из вариантов исследования вынужденного движения системы под действием гармонической нагрузки. При этом диссипативные характеристики системы учитываются с помощью линейных наследственных соотношений [6].

## 1. Постановка задачи о свободном движении

В трехмерном евклидовом пространстве упругое тело, имеющее ось симметрии, занимает объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $\Sigma$ . На части поверхности  $\Sigma_u$  заданы граничные условия в перемещениях, на остальной части  $\Sigma_\sigma$  — граничные условия в напряжениях, при этом  $\Sigma = \Sigma_u + \Sigma_\sigma$ . Тело вращается с постоянной по величине угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, совпадающей с его осью симметрии. Учитываются относительные, кориолисовы и центробежные ускорения, вызываемые упругими деформациями тела. Влияние стационарных внутренних усилий — результата действия центробежных сил, не рассматривается. Подлежат определению динамические характеристики системы, собственные значения и собственные формы движения, возникающие около стационарного положения. Другими словами, необходимо определить функциональную зависимость возмущений от времени.

Математическая постановка задачи включает:

— уравнения движения [1], [5]:

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho [\ddot{\mathbf{u}} + 2\omega \times \dot{\mathbf{u}} + \omega \times (\omega \times \mathbf{u})], \quad r, z, \varphi \in V, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений во вращающейся цилиндрической системе координат  $r, z, \varphi$ , ось  $z$  которой совпадает с осью вращения тела и направлена в ту же сторону, что и вектор  $\omega$ ;  $\rho$  — плотность материала тела,  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ламе; точка обозначает дифференцирование по времени  $t$ ;

— физические соотношения для случая изотропного линейного материала

$$\hat{\sigma} = \lambda \Theta \hat{E} + 2\mu \hat{\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\varepsilon}$  — тензоры напряжений и деформаций;  $\Theta$  — первый инвариант тензора деформаций,  $\hat{E}$  — единичный тензор второго ранга;

— геометрические соотношения (для компонент тензора деформаций и вектора перемещений имеют место соотношения Коши)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}] \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}]; \quad (3)$$

— граничные условия в перемещениях и напряжениях

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, z, \varphi, t) &= 0, & r, z, \varphi \in \Sigma_u, \\ \mathbf{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) &= 0, & r, z, \varphi \in \Sigma_\sigma, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ .

Искомый вектор перемещений представляется в виде [2]:

$$\mathbf{u}(r, z, \varphi, t) = \mathbf{U}(r, z, \varphi) e^{pt}, \quad (5)$$

где  $p$  — комплексное собственное значение, имеющее смысл собственной частоты колебаний или параметра устойчивости.

После подстановки выражения (5) в уравнение (1) и граничные условия (4) для отыскания вектора  $\mathbf{U}$  получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} &= \rho [p^2 \mathbf{U} + 2p \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U})], & r, z, \varphi \in V; \\ \mathbf{U}(r, z, \varphi) &= 0, & r, z, \varphi \in \Sigma_u; \\ \mathbf{v} \cdot \left\{ \lambda \Theta \hat{E} + \mu [(\nabla \mathbf{U})^T + (\nabla \mathbf{U})] \right\} &= 0, & r, z, \varphi \in \Sigma_\sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Вектор  $\mathbf{U}$  представляет собой: форму колебаний, если  $p$  — мнимое число; форму потери устойчивости, если действительная часть комплексного  $p$  или действительное  $p$  — положительные числа.

При численной реализации поставленной задачи используем вариационную формулировку [4]:

$$\delta A_\sigma + \delta A_i + \delta A_c + \delta A_k = 0. \quad (7)$$

Здесь приняты обозначения:  $\delta A_\sigma = -\int \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dV$ , — работа внутренних напряжений, определяемая возможными перемещениями;  $\delta A_i = -\rho p^2 \int \mathbf{U} \cdot \delta \mathbf{U} dV$  — работа сил инерции;  $\delta A_c = -\int \rho [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U})] \cdot \delta \mathbf{U} dV$  — работа центробежных сил, связанных с полем перемещений  $\mathbf{U}$ ;  $\delta A_k = -2\rho p \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}) \cdot \delta \mathbf{U} dV$  — слагаемое, определяемое силами Кориолиса; интегрирование ведется по объему  $V$ .

Искомый вектор перемещений  $\mathbf{U}$  и его вариация  $\delta \mathbf{U}$  должны удовлетворять граничным условиям в перемещениях, а условия в напряжениях являются естественными.

## 2. Численная реализация

Геометрическая симметрия рассматриваемых тел относительно оси вращения позволяет записать искомый вектор  $\mathbf{U}(r, z, \varphi)$  в виде разложения по окружной координате  $\varphi$ :

$$\{\mathbf{U}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=1}^N [u_l^s(r, z) \cos(l\varphi) + u_l^a(r, z) \sin(l\varphi)] \\ \sum_{l=1}^N [v_l^s(r, z) \cos(l\varphi) + v_l^a(r, z) \sin(l\varphi)] \\ \sum_{l=1}^N [w_l^s(r, z) \sin(l\varphi) + w_l^a(r, z) \cos(l\varphi)] \end{array} \right\}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , — компоненты вектора  $\mathbf{U}$  в направлении осей  $r, z, \varphi$  соответственно; индексы  $s$  и  $a$  указывают на его симметричные и антисимметричные составляющие относительно оси ( $\varphi = 0$ );  $l$  — номер отдельной гармоники.

Вектор перемещений можно записать в символической форме:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_a. \quad (9)$$

Если в вариационном уравнении не учитываются слагаемые  $\delta A_c$  и  $\delta A_k$ , связанные с вращением ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ), то задача определения  $\mathbf{U}$  распадается на две самостоятельные — вычисления  $\mathbf{U}_s$  и  $\mathbf{U}_a$ , а соответствующие собственным векторам собственные значения  $p_s$  и  $p_a$  при этом совпадают. В случае неконсервативной системы формы  $\mathbf{U}_s$  и  $\mathbf{U}_a$  связаны и определяются из общего уравнения (7), а вектор  $\mathbf{U}$  находится как их суперпозиция.

Для вариации  $\delta \mathbf{U}$  примем разложение, аналогичное (8). Вычисление интегралов, входящих в (7), при учете представления  $\mathbf{U}$  и  $\delta \mathbf{U}$  в виде (8) и свойства ортогональности тригонометрических функций приводит к вариационной задаче для отдельной гармоники  $l$ .

На этапе численного построения векторов  $\mathbf{U}_s$  и  $\mathbf{U}_a$  применим процедуру метода конечных элементов [7]. Конечно-элементный аналог вариационного уравнения (7) запишем в виде:

$$(\mathbf{K} + \rho p^2 \mathbf{M} + \rho w^2 \mathbf{F}_c + 2\boldsymbol{\omega} \rho p \mathbf{F}_k) \delta = 0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{K} = \int \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{V} dv$ ,  $\mathbf{M} = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv$ ,  $\mathbf{F}_c = \int \mathbf{N}^T \mathbf{f}_c dv$ ,  $\mathbf{F}_k = \int \mathbf{N}^T \mathbf{f}_k dv$  — соответственно матрицы жесткости, масс, центробежных сил и сил Кориолиса;  $\mathbf{D}$  — матрица упругих констант;  $\mathbf{V}$  — матрица градиентов;  $\mathbf{N}$  — матрица функций формы. Матрицы  $\mathbf{f}_c$  и  $\mathbf{f}_k$  определяются через функции формы отдельного элемента и являются, соответственно, симметричной и антисимметричной. Все конечно-элементные соотношения записаны с учетом обозначений, принятых в работе [7].

Если сделать замену переменной

$$t_0 = t\Omega^{-1}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} = \Omega \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (11)$$

и положить  $\Omega = |\omega|$ , то систему уравнений (10) можно переписать в виде

$$(\mathbf{K}^0 + p_0\mathbf{M}^0 + p_0\mathbf{F}_k^0)\delta = 0, \quad (12)$$

где матрицы с нулевым индексом отличаются от соответствующих матриц из (10) числовыми множителями, а  $p = p_0\Omega$  ( $p_0$  — неизвестные параметры, так называемые приведенные собственные значения системы линейных алгебраических уравнений). Такая замена переменной  $t$  и выбор  $\Omega$  приводят к нормированию числового значения элементов матриц  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{F}_c$ ,  $\mathbf{F}_k$  и их равноценному вкладу в результирующие коэффициенты разрешающей системы. Приведенные собственные значения  $p_0$ , входящие в систему уравнений (12), определяем методом парабол в комплексной форме. Такую схему решения поставленной задачи будем называть прямым методом отыскания собственных значений. К ее недостаткам следует отнести высокий порядок системы уравнений (12) и низкую эффективность выбранного метода для матриц высокой размерности.

Для снижения размерности системы воспользуемся методом разложения по собственным формам соответствующей консервативной задачи. Последняя, реализуемая в области вещественных собственных значений, существенно проще общей задачи в форме (12), так как разложение включает линейные комбинации конечного числа  $m$  первых собственных форм колебаний  $\chi_k$  соответствующей упругой задачи без учета вращения [3]:

$$\delta = \sum_{k=1}^m \mathbf{q}_k \chi_k. \quad (13)$$

Собственные формы колебаний находим из решения алгебраической задачи:

$$(\mathbf{K} - \rho \lambda_k^2 \mathbf{M})\chi_k = 0, \quad (14)$$

где  $\lambda_k$  — собственная частота колебаний консервативной системы, соответствующая  $\chi_k$ .

Система (12) с учетом (11) преобразуется к виду:

$$(\mathbf{K} + p_0^2 \mathbf{M}' + p_0 \mathbf{F}'_k)\mathbf{q} = 0, \quad (15)$$

где элементы входящих матриц определяются соотношениями:

$$\mathbf{K}'_{ij} = \chi_i^T \mathbf{K}^0 \chi_j, \quad \mathbf{M}'_{ij} = \chi_i^T \mathbf{M}^0 \chi_j, \quad \mathbf{F}'_{(k)ij} = \chi_i^T \mathbf{F}_k^0 \chi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (16)$$

Заметим, что в связи с необходимостью учета симметричных и антисимметричных компонент векторов  $\chi_k$ , матрицы в (15) имеют размер  $2m \times 2m$ .

Метод разложения по собственным формам является удобным в случае, когда при исследовании устойчивости варьируются свойства материала конструкции и угловая скорость вращения тела, а полученные ранее формы колебаний остаются неизменными и могут быть многократно использованы. Однако предварительно трудно определить

необходимое число собственных форм в разложении (13). Только проведение численного эксперимента с различным количеством удерживаемых в разложении форм гарантирует правильность полученных результатов.

### 3. Вынужденные колебания с учетом вращения и диссипации

Вынужденный режим движения будем исследовать в рамках задачи установившихся колебаний линейных упруговязких тел [6] с учетом вращения при кинематическом возбуждении. Ограничимся определением динамической реакции системы на внешнее кинематическое возбуждение, то есть построим амплитудно-частотные характеристики неконсервативной системы для различных значений угловой скорости  $\omega$ . Значения последней должны количественно соответствовать устойчивому и неустойчивому режимам [4]. Кроме того, полученные здесь результаты будут являться дополнительной проверкой правильности решения задачи о свободном движении неконсервативной системы.

Итак, решение задачи о вынужденных колебаниях вращающегося осесимметричного тела будем искать в виде:

$$\mathbf{U}(r, z, \varphi, t) = (\mathbf{U}_0^c + \mathbf{U}^c) \cos(\Omega_k t) + (\mathbf{U}_0^s + \mathbf{U}^s) \sin(\Omega_k t), \quad (17)$$

где  $\mathbf{U}_0^c(r, z, \varphi)$  и  $\mathbf{U}_0^s(r, z, \varphi)$  — амплитуды заданного кинематического возмущения (индексы  $c$  и  $s$  указывают на принадлежность к функции времени  $\cos$  или  $\sin$ );  $\Omega_k$  — частота кинематического возмущения.

Согласно полуаналитическому методу конечных элементов, раскладываем искомые перемещения в ряд по угловой координате

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} + \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{V} + \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{W} + \mathbf{W}_0 \end{Bmatrix} = & \begin{Bmatrix} \sum_{l=1}^{\infty} [(U^{sc} + U_0^{sc}) \cos(l\varphi) + (U^{ac} + U_0^{ac}) \sin(l\varphi)] \cos(\Omega_k t) \\ \sum_{l=1}^{\infty} [(V^{sc} + V_0^{sc}) \cos(l\varphi) + (V^{ac} + V_0^{ac}) \sin(l\varphi)] \cos(\Omega_k t) + \\ \sum_{l=1}^{\infty} [(W^{sc} + W_0^{sc}) \sin(l\varphi) + (W^{ac} + W_0^{ac}) \cos(l\varphi)] \cos(\Omega_k t) \\ + \sum_{l=1}^{\infty} [(U^{ss} + U_0^{ss}) \cos(l\varphi) + (U^{as} + U_0^{as}) \sin(l\varphi)] \sin(\Omega_k t) \\ + \sum_{l=1}^{\infty} [(V^{ss} + V_0^{ss}) \cos(l\varphi) + (V^{as} + V_0^{as}) \sin(l\varphi)] \sin(\Omega_k t) , \\ \sum_{l=1}^{\infty} [(W^{ss} + W_0^{ss}) \sin(l\varphi) + (W^{as} + W_0^{as}) \cos(l\varphi)] \sin(\Omega_k t) \end{Bmatrix}, \quad (18) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{V}_0$ ,  $\mathbf{W}_0$  — компоненты заданного кинематического возмущения. Неизвестные симметричные  $U^{sc}$ ,  $V^{sc}$ ,  $W^{sc}$ ,  $U^{ss}$ ,  $V^{ss}$ ,  $W^{ss}$  и антисимметричные  $U^{ac}$ ,  $V^{ac}$ ,  $W^{ac}$ ,  $U^{as}$ ,  $V^{as}$ ,  $W^{as}$  перемещения будем разыскивать методом конечных элементов (вторые буквы  $c$  и  $s$  в паре индексов указывают на принадлежность к функции времени  $\cos$  или  $\sin$ ). Дискретная форма записи соотношения (18) для произвольного элемента выглядит следующим образом:

$$\mathbf{U} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{N}_l \{\delta_l\}^{\cos} \cos(\Omega_k t) + \mathbf{N}_l \{\delta_l\}^{\sin} \sin(\Omega_k t), \quad (19)$$

где  $\{\delta_l\}^{\cos} = \{\delta_l\}^c + \{\delta_l^0\}^c$ ,  $\{\delta_l\}^{\sin} = \{\delta_l\}^s + \{\delta_l^0\}^s$ ;  $\{\delta_l\}^c$ ,  $\{\delta_l\}^s$  — неизвестные узловые перемещения;  $\{\delta_l^0\}^c$ ,  $\{\delta_l^0\}^s$  — заданные узловые перемещения.

В случае упруговязкого тела матрица  $\mathbf{D}$ , в отличие от упругого тела, представляет собой сумму

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* G^* + \mathbf{D}^0 K, \quad (20)$$

где элементы  $\mathbf{D}^*$  и  $\mathbf{D}^0$  отвечают, соответственно, за сдвиговые и объемные деформации [7]. Также приняты обозначения:  $K$  — объемный модуль упругости;  $G^*$  — интегральный оператор вида  $G^* \varphi = G \left[ \varphi(t) - \int R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]$  ( $G$  — мгновенный модуль

сдвига,  $R(t-\tau) = A \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$  — ядро релаксации [6]).

С учетом равенства (20) запишем вариационное уравнение в конечно-элементной форме:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}^* G(\cos(\Omega_k t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \cos(\Omega_k \tau) d\tau) \{\delta_l\}^{\cos} + \mathbf{K}^* G(\sin(\Omega_k t) - \\ & - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \sin(\Omega_k \tau) d\tau) \{\delta_l\}^{\sin} + K \mathbf{K}^0 \cos(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\cos} + K \mathbf{K}^0 \sin(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\sin} - \\ & - \Omega_k^2 \rho \mathbf{M} \cos(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\cos} - \Omega_k^2 \rho \mathbf{M} \sin(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\sin} - \omega^2 \rho \mathbf{F}_c \cos(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\cos} - \\ & - \omega^2 \rho \mathbf{F}_c \sin(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\sin} - 2\omega \Omega_k \rho \mathbf{F}_k \sin(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\sin} + 2\omega \Omega_k \rho \mathbf{F}_k \cos(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\cos} = \quad (21) \\ & = \mathbf{K}^* G(\cos(\Omega_k t)(1 - \Gamma_c) - \Gamma_s \sin(\Omega_k t)) \{\delta_l\}^{\cos} + \mathbf{K}^* G(\sin(\Omega_k t)(1 - \Gamma_c) - \\ & - \Gamma_s \cos(\Omega_k t)) \{\delta_l\}^{\sin} + K \mathbf{K}^0 \cos(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\cos} + K \mathbf{K}^0 \sin(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\sin} - \\ & - \Omega_k^2 \rho \mathbf{M} \cos(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\cos} - \Omega_k^2 \rho \mathbf{M} \sin(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\sin} - \omega^2 \rho \mathbf{F}_c \cos(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\cos} - \\ & - \omega^2 \rho \mathbf{F}_c \sin(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\sin} - 2\omega \Omega_k \rho \mathbf{F}_k \sin(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\sin} + 2\omega \Omega_k \rho \mathbf{F}_k \cos(\Omega_k t) \{\delta_l\}^{\cos} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\Gamma_c = A \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta\theta}}{\theta^{1-\alpha}} \cos \Omega_k \theta d\theta, \quad \Gamma_s = A \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta\theta}}{\theta^{1-\alpha}} \sin \Omega_k \theta d\theta, \quad (22)$$

$$\mathbf{K}^* = \int_{V^e} \mathbf{B}_e^{eT} \mathbf{D}^* \mathbf{B}_e^e dV^e, \quad \mathbf{K}^0 = \int_{V^e} \mathbf{B}_e^{eT} \mathbf{D}^0 \mathbf{B}_e^e dV^e.$$

Система уравнений (21) распадается на две подсистемы:

$$\begin{aligned} & (G \mathbf{K}^* (1 - \Gamma_c) + K \mathbf{K}^0 - \Omega_k^2 \rho \mathbf{M} - \omega^2 \rho \mathbf{F}_c) \{\delta_l\}^{\cos} + (G \mathbf{K}^* (1 - \Gamma_c) + 2\omega \rho \Omega_k \mathbf{F}_k) \{\delta_l\}^{\sin} = 0, \\ & (G \mathbf{K}^* (1 - \Gamma_c) + K \mathbf{K}^0 - \Omega_k^2 \rho \mathbf{M} - \omega^2 \rho \mathbf{F}_c) \{\delta_l\}^{\sin} - (G \mathbf{K}^* (1 - \Gamma_c) + 2\omega \rho \Omega_k \mathbf{F}_k) \{\delta_l\}^{\cos} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Требуется получить амплитудно-частотные характеристики системы при изменении угловой скорости  $\omega$  и частоты кинематического возбуждения  $\Omega_k$ .

#### 4. Примеры расчета

*Пример 1.* Численные расчеты были выполнены для тела в форме диска, имеющего размеры: внутренний радиус 0,02 м, наружный — 0,125 м, толщина 0,01 м. Диск жестко закреплен по внутреннему контуру, а по внешнему контуру свободен от нагрузок. Для оценки работоспособности предлагаемых алгоритмов задача со свободным движением решалась прямым методом и методом разложения по собственным формам консервативной системы. Результаты, полученные при построении собственных форм колебаний консервативной задачи, дали возможность определить необходимое количество членов в разложении (13).

Все результаты, приведенные далее, относятся к первой гармонике в разложении по угловой координате. Первым пяти собственным частотам соответствуют изгибные формы колебаний, шестой частоте отвечает форма колебаний в плоскости  $r, \varphi$ , седьмой — вновь изгибная, и далее наблюдается чередование изгибных и плоских форм колебаний. При других геометрических размерах диска и граничных условиях порядок чередования форм колебаний может быть иным.

На рисунке 1 приведены графики поведения первого  $p_1$  и шестого  $p_6$  собственных значений в зависимости от угловой скорости. Сплошными линиями показано изменение их мнимой части, штриховыми — действительной части.

Влияние дополнительных сил инерции, вызванных вращением, по-разному сказывается на изменении собственных значений как количественно, так и качественно. Те собственные значения, которым соответствуют изгибные формы колебаний, с увеличением угловой скорости могут убывать, оставаясь чисто мнимыми (например,  $p_1$ , см. Рис. 1), до тех пор, пока хотя бы одно из них не обратится в нуль (точка 8). При дальнейшем увеличении значения  $\omega$  величина  $p_1$  становится действительной и положительной, причем изменение таких собственных значений происходит довольно медленно. Согласно известным исследованиям [2], [3], такой тип неустойчивости называется статической неустойчивостью. Шестое собственное значение, которому соответствует плоская форма колебаний, на изменение угловой скорости реагирует совершенно иначе, чем упомянутая изгибная частота  $p_1$ .

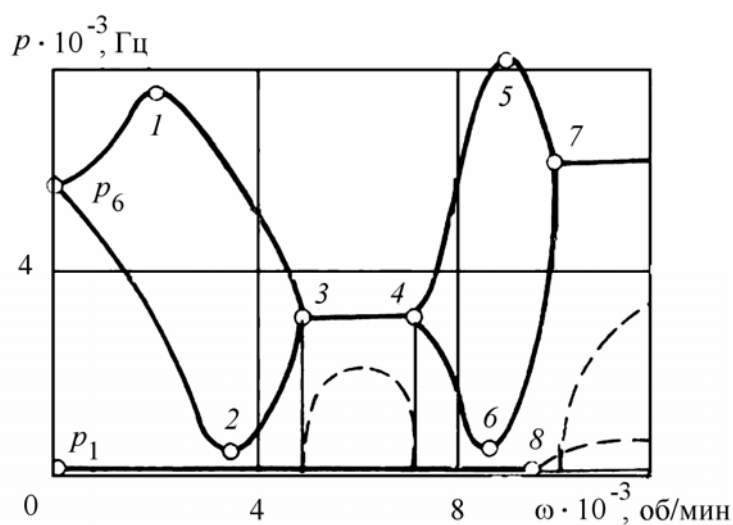


Рис. 1. Изменение собственных значений от частоты вращения



Напомним, что в отсутствие вращения имеем кратные собственные частоты, соотносящиеся с симметричными и антисимметричными формами движений. При появлении угловой скорости они начинают изменяться количественно, оставаясь чисто мнимыми (точки 1 и 2, 5 и 6). Начиная с некоторого значения  $\omega$  они сближаются, образуя пару комплексных собственных значений с положительной действительной частью (точки 3, 4, 7). Такой эффект описан в [2] и назван колебательной неустойчивостью.

Как упоминалось выше, при получении описанных результатов использовались прямой метод и метод разложения по собственным формам. Сравнение показало, что собственные значения, полученные обоими методами, практически совпадают при удержании в разложении 16 собственных форм колебаний.

Пример 2. Предложенный алгоритм исследования установившихся вынужденных колебаний был реализован для случая кинематического возбуждения того же диска, что и в первом примере. Расчеты выполнялись для трех вариантов констант ядра  $R(t)$ . Первый вариант —  $A = 0$ , то есть отсутствие диссипации; второй вариант —  $A = 0,025$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\beta = 0,05$ ,  $\int R(\tau) d\tau = 0,3$  — малая вязкость; третий вариант —  $A = 0,3$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\beta = 0,05$ ,  $\int R(\tau) d\tau = 0,6$  — большая вязкость.

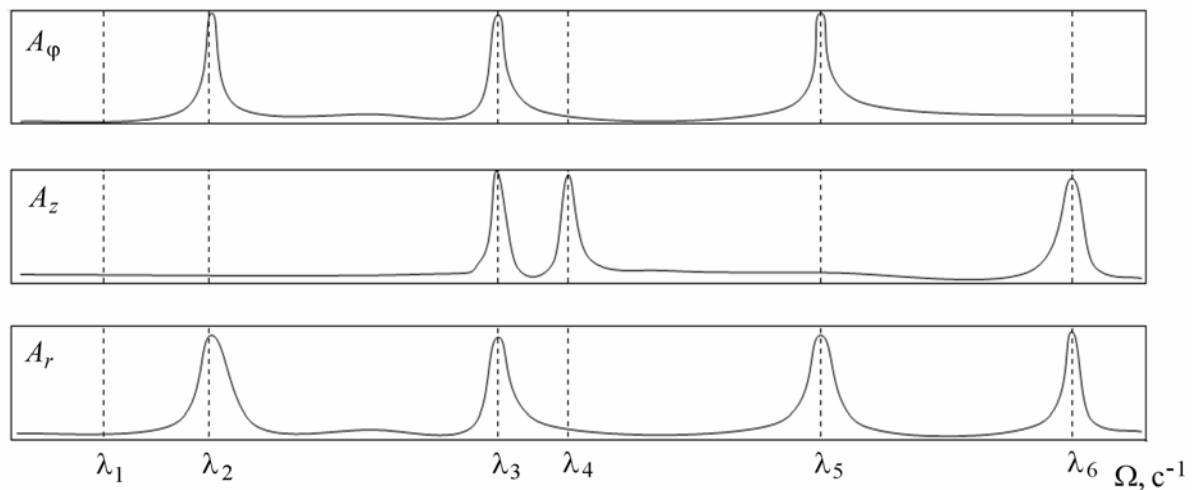
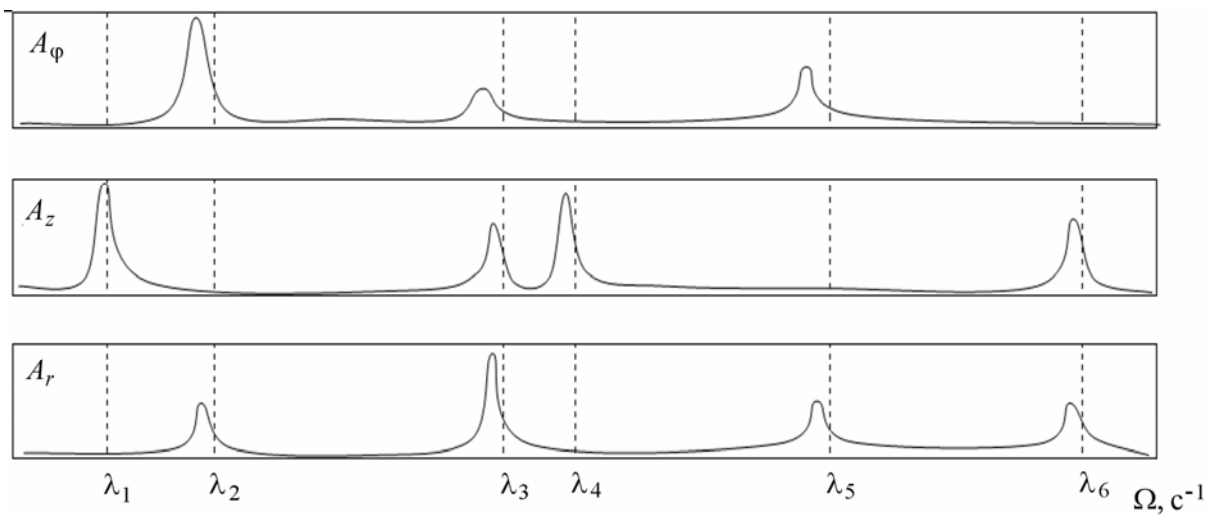
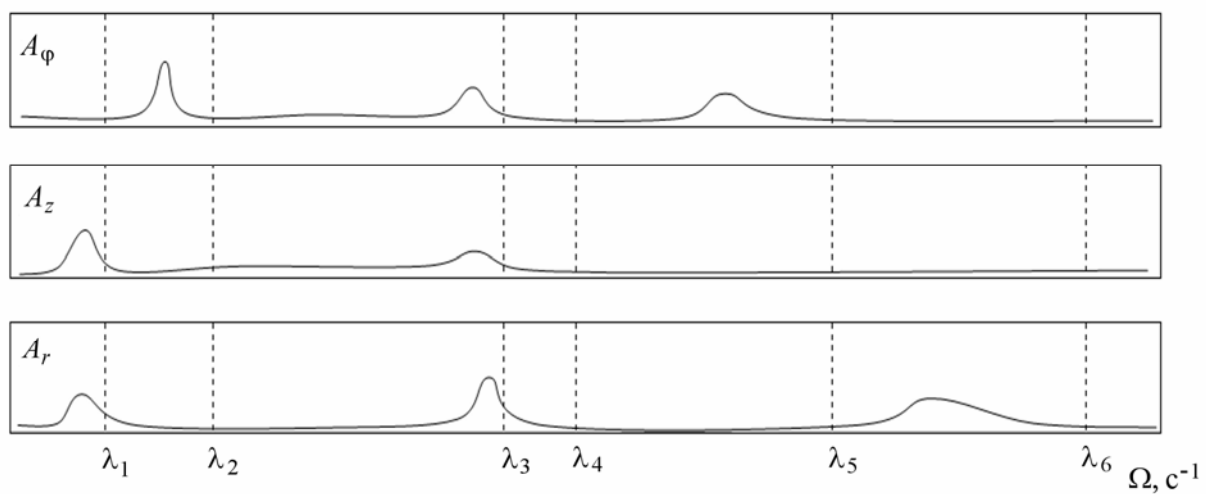
На рисунках 2, 3 построены нормированные (от 0 до 1) резонансные кривые. Вектор кинематического возбуждения в формуле (18) содержит все три кинематических компоненты  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $W_0$  и соответствует первой гармонике в разложении по угловой координате. Для обозначения собственных значений системы на рисунках приняты следующие символы:  $\lambda_k$  — для консервативной системы;  $p_k$  — для системы с учетом вращения.

В первом варианте (отсутствие диссипации при  $\omega = 0$ ) резонансные частоты совпадают с рассчитанными собственными частотами консервативной системы (Рис. 2, а). На резонансной кривой  $A_z$  (амплитуда колебаний в направлении  $z$ ) отсутствуют резонансы на 1, 2 и 5-й частотах свободных колебаний, поскольку для этих частот компонента собственных форм  $V$  значительно меньше, чем компоненты  $U$ ,  $W$ . По аналогичным причинам на резонансной кривой  $A_r$  отсутствуют резонансы на 1-й и 4-й частотах свободных колебаний, а на кривой  $A_\varphi$  — резонансы на 1, 4 и 6-й частотах.

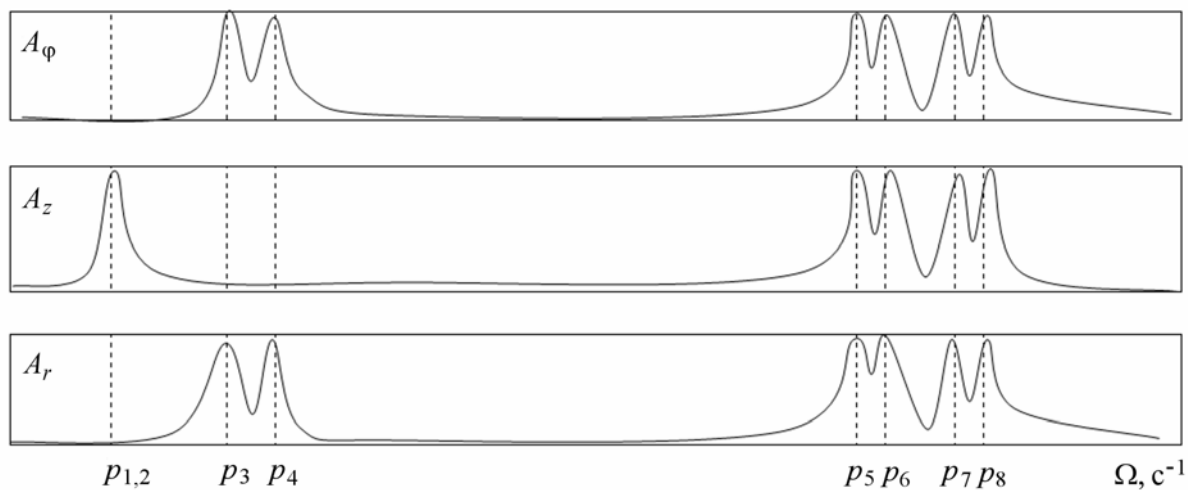
Для второго варианта (малая вязкость при  $\omega = 0$ ) амплитуды колебаний несколько уменьшаются, и резонансные пики сдвигаются в область низших частот (Рис. 2, б), однако наблюдается реакция системы на все характерные частоты внешнего возбуждения.

В условиях третьего варианта (большая вязкость при  $\omega = 0$ ) ситуация существенно меняется. Эффекты, связанные с большой вязкостью, привели к исчезновению ряда пиков, и вместо пяти резонансов остались только три, причем по сравнению со вторым вариантом их амплитуды существенно уменьшились, и вся характеристика еще больше сдвинулась влево (Рис. 2, в). Особенно это заметно на составляющей  $A_z$  вектора перемещений.

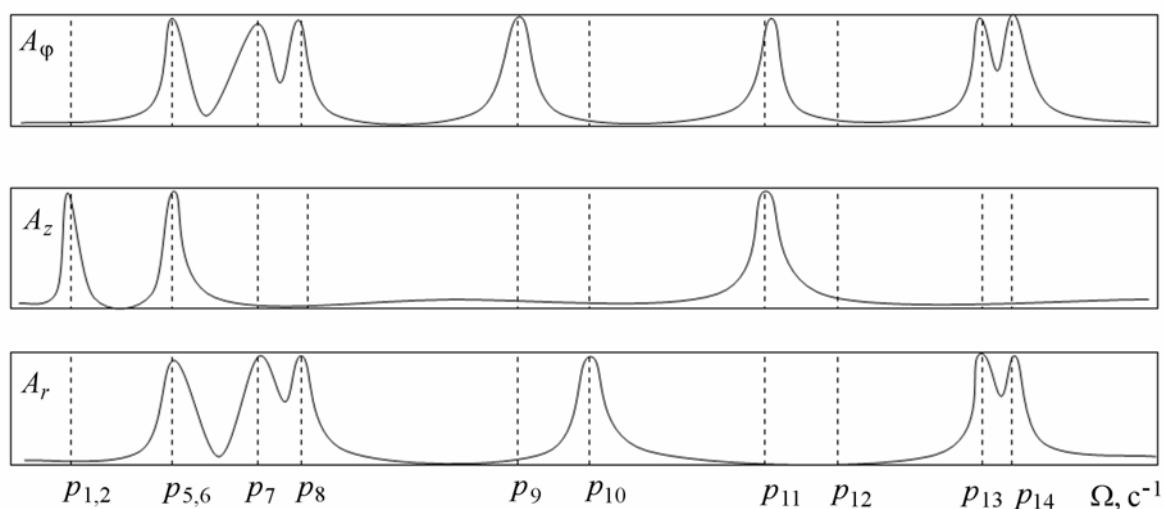
Теперь рассмотрим амплитудно-частотную характеристику при наличии вращения. Резонансные кривые для  $\omega = 209 \text{ с}^{-1}$ , изображенные на рисунке 3, а, имеют чисто мнимые характеристические показатели. Далее исследуется поведение системы при различных значениях угловых скоростей, приводящих к комплексным характеристическим показателям в спектрах собственных значений. На амплитудно-частотной характеристике, вычисленной для  $\omega = 628 \text{ с}^{-1}$  (Рис. 3, б) отсутствует резонанс, который бы соответствовал комплексным значениям  $p_3$ ,  $p_4$ . Это можно объяснить малой величиной гармонической составляющей в комплексном собственном значении. При  $\omega = 1335 \text{ с}^{-1}$  (Рис. 3, в) наблюдается небольшое увеличение амплитуды, на кривой  $A_r$ , соответствующее мнимой части комплексных значений  $p_5$ ,  $p_6$ , а на кривой  $A_\varphi$  —

*a**б**в*

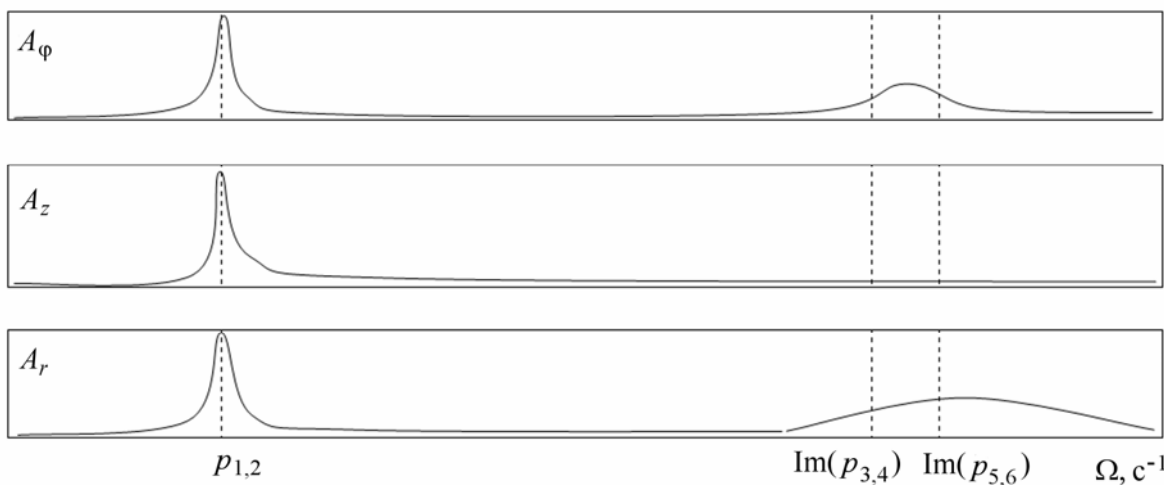
**Рис. 2.** Амплитудно-частотные характеристики консервативной системы при  $\omega = 0$  в условиях отсутствия диссипации (*a*), малой (*б*) и большой (*в*) вязкости



*a*



*б*



*в*

**Рис. 3.** Амплитудно-частотные характеристики неконсервативной системы при различных значениях угловой скорости ( $c^{-1}$ ):  $\omega = 209$  (*a*);  $\omega = 628$  (*б*);  $\omega = 1335$  (*в*)

значений  $p_3$ ,  $p_4$ . Заметим, что поскольку за гармоническую составляющую колебательного движения отвечает мнимая часть характеристического показателя, то появление резонансов зависит от ее величины и соотношения с действительной частью отвечающего ей собственного значения.

Особенность динамической реакции неконсервативной системы с учетом вращения на внешнее кинематическое возбуждение заключается в появлении широких зон повышенной амплитуды, а не отдельных резонансных пиков, как это было в случае консервативной системы. Ширина этих участков зависит от величины угловой скорости.

## 5. Заключение

В результате проведенных исследований разработан комплексный подход к решению динамических задач для быстро вращающихся пространственных элементов машиностроительных конструкций.

Дана общая постановка динамической задачи для быстро вращающихся трехмерных упругих и вязкоупругих тел с учетом неконсервативности, вызванной вращением;

Предложен и обоснован подход к решению задачи динамической устойчивости пространственных элементов машиностроительных конструкций. Оценка устойчивости проведена на основании теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Разработан комплекс численных алгоритмов решения задач динамики с использованием метода конечных элементов как в оригинальной разработке авторов, так и с использованием пакета прикладных программ ANSYS.

Разработаны и реализованы алгоритмы решения спектральных задач для симметричных и несимметричных матриц большой размерности, основанные на процедурах метода обратных итераций и метода парабол. Предложенный подход позволяет эффективно решать проблему комплексных собственных значений и векторов.

Получены оригинальные результаты решения задач устойчивости для вращающихся пространственных элементов машиностроительных конструкций. Рассмотрены режимы свободных и вынужденных установившихся колебаний.

Получены качественно новые результаты, относящиеся к динамической реакции неконсервативной системы на гармоническое возбуждение.

## Литература

1. Трояновский И.Е., Шардаков И.Н., Шевелев Н.А. Проблема собственных значений и форм вращающихся деформируемых конструкций // ПММ. – 1991. – Т. 55, вып. 5. – С. 857-864.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339с.
3. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971. – 312с.
4. Шевелев Н.А., Домбровский И.В. Влияние предварительного напряженного состояния на динамические характеристики машиностроительных конструкций // Вычислительная математика и механика. – 2008. – Т. 1, вып.2. – С. 106-112.
5. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М.: Высшая школа, 1983. – 351с.
6. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 277с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541с.

Поступила в редакцию 12.10.09

---

Сведения об авторах:

Шевелев Николай Алексеевич, дтн, проректор, Пермский государственный технический университет (ПГТУ), 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29; E-mail: n.shevelev@pstu.ru  
Домбровский Игорь Викторович, ктн, доц., ПГТУ; E-mail: dombrovski\_iv@mz.perm.ru