УДК 539.3

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОГО КОНТИНУУМА К ПРОБЛЕМЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАТУХАНИЯ В СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В.А. Пальмов

С.-Петербургский государственный политехнический университет, С.-Петербург, Россия

Постулируется существование некоторой несущей среды и предполагается, что эта среда описывается уравнениями классической теории упругости. Далее предполагается, что с каждой точкой несущей среды связано бесконечное количество не взаимодействующих между собой осцилляторов. В результате оказывается, что каждая материальная точка введенной среды состоит всего лишь из одной материальной точки классической теории упругости и связанных с ней осцилляторов. Анализ демонстрирует главное свойство вибрационного поля в этой среде: коэффициент пространственного затухания вибрации имеет конечное значение даже для пренебрежимо малого трения в подвеске осцилляторов. Этот эффект характерен только для модели, в которой учитываются присоединенные осцилляторы. С физической точки зрения он может быть объяснен тем, что подвешенные осцилляторы действуют как динамические поглотители колебаний. Такая модель позволяет определить глобальные свойства поля вибрации сложных инженерных конструкций без учета их несущественных деталей.

Ключевые слова: обобщенный континуум, пространственное затухание, вибрация, механическая система

APPLICATION OF A GENERALIZED CONTINUUM THEORY TO THE PROBLEM OF SPATIAL DAMPING IN COMPLEX MECHANICAL SYSTEMS

V.A. Palmov

St-Petersburg State Polytechnical University, St-Petersburg, Russia

The existence of a certain carrier medium is postulated. It is assumed that the medium is described by the equations of classical elasticity theory. It is further assumed that an infinite number of non-interacting oscillators is attached to each point of the carrier medium. Hence it appears that every material point consists of a single material point of the classical theory of elasticity and the attached oscillators. The analysis shows the main property of the vibratory field in the environment: the coefficient of spatial attenuation of vibration has a finite value even for negligibly small friction in the suspension of oscillators. This effect occurs only for the model that takes into account attached oscillators. From a physical point of view, this effect can be explained by the fact that the suspended oscillators act as dynamic vibration absorbers. This model allows determination of the global properties of the vibratory fields of complex engineering structures without accounting for the non-essential elements of these structures.

Keywords: generalized continuum, spatial damping, vibration, mechanical system

1. Введение

Одна из важных проблем современной техники — это проблема вибрации таких конструкций, как самолеты, поезда, промышленные здания, автомобили, корабли, подводные лодки, ракеты. Прямой подход к этой проблеме, особенно в области высоких частот, очень сложен ввиду большого количества элементов, составляющих конструкцию. Особенностью вибрационных полей таких сложных конструкций является конечное значение пространственного затухания. Этот эффект не может быть объяснен трением, поскольку последнее мало. В данной работе предполагается применить к решению этой проблемы теорию обобщенного континуума.

Теория сред со сложной структурой привлекала много внимания. Простейшей из таких сред является среда Коссера [1]. Теория Миндлина среды с микроструктурой более сложна [2]. Чрезвычайная сложность присуща мультиполярной механике, предложенной Грином и Ривлином [3]. Существенной особенностью всех перечисленных теорий является пересмотр понятия материальной точки. Классическая механика континуума рассматривает среду с простой структурой, в которой материальная точка обладает только тремя трансляционными степенями свободы. В противоположность этому материальная точка в теории Коссера имеет все шесть степеней свободы абсолютно твердого тела. В теории Миндлина каждая точка обладает степенями свободы классического твердого тела с однородной деформацией, то есть двенадцатью степенями свободы. В мультиполярной механике поведение материальной точки определяется большим количеством кинематических параметров. Ниже рассматривается простейшая сплошная среда такого вида.

2. Уравнения динамики континуума со сложной структурой

Постулируем существование некоторой несущей среды и полагаем, что ее поведение описывается уравнениями Ламе классической теории упругости

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}-\rho\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}=0, \tag{1}$$

где ρ — массовая плотность, λ и μ — модули упругости Ламе, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения точек несущей среды, $\mathbf{K}$ — интенсивность внешней массовой силы.

С каждой точкой несущей среды связан бесконечный набор невзаимодействующих осцилляторов с непрерывно распределенными собственными частотами. Уравнение типичного осциллятора имеет вид

$$m(k)\ddot{\mathbf{v}}_k+c(k)[1+R_k\left(\partial/\partial t\right)](\mathbf{v}_k-\mathbf{u}\big)=\mathbf{Q}_k. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{v}_k$ — вектор абсолютного перемещения массы осциллятора, а $\mathbf{Q}_k$ — внешняя сила, приложенная к массе осциллятора. Величина $m(k)dk$ равна массе всех осцилляторов, имеющих собственные частоты, лежащие в интервале $(k,k+dk)$, умноженной на единицу объема. Таким образом, полная массовая плотность всех осцилляторов, присоединенных к несущей среде, вычисляется по формуле:

$$m=\int_0^\infty m(k)dk. \tag{3}$$

Статическая жесткость подвески осцилляторов $c(k)$ дается выражением

$$c(k)=k^2m(k). \tag{4}$$

Величина $R_k\left(\partial/\partial t\right)$ введена в уравнение (2) для того, чтобы учесть диссипацию энергии в подвесе осциллятора. Ниже покажем, что рассмотрение демпфирования абсолютно необходимо для получения физически осмысленных результатов. Демпфирование будет описано с помощью двух реологических моделей, а именно вязкоупругой модели и модели упругопластического материала. В первом случае

$R_k(\partial/\partial t)$ обозначает оператор вязкоупругости, тогда как во втором случае это оператор-гистерезис. В обоих случаях величина, содержащая $R_k(\partial/\partial t)$, принимается малой для всякого движения осциллятора.

Теперь обсудим влияние подвески осциллятора на несущую среду. Сила этого воздействия на единицу объема выражается следующим образом:

$$\mathbf{F} = \int_0^\infty c(k)[1 + R_k(\partial/\partial t)](\mathbf{v}_k - \mathbf{u})dk. \tag{5}$$

Поскольку это объемная сила, она должна быть внесена в уравнение (1). Таким образом, система уравнений, которая описывает динамику образованной среды, принимает вид:

$$\begin{gathered}(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} - \int_0^\infty m(k)\ddot{\mathbf{v}}_k dk + \mathbf{K} + \mathbf{Q} = 0,\\ m(k)\ddot{\mathbf{v}}_k + c(k)[1 + R_k(\partial/\partial t)](\mathbf{v}_k - \mathbf{u}) = \mathbf{Q}_k.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь вектор $\mathbf{Q}$ равен объемной силе, действующей на все осцилляторы:

$$\mathbf{Q} = \int_0^\infty \mathbf{Q}_k(k)dk\ . \tag{7}$$

Граничные условия для введенной среды совпадают с граничными условиями для классической теории упругости, поскольку они относятся только к несущей среде.

Предложенная модель полезна для описания распространения вибрации указанных выше сложных механических систем, поскольку все они имеют первичную несущую среду и присоединенные к ней вторичные системы. В рамках предложенного метода свойства первичной системы представляются уравнениями теории упругости. Подвешенные осцилляторы отражают частотные свойства вторичных систем, присоединенных к несущей среде. Эта модель позволяет выявить глобальные свойства вибрационного поля сложной конструкции без учета необязательных подробностей ее устройства и ее вибрационного поля. Одномерный вариант уравнений (6) предлагается в работе [4], трехмерный — в [5], [6].

3. Исследование бегущих волн

С помощью уравнений (6) можно исследовать любые движения в среде. Однако для простоты ограничимся лишь тремя типичными бегущими волнами: волнами дилатации, волнами сдвига и одномерными продольными волнами. Чтобы исследовать волны дилатации, примем следующее выражение для волнового движения:

$$\mathbf{u} = (\nabla c)\ \exp i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - \omega t).$$

Подставив его в уравнения (6) и исключив $\mathbf{v}_k$, получим следующее представление для волнового числа:

$$n^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}\ \chi^2,$$

где

$$\chi^2 = \rho + \int_0^\infty \frac{c(k)dk}{k^2 - \omega^2/(1+i\psi)}. \tag{8}$$

Для исследования сдвиговых волн примем $\mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{c}) \ \exp i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$ и получим

$$\mathbf{n}^2 = \frac{\omega^2}{\mu}\ \chi^2.$$

Наконец, для случая одномерных продольных волн зададим $\mathbf{u} = \mathbf{c}\ \exp i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$, и результат будет следующий:

$$n^2 = \frac{\omega^2}{E}\ \chi^2,$$

E — модуль Юнга несущей среды.

4. Пространственное затухание бегущих волн

Теперь покажем, что не в первую очередь пространственное затухание вибрации определяется демпфированием в подвеске осцилляторов и остается конечным даже для исчезающе малого демпфирования. Для этого достаточно доказать, что выражение χ^2 остается конечным при $\psi_k \to 0$. Примем для простоты, что демпфирование во всех осцилляторах одинаково, то есть $\psi_k = \psi$ не зависит от параметра k, но может зависеть от частоты ω. Введем комплексную переменную

$$z = \omega/(1+i\psi)^{1/2}. \tag{9}$$

Возьмем лишь ту ветвь радикала в (9), которая принимает значение +1 при $\psi = 0$. Тогда мнимая часть z будет отрицательной для всех частот ω, за исключением $\omega = 0$. При $\psi \to 0$ комплексная величина z приближается к вещественной оси из нижней полуплоскости в плоскости комплексной переменной k. С помощью введенной переменной z перепишем выражение (8) следующим образом:

$$\chi^2 = \rho + \frac{1}{2z}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(|k|)dk}{k - z}. \tag{10}$$

В появившемся здесь интеграле Коши величина z всегда лежит в нижней полуплоскости комплексной переменной k. Когда $\psi \to 0$, комплексная переменная z приближается к вещественной оси k, вдоль которой ведется интегрирование в выражении (10). В соответствии с формулой Сохоцкого–Племеля получим следующий предел при $\psi \to 0$

$$\chi^2 = \rho + \frac{1}{2\omega}\left(-\pi\, i\, c(|\,\omega\,|) + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(|\,k\,|)dk}{k - z}\right). \tag{11}$$

Здесь через v.p. обозначено действительное значение интеграла Коши.

Поскольку мнимая часть в (11) не обращается в нуль, коэффициент пространственного затухания имеет конечную величину даже для исчезающе малого демпфирования в осцилляторах и определяется зависимостью жесткости подвески осцилляторов от их собственных частот. Этот эффект характерен только для модели, в которой учитывается сложная структура среды, то есть наличие подвешенных осцилляторов. С физической точки зрения он может быть объяснен тем, что подвешенные осцилляторы выступают здесь в роли динамических поглотителей колебаний.

Отметим, что учет демпфирования в осцилляторах необходим для определения их собственных амплитуд колебаний. Вторая формула в (6) демонстрирует, что амплитуда колебаний осцилляторов оказывается неограниченной при $\psi \to 0$.

Более сложный анализ показывает, что результат (11) оказывается справедливым и в случае, когда $\psi_k \to 0$, причем ψ_k зависит не только от частоты ω, но и от собственной частоты k. Проиллюстрируем приведенное утверждение частным примером. Положим

$$m(k) = A(\beta^2 + k^2)^{-1}, \quad \psi_k = \psi, \tag{12}$$

где A и β — положительные параметры, а $\psi_k = \psi$ не зависит от k. Подставив (12) в (3) и вычислив интеграл, получим

$$m = A\pi(2\beta)^{-1}. \tag{13}$$

Этот результат позволяет исключить A из всех появляющихся формул, оставляя в них только m и β. Подстановка (12) в (4) и (8) дает интеграл

$$\chi^2 = \rho + \int_0^\infty \frac{Ak^2 dk}{(\beta^2 + k^2)[k^2 - \omega^2 / (1 + i\psi)]}, \tag{14}$$

вычисляя который с помощью теории вычетов, придем к выражению

$$\chi^2 = \rho + m\left(1 + \frac{i\omega}{\beta\sqrt{1 + i\psi}}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Структура этой формулы полностью подтверждает справедливость проведенного выше анализа. Более того, она указывает на слабое влияние ψ.

Этот пример замечателен и по другой причине. Если в уравнении (15) положить $\rho = 0$, $\psi = 0$, то получим

$$n^2 = \frac{\omega^2}{E}\frac{m}{1 + i\omega / \beta}. \tag{16}$$

В точности такое же выражение для волнового числа получается в проблеме линейных продольных вибраций в стержне из материала Кельвина–Фойгта [6].

Таким образом, рассмотренная модель обобщенного континуума обладает следующей интересной особенностью. Несмотря на то, что она строится из высококачественных элементов, таких как идеальная упругая среда и слабо демпфированные осцилляторы, она ведет себя так же, как среда с простой структурой, но с конечным демпфированием. На первый взгляд это заключение кажется парадоксальным. Однако аккуратный анализ показывает, что диссипация энергии имеет конечную величину для малой величины демпфирования осцилляторов, и происходит это благодаря тому, что резонирующие осцилляторы имеют очень большую амплитуду колебаний.

5. Локальные свойства поля вибрации

Итак, выше исследованы глобальные свойства поля вибрации в сложной инженерной конструкции. Эти свойства представляют несомненный интерес, но с практической (инженерной) точки зрения более полезной оказывается информация о вибрации всякого элемента оборудования сложной инженерной конструкции. Проделанный анализ не может дать прямой ответ на этот вопрос, поскольку в таком описании отдельный элемент оборудования совсем отсутствует в уравнениях. Значит, приведенные рассуждения следует усовершенствовать и включить этот конкретный элемент оборудования в моделирующие уравнения.

Для этого выделим элемент и его ближайшее окружение в сложной конструкции и проведем прямое и детальное моделирование этой части конструкции. В модели оставшейся части конструкции используем уравнения непрерывной среды со сложной структурой. Далее сформулируем соответствующие условия на границе между зонами континуального и детального математического описания. Решение сформулированной граничной задачи даст полный ответ на вопрос о поведении конкретного выделенного элемента конструкции.

Чтобы убедиться, что результат будет удовлетворительным, рассмотрим последовательность граничных задач с увеличивающейся шаг за шагом зоной прямого математического моделирования окрестности рассматриваемого элемента конструкции. И когда зона прямого математического описания охватит всю инженерную конструкцию, получим точный результат о колебаниях интересующего элемента. Однако этот результат, несомненно, будет тем же, что и в случае малого размера зоны.

Литература

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des Corps Deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
2. *Миндлин, Р.Д.* Микроструктура в линейной упругости // Механика / Сб. переводов. – М.: Мир. – 1964. – Т. 16, № 4.– С. 129-160.
3. *Green A.E., Rivlin R.S.* Simple force and stress multipoles // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – V. 16, N 5. – P. 325-353.
4. *Слепян Л.И.* Волна деформаций в стержне с амортизированными массами // Инж. журн. МТТ. – 1967. – № 5. – С. 34-40.
5. *Пальмов В.А.* Об одной модели среды со сложной структурой // ПММ. – 1969. – Т. 33, №4 – С. 768-773.
6. *Пальмов В.А.* Колебания упругопластических тел. – М: Наука, 1976. – 328 с.

Поступила в редакцию 01.12.09

Сведения об авторе:

Пальмов Владимир Александрович, дфмн, проф., зав. каф., С.–Петербургский государственный политехнический университет, 195251, С.-Петербург, Политехническая, 29;
E-mail: palmov@compmech.stu.neva.ru