

УДК 539.37

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В МОМЕНТНЫХ СРЕДАХ

В.М. Садовский, О.В. Садовская, М.П. Варыгина

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

Разработан вычислительный алгоритм для решения пространственных динамических задач моментной теории упругости Коссера на многопроцессорных вычислительных системах. Проведены расчеты трехмерной задачи Лэмба о действии сосредоточенной нагрузки на поверхности однородного упругого полупространства и задачи о действии сосредоточенной импульсной нагрузки, периодической по времени. Сформулированы условия симметрии, позволяющие многократно уменьшить объем вычислений. Численно обнаружены четыре типа волн – продольные, поперечные, крутильные и вращательные волны, – характерных для моментной упругой среды, а также колебания вращательного движения частиц на фронтах волн. Результаты анализа колебательных процессов показали, что моментная среда обладает собственной частотой акустического резонанса, который проявляется при определенных условиях возмущения и зависит только от инерционных свойств частиц микроструктуры и от параметров упругости материала.

Ключевые слова: динамика, упругость, моментная среда, параллельный вычислительный алгоритм, резонансная частота

NUMERICAL MODELING OF THREE-DIMENSIONAL WAVE MOTIONS IN COUPLE-STRESS MEDIA

V.M. Sadovskiy, O.V. Sadovskaya and M.P. Varygina

Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia

A computational algorithm for the solution of three-dimensional dynamic problems of the Cosserat elasticity theory using multiprocessor computer systems is worked out. Computations of 3D Lamb's problem of the action of a concentrated load on the surface of a homogeneous elastic half-space and the problem of the action of a concentrated impulsive periodic load are performed. The symmetry boundary conditions permitting us to reduce computations many times are formulated. The shock waves of four types, longitudinal, transverse, torsional and rotational waves, characteristic of couple-stress elastic medium, are recognized numerically. The oscillations of the rotational motion of particles on the wave fronts are also found. The results of the analysis of oscillation processes show that the Cosserat medium possesses the eigenfrequency of acoustic resonance, which appears under certain conditions of perturbation and depends only on the inertial properties of the microstructure particles and the elasticity parameters of the material.

Keywords: dynamics, elasticity, Cosserat medium, parallel computational algorithm, resonance frequency

Принципиальное отличие математической модели моментного континуума Коссера от классической линейной теории упругости состоит в том, что в ней неявно присутствует малый параметр — размер частиц микроструктуры материала. Как следствие, для получения корректных численных решений расчеты необходимо выполнять на сетках, размер ячеек которых значительно меньше этого параметра. При решении динамических задач в трехмерной постановке оказываются эффективными параллельные алгоритмы, позволяющие распределять вычислительную нагрузку между большим числом узлов кластера. Использование распределенных вычислений дает

возможность существенно измельчать расчетные сетки, тем самым повышая точность решения.

Вопросы численного решения динамических задач в рамках моментной теории упругости рассматриваются в работах [1, 2]. В настоящей работе приводятся результаты анализа колебательных процессов, показывающие, что в моментных средах существует характерная резонансная частота, соответствующая частоте собственных колебаний вращательного движения частиц, которая связана только с инерционными свойствами частиц микроструктуры материала и не зависит от размеров исследуемой области и условий на ее границе.

1. Математическая модель

В модели моментной упругой среды, кроме поступательного движения, которое характеризуется вектором скорости v , рассматриваются независимые повороты частиц с вектором угловой скорости ω , а наряду с тензором напряжений σ , компоненты которого несимметричны, вводится несимметричный тензор моментных напряжений m . Полную систему уравнений модели образуют уравнения движения, кинематические соотношения и обобщенный закон линейной теории упругости [3, 4]:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v} &= \nabla \cdot \sigma + \rho g, & j \dot{\omega} &= \nabla \cdot m - 2\sigma^a + j q, & \dot{\Lambda} &= \nabla v + \omega, & \dot{M} &= \nabla \omega, \\ \sigma &= \lambda(\delta : \Lambda)\delta + 2\mu \Lambda^s + 2\alpha \Lambda^a, & m &= \beta(\delta : M)\delta + 2\gamma M^s + 2\varepsilon M^a. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность среды, j — суммарный момент инерции частиц в единице объема, g и q — векторы массовых сил и моментов, Λ и M — тензоры деформаций и кривизн, λ , μ , α , β , γ и ε — феноменологические коэффициенты упругости для изотропного материала, δ — метрический тензор. Используются общепринятые обозначения и операции тензорного анализа: двоеточие означает двойную свертку, точка над символом — производную по времени, звездочка — транспонирование тензора. Верхними индексами s и a отмечены симметричная и антисимметричная составляющие тензоров. С антисимметричной составляющей, где это необходимо, отождествляется соответствующий ей вектор. В частности, в уравнения вращательного движения входит вектор тензора $\sigma^a = (\sigma - \sigma^*) / 2$.

Для оценки линейного параметра микроструктуры материала справедлива формула $r = \sqrt{5j / (2\rho)}$, основанная на модельном представлении о среде как о плотной упаковке ансамбля шарообразных частиц одинакового радиуса.

Для пространственного случая система уравнений (1) в декартовой системе координат имеет следующий развернутый вид:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \sigma_{1i,1} + \sigma_{2i,2} + \sigma_{3i,3} + \rho g_i, & j \dot{\omega}_i &= m_{1i,1} + m_{2i,2} + m_{3i,3} + \sigma_{kl} - \sigma_{lk} + j q_i, \\ a_1 \dot{\sigma}_{ii} + a_2 (\dot{\sigma}_{kk} + \dot{\sigma}_{ll}) &= v_{i,i}, & b_1 \dot{m}_{ii} + b_2 (\dot{m}_{kk} + \dot{m}_{ll}) &= \omega_{i,i}, \\ a_3 \dot{\sigma}_{ik} + a_4 \dot{\sigma}_{ki} &= v_{k,i} - \omega_l, & b_3 \dot{m}_{ik} + b_4 \dot{m}_{ki} &= \omega_{k,i}, \\ a_4 \dot{\sigma}_{ik} + a_3 \dot{\sigma}_{ki} &= v_{i,k} + \omega_l, & b_4 \dot{m}_{ik} + b_3 \dot{m}_{ki} &= \omega_{i,k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) включает 24 уравнения относительно 24-х неизвестных функций. Нижние индексы после запятой служат для обозначения частных производных по соответствующим пространственным координатам. Также используются обозначения:

$$\begin{aligned}
 i, k, l = 1, 2, 3, \quad i \neq k \neq l, \quad k = i + 1 \pmod{3}, \quad l = k + 1 \pmod{3}, \\
 a_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad a_2 = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad a_3 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}, \quad a_4 = \frac{\alpha - \mu}{4\mu\alpha}, \\
 b_1 = \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)}, \quad b_2 = -\frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)}, \quad b_3 = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}, \quad b_4 = \frac{\varepsilon - \gamma}{4\gamma\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Систему уравнений (2) можно переписать в матричном виде [1]:

$$A\dot{U} = B^1 U_{,1} + B^2 U_{,2} + B^3 U_{,3} + QU + G, \tag{4}$$

где U — вектор-функция, составленная из компонент векторов скорости и угловой скорости, несимметричных тензоров напряжений и моментных напряжений

$$\begin{aligned}
 U = (v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \\
 \omega_1, \omega_2, \omega_3, m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{23}, m_{32}, m_{31}, m_{13}, m_{12}, m_{21}).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Матрицы-коэффициенты A , B^1 , B^2 и B^3 симметричны, а Q антисимметрична, G — заданный вектор массовых сил и моментов. Матрица A положительно определена, если положительно определенными являются ее диагональные блоки:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_3 & b_4 \\ b_4 & b_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Это условие ограничивает допустимые значения параметров среды:

$$3\lambda + 2\mu, \mu, \alpha > 0, \quad 3\beta + 2\gamma, \gamma, \varepsilon > 0. \tag{7}$$

При выполнении неравенств (7) потенциальная энергия упругой деформации представляет собой положительную квадратичную форму, а система (4) является гиперболической по Фридрихсу [5]. Ее характеристические свойства описываются уравнением

$$\det(cA + n_1 B^1 + n_2 B^2 + n_3 B^3) = 0, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \tag{8}$$

положительные корни которого — скорости продольных волн c_p , поперечных волн c_s , волн кручения c_m и волн вращательного движения c_ω , равны

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \quad c_m = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{j}}, \quad c_\omega = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{j}}. \tag{9}$$

Полную систему левых собственных векторов образуют 12 векторов, соответствующих ненулевым собственным числам $\pm c_p$, $\pm c_s$, $\pm c_m$ и $\pm c_\omega$, среди которых $\pm c_s$ и $\pm c_\omega$ являются двукратными, и 12 векторов для $c = 0$.

Для гиперболической системы (4) корректно поставлена краевая задача с начальными данными $U(x, 0) = U^0(x)$ и диссипативными граничными условиями,

выполнение которых для любых двух вектор-функций U и \tilde{U} обеспечивает выполнение в точках границы неравенства

$$(\tilde{U} - U)(n_1 B^1 + n_2 B^2 + n_3 B^3)(\tilde{U} - U) \leq 0. \quad (10)$$

В развернутой форме это неравенство выглядит так (по повторяющимся индексам $k, l = 1, 2, 3$ производится суммирование):

$$(\tilde{v}_l - v_l)(\tilde{\sigma}_{kl} - \sigma_{kl})n_l + (\tilde{\omega}_l - \omega_l)(\tilde{m}_{kl} - m_{kl})n_l \leq 0. \quad (11)$$

К диссипативным, в частности, относятся граничные условия в скоростях и в напряжениях, которые в рамках модели моментной среды формулируются следующим образом:

$$v = \bar{v}, \quad \omega = \bar{\omega}, \quad \sigma_{kl} n_k = \bar{p}_l, \quad m_{kl} n_k = \bar{q}_l. \quad (12)$$

Здесь \bar{p} и \bar{q} — заданные на границе векторы внешних усилий и моментов. Если на границе области не выполняются условия согласования между граничными и начальными значениями заданных функций или если эти функции разрывны, то образуются разрывы решения — ударные волны, для определения которых служит система уравнений сильного разрыва

$$(c A + n_1 B^1 + n_2 B^2 + n_3 B^3)[U] = 0, \quad (13)$$

где $[U]$ — скачок решения при переходе через фронт разрыва, c — скорость движения фронта в направлении вектора нормали n . Судя по этой системе, ударные волны малой амплитуды в моментной среде могут распространяться только со скоростями (9), и на фронтах волн скалярные произведения левых собственных векторов на вектор U остаются непрерывными.

При численном исследовании задач важную роль играют искусственные граничные условия, которые связаны с симметрией напряженно-деформированного состояния и позволяют многократно уменьшить объем вычислений. Эти условия следуют из инвариантности системы уравнений относительно простых преобразований, переводящих искусственные границы (например, плоскости симметрии) в себя. Заметим, что вектор угловой скорости ω по существу является тензором второго ранга, а тензор моментов m — тензором третьего ранга. Формулы понижения ранга для них имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{21}, \quad m_{11} = m_{132}, \quad m_{22} = m_{213}, \quad m_{33} = m_{321}, \\ m_{23} = m_{221}, \quad m_{32} = m_{313}, \quad m_{31} = m_{332}, \quad m_{13} = m_{121}, \quad m_{12} = m_{113}, \quad m_{21} = m_{232}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно при преобразовании, например, зеркального отражения $x_2 \mapsto -x_2$ меняются знаки величин $\omega_1, \omega_3, m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{31}$ и m_{13} , в тензорных компонентах которых индекс 2 встречается только один раз. Эти величины на плоскости $x_2 = 0$ оказываются равными нулю.

С целью решения пространственных задач об упругих волнах, вызванных действием сосредоточенного импульсного источника, в [2] приводятся граничные условия симметрии для различных типов нагружения. Если на поверхности полупространства $x_1 > 0$ действует нормальная нагрузка $\sigma_{11} = -\bar{p}_1 \delta(x) \delta(t)$, сосредоточенная в начале координат, то плоскости $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ являются плоскостями

симметрии. Система уравнений (2) инвариантна при зеркальном отражении $x_2 \mapsto -x_2$, что на плоскости $x_2 = 0$ обозначает равенство нулю компонент тензоров, меняющих свой знак:

$$v_2 = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad m_{22} = 0. \quad (15)$$

Плоскость $x_3 = 0$ переходит в себя при зеркальном отражении $x_3 \mapsto -x_3$, поэтому на ней

$$v_3 = 0, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad m_{33} = 0. \quad (16)$$

Если в точке $x = 0$ действует сосредоточенная касательная нагрузка $\sigma_{12} = -\bar{p}_2 \delta(x) \delta(t)$, то плоскость $x_3 = 0$ является плоскостью симметрии, а $x_2 = 0$ — плоскостью антисимметрии. Преобразование $x_2 \mapsto -x_2$, при котором плоскость $x_2 = 0$ переходит в себя, меняет знак решения на противоположный: $U \mapsto -U$. Следовательно, на этой плоскости

$$v_1 = v_3 = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad m_{21} = m_{23} = 0. \quad (17)$$

На плоскости $x_3 = 0$ выполняются условия (16).

При действии сосредоточенного момента $m_{11} = -\bar{q}_1 \delta(x) \delta(t)$, закручивающего частицу вокруг оси x_1 , оба зеркальных отражения $x_2 \mapsto -x_2$ и $x_3 \mapsto -x_3$ меняют знак решения: $U \mapsto -U$. Поэтому на плоскости антисимметрии $x_2 = 0$ выполняются условия (17), а на плоскости $x_3 = 0$ — аналогичные условия

$$v_1 = v_2 = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad m_{31} = m_{32} = 0. \quad (18)$$

Если на границе действует сосредоточенный вращательный момент $m_{12} = -\bar{q}_2 \delta(x) \delta(t)$, то преобразование зеркального отражения $x_3 \mapsto -x_3$ меняет знак решения, а $x_2 \mapsto -x_2$ — нет. Следовательно, на плоскости симметрии $x_2 = 0$ выполняются условия (15), а на плоскости антисимметрии $x_3 = 0$ — условия (18).

Можно показать, что граничные условия (15)–(18) являются диссипативными, поэтому их постановка обеспечивает корректность задачи.

Более общая математическая модель среды с микроструктурой, механические свойства которой меняются в зависимости от знака напряжений, учитывающая упругие связи между частицами и пластические деформации частиц, приводится к вариационному неравенству [1]

$$(\tilde{V} - V)(A\dot{U} - B^1 V_{,1} - B^2 V_{,2} - B^3 V_{,3} - QV - G) \geq 0 \quad (\tilde{V}, V \in F). \quad (19)$$

Здесь вектор-функция V включает в себя компоненты векторов скорости и угловой скорости, тензоров напряжений и моментных напряжений, а в вектор-функцию U вместо истинных напряжений входят компоненты тензоров условных напряжений и условных моментных напряжений. Тензоры условных напряжений вычисляются по линейному закону Гука из системы уравнений (1). Вектор-функции V и U связаны между собой уравнениями

$$V = \xi U + (1 - \xi)U^\pi, \quad U = \frac{1}{\xi} V - \frac{1 - \xi}{\xi} V^\pi. \quad (20)$$

Здесь ξ — отношение модулей упругой податливости при растяжении и сжатии, U^π — проекция U на конус K по евклидовой норме $|U|_A = \sqrt{U A U}$, K — выпуклый конус напряжений, допускаемых критерием прочности, F — выпуклое и замкнутое множество, заданное критерием пластичности.

2. Плоские волны

В одномерном случае, когда искомые функции зависят только от времени и одной из пространственных переменных, например, от x_1 , система уравнений (2) распадается на четыре независимые подсистемы, описывающие:

плоские продольные волны

$$\rho \dot{v}_1 = \sigma_{11,1}, \quad \dot{\sigma}_{11} = (\lambda + 2\mu) v_{1,1}, \quad \dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{33} = \lambda v_{1,1}; \quad (21)$$

крутильные волны

$$j \dot{\omega}_1 = m_{11,1} + \sigma_{23} - \sigma_{32}, \quad \dot{\sigma}_{32} = -\dot{\sigma}_{23} = 2\alpha \omega_1, \\ \dot{m}_{11} = (\beta + 2\gamma) \omega_{1,1}, \quad \dot{m}_{22} = \dot{m}_{33} = \beta \omega_{1,1}; \quad (22)$$

поперечные волны (волны сдвига) с вращением частиц

$$\rho \dot{v}_2 = \sigma_{12,1}, \quad \dot{\sigma}_{12} = (\mu + \alpha) v_{2,1} - 2\alpha \omega_3, \quad \dot{\sigma}_{21} = (\mu - \alpha) v_{2,1} + 2\alpha \omega_3, \\ j \dot{\omega}_3 = m_{13,1} + \sigma_{12} - \sigma_{21}, \quad \dot{m}_{13} = (\gamma + \varepsilon) \omega_{3,1}, \quad \dot{m}_{31} = (\gamma - \varepsilon) \omega_{3,1}. \quad (23)$$

Еще одна подсистема получается из (23) заменой индексов; она также описывает поперечные волны.

Общее решение подсистемы (21) выражается формулой Даламбера, в соответствии с которой продольные волны, как и в классической теории упругости, распространяются со скоростями $\pm c_p$ и не обладают дисперсией. Подсистема крутильных волн (22) сводится к телеграфному уравнению относительно угловой скорости: $\ddot{\omega}_1 = c_m^2 \omega_{1,11} - 4\alpha \omega_1 / j$. Не зависящее от x_1 решение телеграфного уравнения описывает равномерное колебательное вращение частиц среды с периодом колебаний $T = \pi \sqrt{j/\alpha}$. Анализ показывает, что на фронтах волн кручения возбуждается волнообразное вращательное движение частиц с характерной длиной волны, приблизительно равной произведению $c_m T$. В работе [1] выполнен численный анализ уравнений поперечных волн (23) на основе конечноразностной схемы Неймана–Рихтмайера. Расчеты проводились для задачи об импульсном воздействии на упругую среду периодической системы Λ -образных импульсов касательного напряжения. Результаты показали, что при фиксированном времени угловая скорость, а также моментные напряжения представляют собой осциллирующие функции с характерной длиной волны $c_s T$.

Согласно общей теории гиперболических систем, возмущения распространяются в рамках модели упругой среды с конечными скоростями (9). При этом возмущения, соответствующие поперечным волнам, автоматически порождают волны вращательного движения, и наоборот, возмущения вращательного движения приводят к поперечным волнам. На таких волнах, как и на крутильных, возникают осцилляции решения, что является основным качественным отличием модели моментной среды Коссера от классической линейной теории упругости. Другое отличие состоит в том, что в

моментной среде имеется собственная частота акустического резонанса материала, не зависящая от размеров исследуемой области, которая проявляется при определенных условиях возмущения.

Действительно, в случае однородного напряженного состояния из системы (23) вытекает классическое резонансное уравнение $j \ddot{\omega}_3 = -4\alpha \omega_3 + 2\alpha \dot{\chi}$, из которого следует, что если угол сдвига $\chi(t)$ изменяется по гармоническому закону с частотой $\nu_* = 1/T$, равной частоте собственных колебаний вращательного движения, то амплитуда угловой скорости частиц неограниченно растет. Данное уравнение описывает поведение бесконечного тонкого плоского упругого слоя, нижняя поверхность которого неподвижна, а верхняя движется по заданному закону.

В качестве примера рассматривался равномерный циклический сдвиг вязкоупругого слоя конечной толщины H . Как обычно, вязкость использовалась в качестве сглаживающего механизма. Процесс сдвига описывался уравнениями (23), в которых, в соответствии с теорией вязкоупругости Больцмана, произведения параметров среды на кинематические характеристики деформирования заменялись свертками соответствующих этим параметрам ядер релаксации на те же самые характеристики. Граничные условия задачи записывались в виде:

$$v_2|_{x_1=0} = \bar{v}_2 e^{2\pi i \nu t}, \quad \omega_3|_{x_1=0} = 0, \quad v_2|_{x_1=H} = 0, \quad \omega_3|_{x_1=H} = 0 \quad (24)$$

(ось x_1 направлена внутрь слоя). Система решалась спектральным методом: после применения преобразования Фурье из нее получалась система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \nu^2 \rho \hat{v}_2 + (\hat{\mu} + \hat{\alpha}) \hat{v}_{2,11} - 2\hat{\alpha} \hat{\omega}_{3,1} &= 0, \\ 4(\pi^2 \nu^2 j - \hat{\alpha}) \hat{\omega}_3 + (\hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}) \hat{\omega}_{3,11} + 2\hat{\alpha} \hat{v}_{2,1} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

решение которой строилось в явном виде с учетом граничных условий (24). Амплитуда касательного напряжения определялась через решение системы уравнений (25) по формуле: $2\pi i \nu \hat{\sigma}_{12} = (\hat{\mu} + \hat{\alpha}) \hat{v}_{2,1} - 2\hat{\alpha} \hat{\omega}_3$. Для проверки достоверности результатов осуществлялось численное решение задачи на основе аппроксимирующей систему (25) спектрально-разностной схемы. Расчеты проводились методом матричной прогонки и на достаточно мелких сетках привели к практически неотличимым результатам. Расчетные феноменологические параметры среды подбирались по экспериментальным данным серии работ для тяжелой нефти в породе при достаточно низкой температуре, когда материал находится в твердой фазе (см. [6]).

На рисунке 1 приведены амплитудно-частотные зависимости для касательного напряжения на нижней поверхности вязкоупругого слоя. Рисунок 1, *a* относится к среде Коссера, на рисунке 1, *б* изображена такая же зависимость для обычной безмоментной вязкоупругой среды. Аналогичные графики для идеальных, невязких сред имеют систему резонансных пиков с бесконечными амплитудами.

Из сравнения графиков видно, что в моментной среде имеется дополнительная резонансная частота 23 кГц, близкая к частоте вращательного движения частиц, которая не зависит от толщины слоя. Это подтверждается большим количеством численных экспериментов для различных толщин. Как оказалось, изменение H приводит к смещению периодической системы основных резонансных частот, примерно равных $\nu_k = k c_s / (2H)$ ($k = 1, 2, \dots$), но при этом пик, соответствующий частоте ν_* , остается неподвижным.

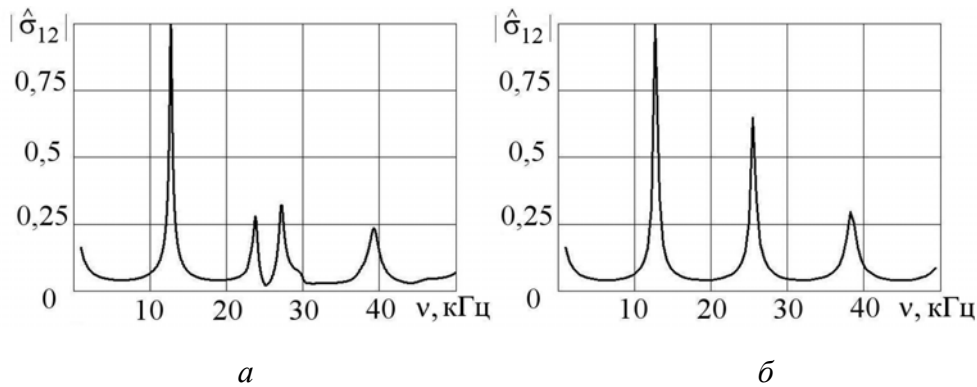


Рис. 1. Характерные спектральные кривые касательного напряжения для континуума Коссера (*a*) и безмоментной вязкоупругой среды (*б*)

Аналогичные расчеты для пенистого полиуретана не показали столь же заметного на фоне основных частот пика на резонансной частоте этого материала, имеющей тот же порядок, что и для тяжелой нефти. Это объясняется существенно более низкими моментными свойствами, выраженными в числовых значениях параметров j и α . Как оказалось, в материалах с низкими моментными свойствами резонанс вращательного движения частиц можно возбудить, например, за счет периодического изменения вращательного момента на границе слоя.

3. Вычислительный алгоритм

Для модели моментного континуума Коссера и ее нелинейного обобщения на среды, по-разному сопротивляющиеся растяжению и сжатию, разработан параллельный алгоритм численной реализации на многопроцессорных суперкомпьютерах [1, 2]. Алгоритм решения линейной системы основан на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным. Одномерные системы уравнений на этапах расщепления решаются с помощью явной монотонной ENO (Essentially NonOscillatory) схемы типа «предиктор — корректор» с использованием кусочно-линейных сплайнов, разрывных на границах ячеек. Сплайны строятся на основе специальной процедуры предельной реконструкции [7], позволяющей повысить точность численного решения. Такая расчетная схема обладает свойством монотонности [8], поэтому она, в отличие от многих более простых схем, пригодна для исследования обобщенных решений в задачах об ударных, импульсных и сосредоточенных воздействиях.

Нелинейная система (19)–(20) реализуется с помощью метода расщепления по физическим процессам и приводит в каждой ячейке расчетной области к вариационному неравенству, описывающему пластическое деформирование материала с использованием специальных алгоритмов корректировки напряжений [1].

Создан комплекс параллельных программ для решения плоских и пространственных задач динамики моментной среды. Программирование выполнено на языке Fortran по технологии SPMD с использованием стандартной библиотеки передачи сообщений MPI. Универсальность программ достигается за счет специальной упаковки переменных каждого вычислительного узла кластера в одномерные массивы большой размерности. Распараллеливание вычислений осуществляется на этапе расщепления задачи по пространственным переменным. При решении одномерных систем уравнений обмен данными между вычислительными узлами происходит на шаге «предиктор» разностной схемы по обычной технологии законтурных ячеек. Каждый процессор сначала обменивается с соседними процессорами граничными значениями своих данных, а затем пересчитывает искомые величины в соответствии с разностной схемой. Расчетная область распределяется между узлами кластера по принципу равномерной загрузки.

Из соображений минимизации количества пересылок используются различные варианты разбиений — 1D, 2D или 3D. Для организации контрольных точек при счете каждый процессор формирует двоичные файлы прямого доступа, суммарный размер таких файлов на одном и том же шаге по времени может значительно превышать объем оперативной памяти отдельного процессора. Разработана процедура сжатия файлов, содержащих результаты вычислений, поскольку размер файлов может быть очень большим и для их транспортировки по сети потребуются значительные ресурсы. Графический вывод результатов осуществляется с помощью специальных программ, предназначенных для обычного персонального компьютера.

4. Результаты расчетов

Тестирование алгоритма и комплекса программ выполнялось путем сопоставления результатов расчетов с точным решением двумерной задачи о распространении поверхностных волн Рэлея в среде Коссера [9], а также с точными решениями, описывающими одномерные движения среды с плоскими волнами. Расчеты собственных колебаний в моментной среде в двумерной постановке на основе разработанного алгоритма проведены в работе [1]. В статье [2] представлены результаты численного решения пространственной задачи Лэмба о мгновенном действии сосредоточенных сил и моментов на поверхности полупространства. На сейсмограммах, построенных по результатам расчетов в системе обработки геофизических данных SeisView, идентифицированы четыре типа волн — продольные, поперечные, крутильные и вращательные волны, распространяющиеся со скоростями (9). Расчеты пространственных задач подтвердили основное качественное отличие волнового поля в моментной среде Коссера от поля в классической теории упругости, которое заключается в появлении колебаний вращательного движения частиц на фронтах волн. Проведены сравнительные расчеты с различными значениями масштаба микроструктуры среды, в которых установлена прямая пропорциональная зависимость периода собственных колебаний от этого масштаба.

На рисунке 2 приведены поверхности уровня напряжений и момента в задаче Лэмба о действии сосредоточенной нормальной нагрузки $\sigma_{11} = -\bar{p}_1 \delta(x) \delta(t)$ в угловой точке верхней границы расчетной области. Видны падающие продольные и поперечные волны, конические поперечные волны и поверхностные волны Рэлея. Расчетная область, с учетом условий симметрии, представляет собой четверть полупространства. В действительности расчеты проводились на кубе со стороной 1 см для синтетического полиуретана. Рисунки соответствуют моменту времени $t = 3,3$ мкс. Используемая

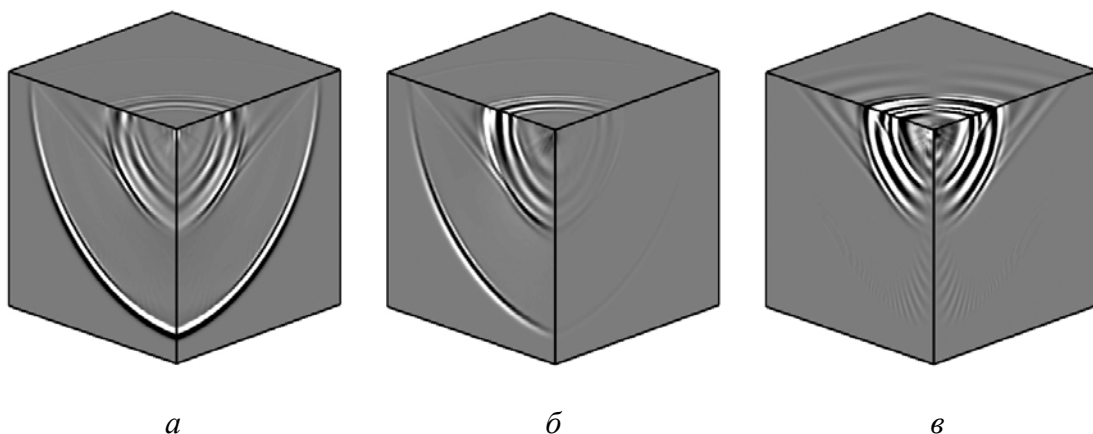


Рис. 2. Поверхности уровня напряжений σ_{11} (а), σ_{12} (б) и момента m_{23} (в) для задачи Лэмба

в расчетах равномерная разностная сетка состояла из $200 \times 200 \times 200$ ячеек. На более грубых сетках невозможно выполнить расчеты с приемлемой точностью, поскольку размер ячеек становится сравнимым с параметром микроструктуры среды. На искусственно введенных гранях куба ставились условия симметрии и неотражающие граничные условия, которые моделировали беспрепятственное прохождение волн. Расчеты выполнялись на 64-х узлах кластера, каждым из вычислительных узлов решалась часть задачи на подсетке размерностью $50 \times 50 \times 50$ ячеек. Для расчета 200 шагов по времени потребовалось примерно 18 часов машинного времени.

На рисунке 3 изображены схема нагружения и сейсмограммы угла поворота частиц в плоскости $x_1 x_2$ вдоль трассы, проходящей через точку приложения нагрузки по оси x_2 , для задачи Лэмба (Рис. 3, б) и задачи о периодическом воздействии сосредоточенной нагрузки $\sigma_{11} = -\bar{p}_1 \delta(x) \sin(2\pi\nu t)$ с частотой ν , равной собственной резонансной частоте ν_* (Рис. 3, в). Сравнивая сейсмограммы по числу колебаний, можно заметить, что соответствующие длины волн практически совпадают.

Далее представлены результаты решения задачи о действии сосредоточенного вращательного момента $m_{12} = -\bar{q}_2 \delta(x) \sin(2\pi\nu t)$, изменяющегося периодически по времени. Рисунок 4 содержит схему нагружения, а также поверхности уровня угловой скорости ω_2 для нерезонансной ($\nu = 1,5\nu_*$) и резонансной ($\nu = \nu_*$) частот в различные моменты времени. Поверхности уровня соответствуют одному и тому же диапазону значений ω_2 . Судя по рисунку, максимальная амплитуда колебаний угловой скорости достигается в точке приложения нагрузки, а длина волны существенно зависит от частоты. Сравнение показывает, что при частоте внешнего воздействия ν_* (Рис. 4, в), равной собственной частоте вращательного движения частиц, происходит рост амплитуды со временем и более плавное затухание колебаний с удалением от точки приложения нагрузки, характерное для акустического резонанса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00148), Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 40 и Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация».

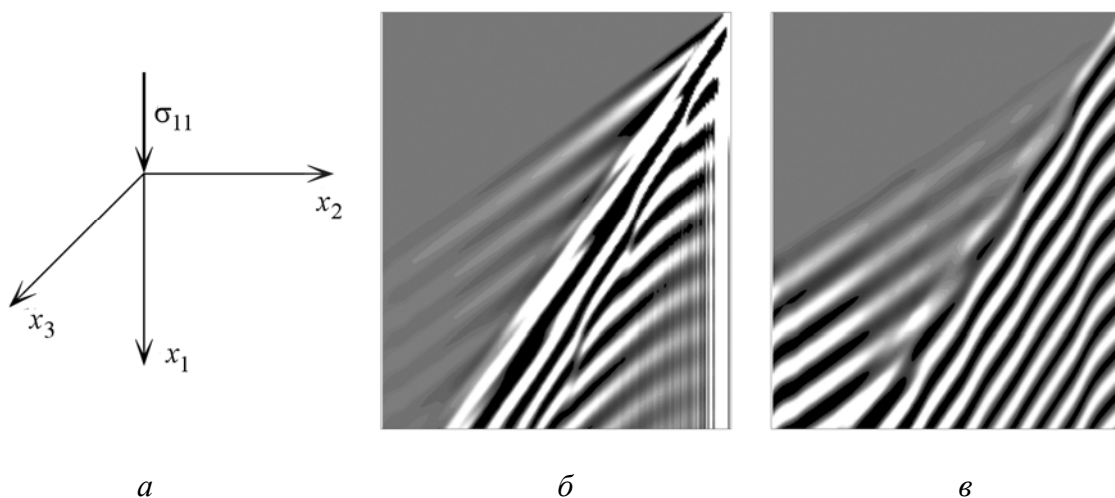


Рис. 3. Схема нагружения (а) и сейсмограммы падающих волн в случае импульсного (б) и периодического (в) воздействий

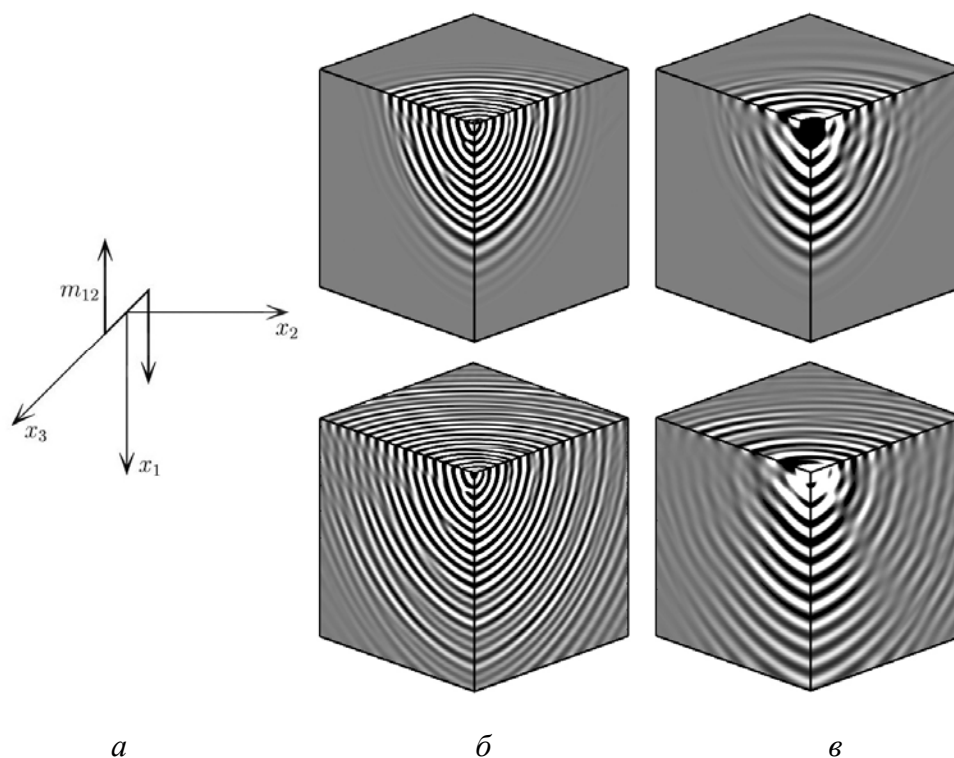


Рис. 4. Схема нагружения (а) и поверхности уровня угловой скорости ω_2 для нерезонансной (б) и резонансной (е) частот в различные моменты времени (вверху – $t = 6,5$ мкс, внизу – $t = 13$ мкс)

Литература

1. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.
2. Садовская О.В. Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 2009. – Т. 49, № 2. – С. 313-322.
3. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des Corps Deformables // Traité de Physique. Ed. O.D. Chwolson. – Paris, 1909. – P. 953-1173.
4. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 401-408.
5. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 391 с.
6. Behura J., Batzle M., Hofmann R., Dorgan J. Heavy oils: their shear story // Geophysics. – 2007. – V. 72, N. 5. – P. E175-E183.
7. Каменецкий В.Ф., Семенов А.Ю. Самосогласованное выделение разрывов при сквозных расчетах газодинамических течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1994. – Т. 34, № 10. – С. 1489-1502.
8. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 607 с.
9. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 405, № 2. – С. 196-198.

Поступила в редакцию 28.10.09

Сведения об авторах:

Садовский Владимир Михайлович, дфмн., зам. дир., Институт вычислительного моделирования СО РАН (ИВМ СО РАН), 660036, Красноярск, Академгородок; E-mail: sadov@icm.krasn.ru;
 Садовская Оксана Викторовна, кфмн, нс, ИВМ СО РАН; E-mail: o_sadov@icm.krasn.ru;
 Варыгина Мария Петровна, мнс, ИВМ СО РАН; E-mail: varyginam@yandex.ru.