УДК 536.75

ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Г.А. Максимов

Акустический институт им. академика Н.Н. Андреева, Москва, Россия.

В работе представлена формулировка обобщенного вариационного принципа для диссипативных гидродинамических и механических систем в виде суммы вариационных принципов Гамильтона и Онзагера в терминах смещений механического и температурного полей. В этом случае система уравнений диссипативной гидродинамики соответствует уравнениям движения механического и температурного полей, получаемых из условия стационарности действия, построенного на лагранжиане в виде разности кинетической и свободной энергий, а также интеграла по времени от диссипативной функции с квадратичными формами всех слагаемых.

Ключевые слова: вариационные принципы, диссипативные процессы, гидродинамическое описание, диссипативная механика сплошных сред

GENERALIZED VARIATIONAL PRINCIPLE IN DISSIPATIVE HYDRODYNAMICS AND CONTINUUM MECHANICS

G.A. Maximov

Andreyev Acoustics Institute, Moscow, Russia

A formulation of the generalized variational principle for dissipative hydrodynamics and continuum mechanics is presented as a sum of the Hamilton and Onsager variational principles in terms of displacement of mechanical and heat fields. In this case, the dissipative hydrodynamic system corresponds to the motion equations of mechanical and heat fields derived from the extreme condition for action with a Lagrangian density in the form of the difference between the kinetic energy and the free energy minus the time integral of the dissipation function with quadratic forms of all terms.

Key words: variational principles, dissipative processes, hydrodynamic description, dissipative continuum mechanics

1. Введение

Система уравнений гидродинамики вязкой теплопроводящей жидкости обычно выводится исходя из законов сохранения массы, импульса и энергии [1]. При этом делаются определенные предположения о виде тензора вязких напряжений и векторе плотности потока энергии. Указанная система уравнений рассматривается в настоящее время как вполне адекватно описывающая большую совокупность экспериментально подтверждаемых гидродинамических явлений. Однако имеется ряд моментов, которые заставляют рассматривать эту систему как приближенную.

Например, при обсуждении распространения малых возмущений, описываемых такой системой, формально можно выделить продольную и две поперечные акустические волны, а также температурную или энтропийную волну. Причем взаимодействие продольной и температурной волн обуславливает их расщепление на независимые акустическую (термоакустическую) и тепловую (акустотермическую) моды. Кроме этого оказывается, что в пределе высоких частот скорости распространения всех волн стремятся к бесконечности, что противоречит реальности, в которой скорости распространения любых возмущений конечны. В этом случае можно говорить, что система уравнений гидродинамики является лишь низкочастотным приближением к адекватному описанию гидродинамических явлений. Так, в частности, учет релаксации вязкости [2] позволяет получить конечную скорость распространения поперечной моды, а учет релаксации теплового потока [3–5] — конечные скорости распространения акустической (термоакустической) и тепловой (акустотермической) мод.

Однако введение в математическую модель таких релаксационных процессов требует, по крайней мере, серьезной мотивировки, особенно, если требуется написать соответствующую систему уравнений в более сложных случаях, например, при наличии у среды внутренних степеней свободы, как, например, у многофазных и многокомпонентных сред.

Вместе с тем, в классической механике существует лагранжев формализм, который позволяет легко получать уравнения движения механической системы, зная вид ее кинетической и потенциальной энергий, из разности которых и строится функция Лагранжа. Этот же подход легко переносится в механику сплошной среды введением плотности лагранжиана при отсутствии в рассматриваемой среде диссипации. Если возникает необходимость в учете диссипативных сил, то, согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера [6], в соответствующие уравнения движения добавляются производные от диссипативной функции, Но при этом распространено мнение, что для диссипативных систем нельзя сформулировать вариационный принцип, аналогичный принципу наименьшего действия Гамильтона [6]. В то же время имеются успешные подходы, которые применяют вариационные принципы в теории теплопроводности и неравновесной термодинамике, где явно учитываются диссипативные процессы [7–13]. Сюда же следует отнести и термодинамический подход Мандельштама–Леонтовича [14], который также оперирует с термодинамическими силами как с обычными.

Таким образом, существует потребность в формулировке вариационного принципа, который бы обобщал принцип наименьшего действия Гамильтона на диссипативные системы, несмотря на прочно сформировавшееся мнение об отсутствии такой возможности [1].

В данной работе показано, что такой вариационный принцип может быть сформулирован в терминах смещений механического и температурного полей [15].

2. Вариационный принцип Гамильтона

Действительно, для сплошной среды в отсутствие диссипации вариационный принцип Гамильтона может быть сформулирован виде экстремальности функционала действия S ($\delta S = 0$), являющегося интегралом по времени между его начальным t_1 и конечным t_2 моментами и по объему V, занимаемому средой:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d\vec{\mathbf{r}} L\,, \tag{1}$$

где по аналогии с механикой плотность лагранжиана L представляется в виде разности плотностей кинетической C и потенциальной U энергий:

$$L(\dot{\vec{u}}, \nabla\vec{u}) = C(\dot{\vec{u}}) - U(\nabla\vec{u})\,, \tag{2}$$

то есть плотность лагранжиана рассматривается как функция скоростей смещений $\dot{\vec{u}} = \partial\vec{u}/\partial t$ и деформаций $\nabla\vec{u} = \operatorname{div}\vec{u}$.

Уравнения движения, которые получаются из вариационного принципа (1), (2), имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{u}}} + \nabla\frac{\partial L}{\partial\nabla\vec{u}} = 0 . \tag{3}$$

В простейшем случае упругой среды, когда кинетическая и потенциальная энергии определяются квадратичными формами

$$2C(\dot{\vec{u}}^2) = \rho_0\dot{\vec{u}}^2 , \qquad 2U(\varepsilon_{ik}) = \lambda\varepsilon_{ll}^2 + 2\mu\varepsilon_{ik}^2 , \qquad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \tag{4}$$

где через ρ_0 обозначена плотность среды, λ и μ — ее коэффициенты Ламе, а ε_{ik} — тензор деформаций, получается хорошо известное уравнение движения упругой среды [2]

$$\rho_0\frac{d}{dt}\dot{\vec{u}} - \mu\Delta\vec{u} - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}(\vec{u}) = 0 . \tag{5}$$

3. Вариационный принцип Онзагера

Далее, если рассматривать только слабо неравновесные термодинамические системы, то для них Онзагером сформулирован вариационный принцип наименьшей диссипации энергии [7–8]. Принцип основывается на симметрии кинетических коэффициентов и может быть записан в виде экстремальности функционала, построенного как разность скорости приращения энтропии $\dot{s}$ и диссипативной функции D, рассматриваемых, соответственно, как функции процессов термодинамической релаксации α и их скоростей $\dot{\alpha}$:

$$\delta_{\dot{\alpha}}\left[\dot{s}(\alpha) - D(\dot{\alpha})\right] = 0 . \tag{6}$$

Кинетические уравнения, получаемые из вариационного принципа (6) и описывающие приближение термодинамической системы к равновесию, могут быть записаны в форме

$$\frac{\partial\dot{s}(\alpha)}{\partial\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\dot{\alpha}}D(\dot{\alpha}) , \qquad \frac{d}{dt}s(\alpha) = 2D(\dot{\alpha}) \tag{7}$$

и удовлетворяют принципу симметрии кинетических коэффициентов [6–8].

4. Вариационный принцип для механических систем с диссипацией

Как отмечалось выше, обобщение уравнений движения (3) при наличии диссипации производится за счет добавки к его правой части производной от диссипативной функции по скоростям, что находится в соответствии с принципом симметрии кинетических коэффициентов Онзагера [6]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}} + \nabla \frac{\partial L}{\partial \nabla \vec{u}} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\vec{u}}}. \tag{8}$$

Такой способ введения диссипации в уравнения движения удовлетворяет только принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера и никак не опирается на исходный вариационный принцип Гамильтона, на основе которого получено уравнение движения в бездиссипативном случае. Более того, в [6] на стр. 448 имеется утверждение о невозможности такой принцип сформулировать: «Поскольку внутреннее движение атомов тела зависит не только от движения тела в данный момент времени, но и от предыдущей истории этого движения, в уравнения движения будут, вообще говоря, входить не только макроскопические координаты тел и их первые и вторые производные по времени, но и все производные высших порядков (точнее некоторый интегральный оператор от координат). Функции Лагранжа для макроскопического движения системы при этом, конечно, не существует, и уравнения движения в различных случаях будут иметь совершенно различный характер».

Можно, однако, показать, что уравнения движения в форме (8) получаются из вариационного принципа Гамильтона с функцией Лагранжа в виде следующего обобщения:

$$L(\dot{\vec{u}}, \nabla \vec{u}) = C(\dot{\vec{u}}) - U(\nabla \vec{u}) - \int_0^t D(\dot{\vec{u}})dt', \tag{9}$$

где в отличие от (2) добавлено слагаемое в виде интеграла по времени от диссипативной функции. Но следует обратить внимание на то, что в таком подходе при вариации диссипативного члена возникает дополнительное слагаемое, которое приходится искусственно отбрасывать. Действительно, варьируя последнее слагаемое в (9), для его вариации получаем выражение

$$\delta\int_0^t D(\dot{\vec{u}})dt' = \int_0^t \frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}}\delta\dot{\vec{u}}\,dt' = \int_0^t \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}}\delta\vec{u}\right)dt' - \int_0^t \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}}\right)\delta\vec{u}dt'.$$

Если теперь пренебрежем последним слагаемым

$$\delta\int_0^t D(\dot{\vec{u}}(t'))dt' = \frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}}\delta\vec{u}(t) - \int_0^t \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}}\right)\delta\vec{u}dt' \approx \frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}}\delta\vec{u}(t),$$

то в результате имеем как раз то дополнение $\frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}}$, которое для учета диссипации приходится искусственно вводить в уравнение движения (8). С одной стороны, такой подход можно рассматривать как некое правило при вариации интегрального слагаемого, поскольку оно приводит к нужному виду уравнения движения, но не простым добавлением дополнительного слагаемого, как это предлагается делать обычно, а на основе сформулированного вариационного принципа. С другой стороны, подход может иметь следующее обоснование. Если проварьировать все члены в лагранжиане (9), то вариация действия с учетом фиксирования начальных и граничных условий запишется в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int dV \left\{ \left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial C(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}} + \nabla \frac{\partial U(\nabla \vec{u})}{\partial \nabla \vec{u}} - \frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}} \right) \delta \vec{u} + \int_0^t \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}} \right) \delta \dot{\vec{u}} dt' \right\}.$$

После обнуления коэффициента при произвольной вариации $\delta\vec{u}$ получаем требуемый вид уравнения движения с учетом диссипации. Строгому выводу в данном случае мешает дополнительное слагаемое, содержащее вариацию $\delta\dot{\vec{u}}$ под интегралом. Однако при записи первого слагаемого в форме такого же интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int dV \int_0^t dt' \left\{ \delta(t-t') \left(-\frac{d}{dt'}\frac{\partial C(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}} + \nabla \frac{\partial U(\nabla \vec{u})}{\partial \nabla \vec{u}} - \frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}} \right) + \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}} \right) \right\} \delta \vec{u},$$

опять-таки ввиду произвольности вариации $\delta\vec{u}$, должен обнуляться множитель в фигурных скобках. Теперь нетрудно заметить, что если функция $\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial D(\dot{\vec{u}})}{\partial \dot{\vec{u}}}\right)$ не является сингулярной в точке $t' = t$, то, по сравнению с сингулярным вкладом от дельта-функции, ее вкладом можно пренебречь. Приведенные рассуждения могут рассматриваться в качестве обоснования правила вариации интегрального слагаемого.

В частности, на основе вариационного принципа с функцией Лагранжа (9), легко получается линеаризованное уравнение Навье–Стокса. Диссипативную функцию в этом случае нужно рассматривать как квадратичную форму скоростей деформации

$$D(\nabla \dot{\vec{u}}) = \eta' \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right)^2 + \varsigma' \left(\frac{\partial \dot{u}_l}{\partial x_l} \right)^2, \tag{10}$$

и тогда уравнение движения с учетом (4) полностью соответствует линеаризованному уравнению Навье–Стокса

$$\rho \frac{d}{dt}\dot{\vec{u}} - (\lambda + \mu)\Delta \vec{u} - \lambda \,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}(\vec{u}) = \eta \Delta \dot{\vec{u}} + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \mathrm{grad}\,\mathrm{div}(\dot{\vec{u}}). \tag{11}$$

Коэффициенты η' и ς' квадратичной формы (10) связаны с обычно используемыми коэффициентами объемной ς и сдвиговой η вязкости следующими соотношениями:

$$\varsigma' = \varsigma + \frac{\eta}{3}, \qquad \eta' = \frac{2}{3}\eta - \varsigma.$$

5. Обобщенный вариационный принцип для диссипативной гидродинамики

Приведенный выше пример с выводом уравнений движения диссипативных систем на основе вариационного принципа Гамильтона с функцией Лагранжа (10) показывает, что возможна формулировка обобщенного вариационного принципа для диссипативных гидродинамических систем. Она получается путем простого объединения (сложения) вариационного принципа Гамильтона (1), (2) и вариационного принципа Онзагера (6) при условии, что последний проинтегрирован по времени и умножен на температуру. Действительно, если соотношение (6) проинтегрируем по времени и умножим на температуру, получим выражение

$$T\left[s-\int_0^t D dt'\right]. \tag{12}$$

В этом случае плотность лагранжиана может быть записана как разность кинетической C и внутренней E энергий плюс выражение (12):

$$L = C - E + T\left[s-\int_0^t D dt'\right]. \tag{13}$$

Далее, с учетом свободной энергии F ($F = E - Ts$), функция Лагранжа может быть записана в окончательном виде

$$L = C - F - T\int_0^t D dt', \tag{14}$$

который структурно эквивалентен выражению (9) с той лишь разницей, что вместо потенциальной энергии сюда входит свободная энергия и интеграл от диссипативной функции умножен на температуру.

Сам обобщенный вариационный принцип формулируется так же, как и принцип Гамильтона, а именно: пусть рассматриваемая масса сплошной диссипативной среды занимает в моменты времени t_1 и t_2 объемы, ограниченные поверхностями σ_1 и σ_2, тогда из всех возможных траекторий движения сплошной среды реализуется такая, которая доставляет экстремум действию

$$\delta S = 0, \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d\vec{r} L, \tag{15}$$

построенному на лагранжиане (14).

Как видно, в рамках такого подхода для бездиссипативных систем получается обычный вариационный принцип Гамильтона (1), (2), а для неподвижных термодинамических систем — принцип минимальной диссипации Онзагера (6). Для диссипативных гидродинамических систем, как показано в предыдущем пункте, также получаются уравнения желаемого вида, в частности, линеаризованное уравнение Навье–Стокса.

6. Независимые переменные

После формулировки обобщенного вариационного принципа в форме (14) требуется пояснить, относительно каких переменных должна быть записана функция Лагранжа. Для этого обратимся к гидродинамическим уравнениям [1] и посмотрим, в каких переменных они записываются.

В отсутствие диссипации такими переменными являются скорость, плотность, давление и энтропия: $\vec{v}, \rho, P, s$. Поскольку в бездиссипативном случае энтропия какой-либо материальной точки считается постоянной $s = \mathrm{const}$, то давление можно рассматривать как функцию только плотности $P(\rho)$. Плотность же данной массы среды выражается в терминах относительного изменения занимаемого ею объема и, следовательно, может быть выражена через дивергенцию поля смещений $\rho = \rho(\operatorname{div}\vec{u})$. В частности, линеаризация уравнения непрерывности приводит к соотношению

$$\rho = \rho_0(1 - \operatorname{div}\vec{u}), \tag{16}$$

а скорость, по определению, является производной по времени от смещения

$$\vec{v} = \dot{\vec{u}}.$$

Таким образом, в бездиссипативном случае в качестве основной гидродинамической переменной можно выбрать поле смещений $\vec{u}$.

При наличии диссипации помимо упомянутых переменных $\vec{v}$, ρ, P, s в уравнения гидродинамики также входит температура T. Если в соответствии с уравнением состояния давление и энтропию рассматривать как функции плотности и температуры $P(\rho,T)$, $s = s(\rho,T)$, то теперь основными гидродинамическими переменными можно считать поля смещений и температур: $\vec{u}$, T.

Далее воспользуемся идеей, высказанной Био [12], и вместо температуры в качестве независимой переменной возьмем потенциал, названный Био полем тепловых смещений $\vec{u}_T$. Дивергенция потенциала определяет температуру, которая по аналогии с (16) представляется как

$$T = T_0(1 - \theta \operatorname{div}\vec{u}_T), \tag{17}$$

где для дальнейшего удобства записи диссипативной функции введен безразмерный нормирующий множитель θ. Таким образом, дивергенция поля температурных смещений $\vec{u}_T$ определяет отклонение температуры от ее равновесного значения

$$\theta \operatorname{div}\vec{u}_T = (T - T_0)/T_0.$$

Для того чтобы понять смысл введенного потенциала, посмотрим на переменные, которыми описываются гидродинамические уравнения с точки зрения усредненного описания ансамбля частиц.

7. Связь гидродинамического описания с механикой частиц

С молекулярно-кинетической точки зрения гидродинамические уравнения представляют собой усредненное движение больших ансамблей взаимодействующих частиц как некоторых материальных точек, выраженное в терминах низших моментов скоростей. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N взаимодействующих частиц. Такая система обладает полными интегралами движения: сохраняются масса, импульс, момент импульса и энергия:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i, \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i, \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{v}_i, \vec{r}_i\right], \quad E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j,i\neq j}^{N} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j);$$

здесь m_i и $\vec{v}_i$ — масса и скорость i-й частицы, $\vec{r}_i$ — ее координата, а $U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ — энергия взаимодействия частиц. Если для простоты рассуждений не принимать во внимание сохранение полного момента импульса, учет которого приводит к континууму Коссера, то, выделяя из скорости каждой частицы среднюю $\vec{v}$ и случайную $\vec{v}'$ компоненты, согласно соотношениям

$$\vec{v} = \vec{P}/M , \qquad \vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}' , \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = 0 ,$$

кинетическую энергию ансамбля частиц можно представить как сумму кинетической энергии упорядоченного и неупорядоченного (случайного) движений:

$$C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v} + \vec{v}_i'\right)^2 = M\frac{\vec{v}^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 = C(\vec{P}) + \frac{3}{2} NT .$$

Последняя, согласно молекулярно-кинетической теории газов, соответствует температуре (точнее $\frac{3}{2}NT$), если среда находится в состоянии термодинамического равновесия. Таким, образом, полную энергию системы частиц можно представить как сумму кинетической энергии упорядоченного движения и внутренней энергии

$$E = C(\vec{P}) + e(T,V) .$$

Следовательно, внутренняя энергия ансамбля частиц состоит из суммы энергии неупорядоченного движения (тепловой) и потенциальной энергии взаимодействия частиц

$$e(T,V) = \frac{3}{2} NT + \frac{1}{2} \sum_{i,j,i\neq j}^{N} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) .$$

Далее, поскольку полная энергия и кинетическая энергия упорядоченного движения являются интегралами движения, то и внутренняя энергия также представляет собой интеграл движения.

Таким образом, переход от механического описания ансамбля частиц к гидродинамическому описанию сплошной среды можно провести следующим образом: разобьем весь объем V_0, занимаемый средой, на малые части $\{\Delta V_k\}$ так, чтобы их количество стремилось к бесконечности, сохраняя одновременно большое число частиц n внутри каждого объема:

$$\Delta V_k = V_0 / n \to 0, \quad n \to \infty , \qquad V_0 = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k .$$

Тогда у каждого такого объема будут следующие интегралы движения:

$$\Delta V_k \Rightarrow M_k ,\ \vec{P}_k ,\ e_k(T_k, \Delta V_k) .$$

Рассматривая далее каждый объем в пределе ($\Delta V_k \to 0$) как материальную точку и вводя переменные плотности, скорости, температуры и внутренней энергии для каждой такой точки в соответствии с соотношениями

$$\rho = M_k / \Delta V_k, \qquad \vec{v} = \vec{P}_k / M_k, \qquad T = T_k, \qquad e = e_k(T_k, \Delta V_k) / \Delta V_k,$$

получим хорошо известную модель сплошной среды.

Заметим, что в данных рассуждениях фактически никак не использовалось представление о термодинамическом равновесии, за исключением интерпретации кинетической энергии неупорядоченного движения как температуры.

Из выше сказанного следует, что для усредненного гидродинамического описания, учитывающего основные законы сохранения ансамблей частиц, достаточно описания в терминах полного импульса (или средней скорости упорядоченного движения), температуры (которая соответствует кинетической энергии неупорядоченного движения) и объема, занимаемого ансамблем частиц (этим объемом определяется средняя потенциальная энергия взаимодействия частиц за некоторый промежуток времени). Средняя скорость $\vec{v}$ и изменение объема V, занимаемого ансамблем частиц, могут быть выражены в терминах среднего смещения $\vec{u}$ материальных точек, образуемых этими ансамблями внутри сплошной среды: $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$, $V = V_0(1 + \operatorname{div} \vec{u})$. Поскольку интегралом движения является внутренняя энергия ансамбля частиц как сумма тепловой энергии и потенциальной энергии взаимодействия, то и тепловая энергия, подобно потенциальной, есть функция того же объема V. Такой результат получается при достаточно большом времени усреднения, когда можно говорить о некотором установившемся характере случайного движения внутри ансамбля. Процесс установления движения характеризуется тем, что в какие-то моменты времени относительно большей оказывается потенциальная энергия взаимодействия частиц, а в какие-то моменты — тепловая энергия, и, по сравнению с установившимся движением, большим или меньшим становится эффективный объем, занимаемый ансамблем. С изменением величины эффективного объема и можно связать приближение ансамбля частиц к термодинамическому равновесию.

Эти рассуждения становятся еще более наглядными, если говорить не о физическом объеме, занимаемым ансамблем частиц, а о его фазовом объеме. Для замкнутых гамильтоновых систем фазовый объем является интегралом движения, и тогда термодинамическая неравновесность ансамбля может рассматриваться как колебания фазовой капли с сохранением ее объема. Состоянию термодинамического равновесия ансамбля в такой картине соответствует фазовая капля с постоянной формой ее объема. Поскольку сумма тепловой и потенциальной энергий как интеграл движения должна быть постоянной, то в качестве меры неравновесности можно рассматривать отклонение объема, занимаемого ансамблем, от его равновесного значения и представить плотность тепловой части энергии в виде (17). Очевидно, что в состоянии термодинамического равновесия должно быть

$$\dot{\vec{u}}_T = \dot{\vec{u}}. \tag{18}$$

Следует заметить, что нормирующий множитель θ введен в (17) намеренно, чтобы обеспечить равенство (18).

8. Вариационный принцип. Термодинамические диссипативные системы

Таким образом, в распоряжении имеются два независимых поля — поля средних скоростей и их дисперсий (температур), в терминах которых и попытаемся сформулировать вариационный принцип. При этом в качестве базовых переменных выберем поле средних смещений $\vec{u}$ и поле так называемых тепловых смещений $\vec{u}_T$.

Согласно общему подходу, функцию Лагранжа (14) будем рассматривать как функцию двух указанных полей смещений $\vec{u}$ и $\vec{u}_T$

$$L(\dot{\vec{u}},\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}_T)=C(\dot{\vec{u}})-F(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}_T)-T_0\int_0^t D(\dot{\vec{u}},\dot{\vec{u}}_T)dt'\,. \qquad (19)$$

В этом случае уравнения движения, получаемые вариацией действия с функцией Лагранжа (19), представляются в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial C}{\partial\dot{\vec{u}}}-\nabla\frac{\partial F}{\partial\nabla\vec{u}}=-T_0\frac{\partial D}{\partial\dot{\vec{u}}}\;, \qquad (20)$$

$$T_0\frac{\partial D}{\partial\dot{\vec{u}}_T}-\nabla\frac{\partial F}{\partial\nabla\vec{u}_T}=0\;. \qquad (21)$$

При этом кинетическая энергия среднего движения является квадратичной функцией средних скоростей

$$2C(\dot{\vec{u}})=\rho_0\dot{\vec{u}}^2\,,$$

свободная энергия в окрестности состояния термодинамического равновесия имеет минимум и, следовательно, представляется стандартной квадратичной формой, используемой в термоупругости [2]

$$2F(\nabla\vec{u},T)=2\mu\varepsilon_{ik}^2+\lambda\varepsilon_{ll}^2+2\tilde{\alpha}\varepsilon_{ll}\left(\frac{T-T_0}{\theta T_0}\right)+\tilde{\kappa}\left(\frac{T-T_0}{\theta T_0}\right)^2, \qquad (22)$$

а диссипативная функция должна быть квадратичной формой скоростей, обращающейся в ноль в состоянии термодинамического равновесия. Учитывая условие (18), запишем диссипативную функцию в виде квадрата разности скоростей массового и теплового смещений:

$$2D(\dot{\vec{u}},\dot{\vec{u}}_T)=\beta(\dot{\vec{u}}-\dot{\vec{u}}_T)^2\,. \qquad (23)$$

Заметим, что безразмерный параметр θ вводится в определение потенциала теплового смещения $\theta\,\mathrm{div}\,\vec{u}_T=(T-T_0)/T_0$ специально для того, чтобы запись диссипативной функции выглядела симметричной. В выражении (22) через $\tilde{\alpha}$ обозначен коэффициент, пропорциональный коэффициенту теплового расширения α, а последнее слагаемое с коэффициентом $\tilde{\kappa}$ в термоупругости обычно опускается.

Вариация действия с лагранжианом (19) по двум независимым полям смещений $\vec{u}$ и $\vec{u}_T$ при учете (22) и (23) приводит к следующим уравнениям движения этих полей:

$$\rho_0\frac{d}{dt}\dot{\vec{u}}-\mu\Delta\vec{u}-(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}(\vec{u})-\tilde{\alpha}\,\mathrm{grad\,div}(\vec{u}_T)=\beta(\dot{\vec{u}}_T-\dot{\vec{u}})\,, \qquad (24\text{ a})$$

$$\beta(\dot{\vec{u}}_T-\dot{\vec{u}})-\tilde{\kappa}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u}_T=\tilde{\alpha}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u}\,. \qquad (25\text{ a})$$

Если выразим правую часть уравнения (24 а) через уравнение (25 а), а от самого уравнения (25 а) возьмем дивергенцию и запишем дивергенцию теплового смещения через температуру (17), то получим обычную форму записи уравнений движения термоупругой среды в терминах поля смещений и температур:

$$\rho_0 \frac{d}{dt}\dot{\vec{u}} - \mu\Delta\vec{u} - (\lambda + \mu + \tilde{\alpha})\,\mathrm{graddiv}(\vec{u}) = (\tilde{\alpha} + \tilde{\kappa})/(\theta T_0)\,\mathrm{grad}\,T\,; \tag{24 б}$$

$$\beta(\dot{T} - T_0\theta\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{u}}) - \tilde{\kappa}\,\Delta T = \tilde{\alpha}\,T_0\theta\,\Delta\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,. \tag{25 б}$$

9. Сравнение вариационной и гидродинамической систем уравнений

Коэффициенты квадратичных форм в выражениях (22), (23) могут быть определены на основе сравнения системы уравнений (24 б), (25 б) с аналогичной системой, которая получается из гидродинамических уравнений [1] путем их линеаризации в переменных $\vec{u}, T$. В этих переменных линеаризованная система гидродинамических уравнений имеет вид:

$$\rho = \rho_0(1 - \mathrm{div}\,\vec{u})\,,$$

$$\rho_0 \frac{d^2\vec{u}}{d\,t^2} - \rho_0 c_0^2 \Delta\vec{u} = -\rho_0\alpha\nabla T + \eta\Delta\dot{\vec{u}} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\mathrm{grad\ div}\left(\dot{\vec{u}}\right), \tag{26 а}$$

$$\rho_0 C_V \frac{dT}{dt} + \rho_0 T_0 \alpha\nabla\dot{\vec{u}} - \kappa\Delta T' = 0\,, \tag{26 б}$$

где через c_0 обозначена изотермическая скорость звука, через C_V — теплоемкость среды при постоянном объеме, а через κ — коэффициент теплопроводности среды.

В отсутствие вязкости $\eta = 0$, $\varsigma = 0$, которая не учитывалась в диссипативной функции (23) при выводе уравнений (24), структура уравнений (25) практически совпадает со структурой второго и третьего уравнений системы (26). Различие, которое обсудим чуть позже, заключается лишь в дополнительном по сравнению с (26 б) слагаемом в правой части (25 б). Прямое сравнение коэффициентов уравнений (25) и (26) позволяет выразить в явном виде параметры квадратичных форм (22), (23) через известные параметры следующим образом:

$$\lambda + 2\mu = \rho_0 c_0^2 \gamma\,, \qquad \tilde{\kappa} = \rho_0 c_0^2\left(\gamma^2 - 1\right), \qquad \tilde{\alpha} = \rho_0 c_0^2\left(\gamma - 1\right), \tag{27}$$

$$\beta = \frac{\rho_0 c_0^2}{\chi}\left(\gamma^2 - 1\right), \qquad \theta = -\frac{\gamma - 1}{\alpha T_0}\,.$$

Здесь γ — отношение теплоемкостей $\gamma = C_P / C_V$; χ — коэффициент температуропроводности $\chi = \kappa / \rho_0 C_V$.

Теперь остановимся на дополнительном слагаемом правой части (25 б). Это слагаемое оказывается пропорциональным лапласиану плотности или давления и присутствовало бы в уравнении (26 б), если бы в законе Фурье вектор плотности потока тепловой энергии был пропорционален не только градиенту температуры, но и градиенту давления или плотности. Этот вопрос обсуждается в монографии [1] (см. стр. 274-275). Основной аргумент против такого слагаемого заключается в том, что «…производная от энтропии по времени не была бы в этом случае существенно положительной, что невозможно... Действительно, при наличии градиентов в энтропии появляются, вообще говоря, связанные с ними дополнительные члены …(например, член пропорциональный скаляру $\operatorname{div}\vec{v}$). Такие члены неизбежно могли бы принимать как положительные, так и отрицательные значения. Между тем они должны быть существенно отрицательными, так как равновесное значение энтропии является максимально возможным. Поэтому разложение энтропии по степеням малых градиентов может содержать (помимо нулевого члена) лишь члены, начиная со второго порядка».

В связи с приведенной выше цитатой, во-первых, следует отметить, что уравнение (25 б) является уравнением движения поля тепловых смещений, в то время как уравнение (26 б) есть линеаризация уравнения баланса энергии в энтропийной форме, которое при наличии вариационного принципа само должно быть всего лишь интегралом движения для системы уравнений движения (39).

Во-вторых, несмотря на приведенное выше утверждение, анализ интегралов движения системы уравнений (24), (25), который выходит за рамки данной статьи, показывает, что никаких противоречий с возрастанием энтропии не возникает: с тем коэффициентом, с которым $\operatorname{div}\vec{u}$ стоит в правой части выражения (25 б), приращение энтропии всегда оказывается положительным. К тому же анализ показывает, что плотность потока тепловой энергии оказывается пропорциональной градиенту энтропии и, уже как следствие, содержит слагаемые, пропорциональные градиентам температуры и плотности (или давления). В силу своего эмпирического происхождения закон Фурье отражает лишь основную часть явления, не учитывая менее значимые его черты. В частности, экспериментальным путем практически невозможно создать в квазиравновесной среде градиент температуры, не создав одновременно градиент плотности или давления.

Следует также отметить, что в последнее время появился ряд работ [16–17], в которых из других соображений обосновывается необходимость введения в стандартные уравнения гидродинамики (в уравнение баланса энергии в энтропийной форме) дополнительного слагаемого как раз такого вида, как в (25 б). Более того, при более детальных вычислениях такое же слагаемое появляется для вектора плотности потока энергии и в кинетической теории газов, основанной на уравнении Больцмана [18–19].

Таким образом, предложенный обобщенный вариационный принцип для диссипативной гидродинамики и механики сплошной среды позволяет не только вывести известные уравнения диссипативной гидродинамики, но также и уточнить их, естественным образом включив поправки, уточняющие обычный закон Фурье для плотности теплового потока.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-02-00927_а) и Международного научно-технического центра (проект № 3691).

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. – М.: Наука, 1988. – Т. VI. Гидродинамика. — 736 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. – М.: Наука, 1987. – Т. VII. Теория упругости. – 248 с.
3. *Deresiewicz H.* Plane wave in a termoelastic solids // J. Acoust. Soc. Am. – 1957. – V. 29. – P. 204-209.
4. *Nettleton R.E.* Relaxation theory of thermal conduction in liquids // Phys. Fluids. – 1960. – V. 3. – P. 216-223.
5. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика – М.: Наука, 1964. – Т. V. Статистическая физика. – 568 с.

7. *Onsager L.* Reciprocal relations in irreversible process I // Phys. Rev. – 1931. – V. 37. – P. 405-426
8. *Onsager L.* Reciprocal relations in irreversible process II // Phys. Rev. – 1931. – V. 38. – P. 2265-2279.
9. *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. – М.: Мир, 1966. – 136с.
10. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.: Мир, 1973. – 280с.
11. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные методы. – М.: Мир, 1974. – 404 с.
12. *Био М*. Вариационные принципы в теории теплообмена. – М.: Энергия, 1975. – 210с.
13. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448с.
14. *Мандельштам Л.И., Леонтович М.А. К теории поглощения звука в жидкостях // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7, № 3. – С. 438-444.*
15. *Максимов Г.А.* О вариационном принципе в диссипативной гидродинамике: Препр. 006-2006 / МИФИ. – М., 2006. – 36с.
16. *Мартынов Г.А.* Гидродинамическая теория распространения звуковых волн // ТМФ. – 2001. – Т. 129, № 1 – С. 140-152.
17. *Мартынов Г.А.* Общая теория распространения звуковых волн в жидкостях и газах // ТМФ. – 2006, Т. 146, № 2. – С. 340-352.
18. *Жданов В.М., Ролдугин В.И.* Неравновесная термодинамика и кинетическая теория разреженных газов // УФН. – 1998. – Т. 168, № 4. – С. 407-439.
19. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика открытых систем. – Москва: Янус, 1995. – Т. 1– 623с.

Поступила в редакцию 23.10.09

Сведения об авторе:

Максимов Герман Адольфович, кфмн, внс, Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева, 117036, Москва, ул. Шверника, д.4; E-mail: gamaximov@gmail.com