

УДК 539.3.01

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В РАМКАХ КОНТИНУУМА КОССЕРА КАК ОСНОВА ДЛЯ ПОСТАНОВКИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОБНАРУЖЕНИЮ МОМЕНТНЫХ ЭФФЕКТОВ В МАТЕРИАЛАХ

В.В. Корепанов, М.А. Кулеш, В.П. Матвеевко, И.Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Осуществлен целенаправленный анализ аналитических и численных решений статических задач в рамках континуума Коссера для установления эффектов проявления моментных свойств материалов. Определены макропараметры и меры их отклика на эти свойства. Найдены решения, обладающие наибольшей информативностью в отношении проявления моментных свойств. На базе этих решений разработан и осуществлен эксперимент по регистрации проявления моментных свойств материала.

Ключевые слова: континуум Коссера, аналитические и численные решения, экспериментальное определение параметров

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS IN THE CONTEXT OF COSSERAT CONTINUUM AS THE BASIS FOR EXPERIMENTS ON DETECTION OF COUPLE-STRESS EFFECTS IN MATERIALS

V.V. Korepanov, M.A. Kulesh, V.P. Matveenko and I.N. Shardakov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

The analysis of analytical and numerical solutions to static problems obtained in the framework of the Cosserat continuum theory has been made for a special purpose to ascertain the effects due to couple-stress properties of materials. The appropriate macro-parameters have been identified and the measure of their response to couple-stress properties has been determined. A set of solutions, which are most informative from the view point of manifestation of couple-stress properties, has been found. These solutions have been used as a basis for development and realization of experiments on registration of couple-stress effects in the examined materials.

Key words: Cosserat continuum, analytical and numerical solutions, experimental identification of parameters

1. Введение

2009 год является знаменательным для исследований в области механики сплошных сред в рамках микрополярных континуумов. В этом году исполнилось 100 лет фундаментальной работе Э. и Ф. Коссера [1], в которой свойствами твердого тела были наделены точки материального континуума. Такой континуум позже получил название континуума Коссера. Приблизительно через полвека после выхода знаменитой работы братьев Коссера появились яркие труды, касающиеся возможностей применения положений микрополярного континуума в различных областях механики сплошных сред [2–21]. В значительной степени они посвящены концептуальным вопросам — описанию кинематики точки континуума, построению физических соотношений. Эти работы внесли большой вклад в развитие данной области знаний и послужили основой для дальнейших исследований. Но в 70–80 годах прошлого века, судя по количеству публикаций, наблюдается некоторое «затишье» в изучении обобщенных континуумов.

Возможно, бурное развитие микромеханики в целом, а также достижения в сфере нанотехнологий послужили в конце XX века причиной новой волны интереса к теории обобщенного континуума. За прошедшие годы опубликованы тысячи работ, отражающих ее развитие и применение к описанию особенностей поведения как жидких сред, так и деформируемых твердых тел. Так в работах [22, 23] теория микрополярного континуума используется для описания нелинейно-упругих сред с учетом больших деформаций. В [24] предложен вариант построения континуума Коссера, позволяющий учитывать вязкоупругие свойства материала. Особенности волновых процессов в микрополярных средах посвящены статьи [25–28]. Необходимость учета кинематики внутренней структуры геоматериалов на различных линейных масштабах при динамических процессах отмечается в [29]. В работах [30–33] представлены интересные результаты исследований, связанных с особенностями волновых процессов в хиральных материалах, взаимодействующих с микрополярными упругими средами. В [34–36] развиваются численные методы и алгоритмы решения статических и динамических краевых задач континуума Коссера.

Следует отметить, что во всем многообразии публикаций, посвященных микрополярным средам, экспериментальные исследования, особенно, эксперименты, в которых удастся зарегистрировать проявление моментных свойств материалов, занимают ничтожно малую часть.

В экспериментах по идентификации физических параметров симметричной теории упругости обычно наблюдается стремление обеспечить однородность напряженно-деформированного состояния и создать его определенный тип (чистый сдвиг, одноосное растяжение и т.п.). Однако, исходя из теоретических предпосылок микрополярного континуума, известно, что моментные свойства среды имеют возможность проявить себя в виде отклика на макроуровне лишь в условиях неоднородного напряженного состояния и при достаточно высоком уровне градиентов напряжений и деформаций [37]. Это обстоятельство принципиально отличает необходимые условия экспериментального определения материальных параметров для физических уравнений микрополярного континуума. Обеспечение условий неоднородности и градиентности является одним из основных факторов, затрудняющих идентификацию материальных констант. Но это только одна из причин. Другая, не менее значимая и в не меньшей степени затрудняющая реализацию эксперимента причина состоит в том, что моментные свойства материала проявляются на линейных масштабах, близких к масштабам его структурных компонент (зерен — для металлов, сферолитов — для полимеров, зернистых и волокнистых включений — для композитов и т.п.). Последнее обстоятельство обуславливает необходимость тщательного анализа и выбора измеряемого макропараметра, а также предъявляет высокие требования к точности измерений.

Попытки определения материальных параметров для континуума Коссера на основе статических экспериментов можно найти в работах [38–46], описывающих испытание образцов на изгиб и кручение. Изгиб и кручение — это те «наипростейшие» виды напряженно-деформированного состояния, при которых в процессе деформирования могут быть зафиксированы и моментные параметры материала, но, в силу отсутствия при этом высоких градиентов напряжений и деформаций, зависимость измеряемых макропараметров от моментных свойств материала будет незначительной, что и подтверждается обобщающим выводом, сделанным в работе [37]. В статье [20] отмечается перспективность проведения динамических экспериментов для определения материальных параметров на основе анализа дисперсионных зависимостей. Такой подход к нахождению упругих параметров континуума Коссера используется в работе [47].

В настоящем исследовании проведен анализ некоторых аналитических и численных решений статических задач теории упругости в рамках континуума Коссера. Цель

анализа — установление эффектов проявления моментных свойств материала на макроуровне.

2. Основные уравнения теории упругости для континуума Коссера

Основные соотношения для упругого изотропного тела в рамках континуума Коссера имеют вид [18]:

— уравнения движения

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{X} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T : \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{Y} = j \ddot{\boldsymbol{\omega}}; \quad (1)$$

— геометрические соотношения

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\boldsymbol{\chi}} = \nabla \boldsymbol{\omega}; \quad (2)$$

— физические уравнения

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(S)} + 2\alpha \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \tilde{\mathbf{e}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}} = 2\gamma \tilde{\boldsymbol{\chi}}^{(S)} + 2\varepsilon \tilde{\boldsymbol{\chi}}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\boldsymbol{\chi}}) \tilde{\mathbf{e}}. \quad (3)$$

С учетом данных соотношений уравнения движения (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ (2\gamma + \beta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Y} &= j \ddot{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4) используются обозначения: \mathbf{X} — вектор удельной плотности объемных сил; \mathbf{Y} — вектор удельной плотности объемных моментов; \mathbf{u} — вектор перемещения; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор поворота; $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ — тензоры деформаций и изгиба–кручения; $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; μ, λ — постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — физические постоянные материала в рамках моментной теории упругости; ρ_0 — плотность; j — плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении); $\tilde{\mathbf{E}}$ — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ — операция альтернирования; $\nabla(\cdot)$ — набла-оператор; $I_1(\cdot)$ — первый инвариант тензора.

В отличие от симметричной теории, тензоры $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ являются несимметричными. Однако несложно заметить, что в случае равенства нулю новых материальных констант $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, j$ соотношения (1) трансформируются в уравнения Ламе классической теории упругости.

3. Аналитические решения

Далее проанализирован класс задач для тел вращения, в которых напряженно-деформированное состояние в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) зависит

только от ρ и φ . Эти задачи характеризуется тем, что решение для них удобно представить в виде отрезка ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\rho, \varphi) &= \{u_\rho(\rho, \varphi), u_\varphi(\rho, \varphi), 0\}^T, \\ u_\rho(\rho, \varphi) &= U^{(0)}(\rho) + U^{(1)}(\rho) \cos(\varphi) + \sum_{n=2}^N U^{(n)}(\rho) \cos(n\varphi), \\ u_\varphi(\rho, \varphi) &= V^{(0)}(\rho) + V^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N V^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi), \\ \boldsymbol{\omega}(\rho, \varphi) &= \{0, 0, \omega_z(\rho, \varphi)\}^T, \\ \omega_z(\rho, \varphi) &= \omega^{(0)}(\rho) + \omega^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N \omega^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Удобство такой формы записи состоит в том, что после подстановки выражений (5) в уравнения (4) получается последовательность не связанных между собой систем дифференциальных уравнений относительно функций $U^{(n)}(\rho)$, $V^{(n)}(\rho)$, $\omega^{(n)}(\rho)$, представляющих собой коэффициенты Фурье. Эта последовательность дифференциальных уравнений дополняется краевыми условиями, получаемыми из исходных краевых условий задачи, представленных в виде рядов Фурье.

Для коэффициентов нулевой гармоники система разрешающих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} U^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} U^{(0)}(\rho) - \frac{1}{\rho^2} U^{(0)}(\rho) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} V^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} V^{(0)}(\rho) - \frac{1}{\rho^2} V^{(0)}(\rho) - \frac{2\alpha}{\alpha + \mu} \frac{d}{d\rho} \omega^{(0)}(\rho) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} \omega^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega^{(0)}(\rho) - \frac{4\alpha}{\gamma + \varepsilon} \omega^{(0)}(\rho) + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon} \frac{d}{d\rho} V^{(0)}(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho} V^{(0)}(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Первое уравнение этой системы соответствует классической задаче Ламе [18] и не связано с двумя последующими уравнениями, которые, в свою очередь, описывают задачу кручения в рамках континуума Коссера. Из уравнений (6) видно, что наипростейшая задача, в которой уже проявляются моментные свойства среды, — это задача кручения.

При построении общих решений полученных систем уравнений относительно $U^{(n)}(\rho)$, $V^{(n)}(\rho)$, $\omega^{(n)}(\rho)$ используется известное утверждение о том, что частные решения соответствующих краевых задач симметричной теории являются частными решениями для краевых задач несимметричной теории [18]. Подход к построению этих решений подробно описан в работе [48].

Для удобства дальнейшего анализа перейдем к безразмерной форме записи решений. В качестве характерного размера (линейного масштаба задачи) выберем некоторый радиус R и введем безразмерные величины

$$A = R \sqrt{\frac{\alpha\mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}. \quad (7)$$

Решения для нулевой гармоники $U^{(0)}(\rho)$, $V^{(0)}(\rho)$ и $\omega^{(0)}(\rho)$ имеют вид

$$\begin{aligned} U^{(0)}(\rho) &= C_1^{(0)}\rho + \frac{C_2^{(0)}}{\rho}, \\ V^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)}\rho + \frac{C_4^{(0)}}{\rho} - C_5^{(0)} \frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - C_6^{(0)} \frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}, \\ \omega^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)} - C_5^{(0)} \frac{BI_0(2A\rho)}{2A} + C_6^{(0)} \frac{BK_0(2A\rho)}{2A}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решения для первой гармоники:

$$\begin{aligned} U^{(1)}(\rho) &= C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho} + C_3^{(1)}\rho^2 + C_4^{(1)} \ln(\rho) + C_5^{(1)} \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} + C_6^{(1)} \frac{K_1(2A\rho)}{\rho}, \\ V^{(1)}(\rho) &= -C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho^2} + C_3^{(1)} \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda} \rho^2 - C_4^{(1)} \left\{ \ln(\rho) + \frac{\lambda + \mu}{3\mu + \lambda} \right\} + \\ &+ C_5^{(1)} \left\{ \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho) \right\} + C_6^{(1)} \left\{ \frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho) \right\}, \\ \omega^{(1)}(\rho) &= C_3^{(1)} \frac{4\lambda + 8\mu}{\mu - \lambda} \rho - C_4^{(1)} \frac{\lambda + 2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} - C_5^{(1)} 2A^2 BI_1(2A\rho) - C_6^{(1)} 2A^2 BK_1(2A\rho). \end{aligned} \quad (9)$$

Решения для старших гармоник ($n > 1$):

$$\begin{aligned} U^{(n)}(\rho) &= \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{n+1}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{n-1}} + C_3^{(n)}\rho^{n-1} + C_4^{(n)}\rho^{n+1} + \frac{C_5^{(n)}}{\rho} I_n(2A\rho) + \frac{C_6^{(n)}}{\rho} K_n(2A\rho), \\ V^{(n)}(\rho) &= \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{n+1}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{n-1}} \frac{\lambda(n-2) + \mu(n-4)}{\lambda n + \mu(n+2)} - C_3^{(n)}\rho^{n-1} - C_4^{(n)} \frac{\lambda(n+2) + \mu(n+4)}{\lambda n + \mu(n-2)} \rho^{n+1} \\ &+ C_5^{(n)} \left(\frac{1}{\rho} I_n(2A\rho) - \frac{2A}{n} I_{n-1}(2A\rho) \right) + C_6^{(n)} \left(\frac{1}{\rho} K_n(2A\rho) + \frac{2A}{n} K_{n-1}(2A\rho) \right), \\ \omega^{(n)}(\rho) &= \frac{C_2^{(n)}}{\rho^n} \frac{\lambda(2n-2) + \mu(4n-4)}{\lambda n + \mu(n+2)} - C_4^{(n)} \frac{\lambda(2n+2) + \mu(4n+4)}{\lambda n + \mu(n-2)} \rho^n - \\ &- C_5^{(n)} \frac{2A^2 B}{n} I_n(2A\rho) - C_6^{(n)} \frac{2A^2 B}{n} K_n(2A\rho). \end{aligned} \quad (10)$$

В выражениях (8)–(10) $I_n(\rho)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, а $K_n(\rho)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Вид частных решений, стоящих при коэффициентах $C_1^{(i)} - C_4^{(i)}$, соответствует симметричной теории упругости, а при $C_5^{(i)}, C_6^{(i)}$ — несимметричной. Эти два частных решения можно назвать моментными решениями. Основная проблема состоит именно в нахождении вида моментных частных решений для всех гармоник. Константы при частных решениях в соотношениях (8)–(10) определяются из краевых условий соответствующих задач.

Общее решение в перемещениях, записанное выше, является достаточно громоздким и не позволяет непосредственно сделать какие-либо выводы о поведении

среды в рамках континуума Коссера. Поэтому далее необходимо проанализировать решения некоторых конкретных краевых задач, чтобы найти такие макровеличины, которые имели бы отличия от соответствующих значений симметричной теории упругости и к тому же могли бы быть экспериментально измерены.

Задача 1. Деформирование кольца за счет жесткого смещения в радиальном направлении внутреннего контура кольца относительно неподвижного внешнего.

Внутренний контур кольца $\rho = R_0$ смещается относительно внешнего $\rho = R_1$ в радиальном направлении на величину d (Рис. 1, а). Решение этой задачи в рамках континуума Коссера формируется из представлений (9), что соответствует удержанию в рядах (5) одного слагаемого при $n = 1$.

Численным экспериментом установлено, что в качестве макропараметра, реагирующего на моментные свойства материала, может выступать сила реакции F_y внутреннего контура на радиальное смещение, а в качестве меры отклика — относительная величина δ :

$$F_y = \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi) \sin(\varphi) + \sigma_{\rho\rho}(R_0, \varphi) \cos(\varphi)) R_0 d\varphi, \quad \delta = \left| \frac{F_y - F_y^*}{F_y^*} \right| \cdot 100\%, \quad (11)$$

где F_y^* — сила реакции, вычисленная в рамках классического континуума.

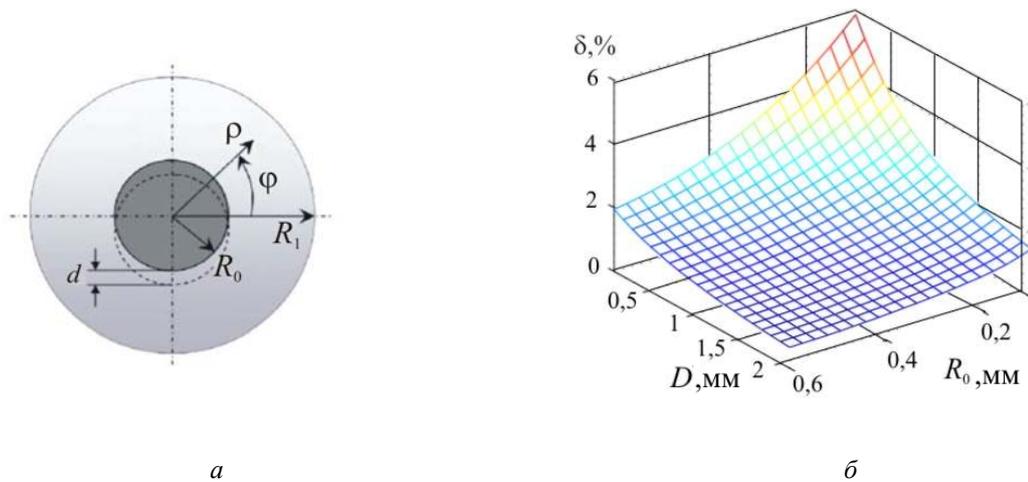


Рис. 1. Расчетная схема задачи (а) и зависимость меры отклика δ от линейных масштабов R_0 и $D = R_1 - R_0$ (б)

В этой задаче имеется два линейных масштаба — радиусы внутреннего и внешнего контуров R_0 и R_1 . Зависимость меры отклика δ от этих масштабов (R_0 и $D = R_1 - R_0$) представлена на рисунке 1, б. Хорошо видно, что величина меры отклика на моментные свойства материала увеличивается по мере уменьшения как радиуса R_0 , так и разности радиусов D .

В численных расчетах данной и всех последующих задач принимались значения материальных физических констант: $\lambda = 2,096 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $\mu = 1,033 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $\alpha = 1,148 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$; $\gamma = 4,1 \text{ Н}$, $\varepsilon = 0,1312 \text{ Н}$.

Задача 2. Деформирование кольца за счет жесткого поворота внутреннего контура относительно неподвижного внешнего.

Внутренний контур $\rho = R_0$ поворачивается относительно внешнего контура $\rho = R_1$ на угол φ_0 (Рис. 2, а). Решение задачи в рамках континуума Коссера формируется из представлений (8), что соответствует удержанию в рядах (5) одного слагаемого при $n = 0$. Численный эксперимент показал, что макропараметром, реагирующим на моментные свойства материала, может служить величина реактивного момента M , возникающего на внутреннем контуре при повороте его на угол φ_0 , а мерой отклика — относительная величина δ :

$$M = \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi)R_0^2 + \mu_{\rho z}(R_0, \varphi)R_0) d\varphi, \quad \delta = \left| \frac{M - M^*}{M^*} \right| \cdot 100\%, \quad (12)$$

где M^* — реактивный момент на внутреннем контуре кольца, полученный в рамках симметричной теории упругости.

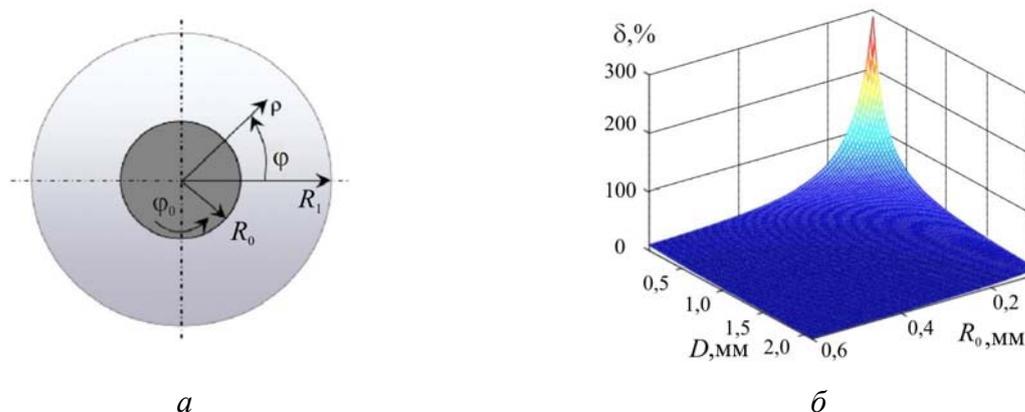


Рис. 2. Расчетная схема задачи (а) и зависимость меры отклика δ от линейных масштабов R_0 и $D = R_1 - R_0$ (б)

Для данной задачи также характерны два линейных масштаба — радиусы внутреннего R_0 и внешнего R_1 контуров. Зависимость меры отклика δ от линейных масштабов R_0 и $D = R_1 - R_0$ представлена на рисунке 2, б. Как и в предыдущей задаче, величина меры отклика на моментные свойства материала увеличивается при уменьшении радиуса R_0 , и разности радиусов D . Однако следует отметить, что, по сравнению с предыдущим случаем, мера отклика возрастает приблизительно в 30 раз.

Задача 3. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием — задача Кирша.

Рассматривается одноосное растяжение пластины с круговым отверстием (Рис. 3, а). Решение получается при удержании в рядах (5) слагаемых только при $n = 0$ и $n = 2$. Здесь весь сценарий отклика, безусловно, реализуется в окрестности отверстия, где появляются высокие градиенты напряжений и деформаций.

В рамках классической теории упругости впервые эта задача решена Дж. Киршем [49] и позднее, несколько иным путем, Н.И. Мусхелишвили [50]. Её обобщение на случай псевдосреды Коссера можно найти в [9]. В рамках континуума Коссера величина концентрации напряжений вблизи кругового отверстия найдена В.А. Пальмовым [53]. Однако следует отметить, что решение, приведенное в работе [53], не позволяет в полной мере проанализировать напряженно-деформированное состояние в окрестности кругового отверстия и осуществить выбор возможных вариантов макропараметров,

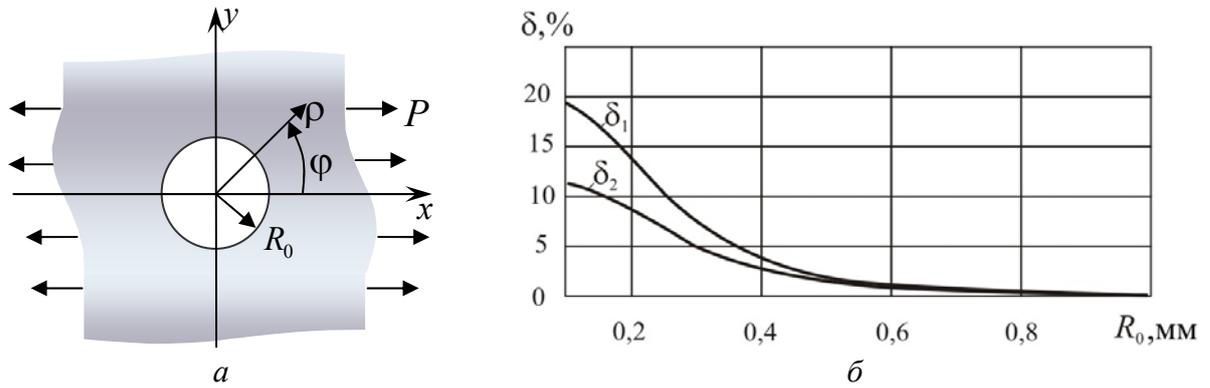


Рис. 3. Расчетная схема задачи (а) и зависимость мер отклика δ_1 и δ_2 от линейного масштаба R_0 (б)

откликающихся на моментные свойства материала. Поэтому авторами настоящей статьи проведен подробный анализ задачи Кирша [48, 51, 52]; некоторые его результаты приводятся далее.

Путем численного эксперимента установлены два макропараметра, откликающиеся на моментные свойства материала. Первый — D_1 , определяет степень искажения первоначально круглого отверстия, и ему соответствует мера отклика δ_1 :

$$D_1 = \left| \frac{u_p(R_0, 0)}{u_p(R_0, \pi/2)} \right|, \quad \delta_1 = \left| \frac{D_1 - D_1^*}{D_1^*} \right| \cdot 100\%. \quad (13)$$

Второй — D_2 , характеризует меру искажения профиля поверхности пластины по контуру отверстия, и ему отвечает мера отклика δ_2 (Рис. 3, б):

$$D_2 = \left| \varepsilon_{zz}(R_0, 0) - \varepsilon_{zz}(R_0, \pi/2) \right|, \quad \delta_2 = \left| \frac{D_2 - D_2^*}{D_2^*} \right| \cdot 100\%. \quad (14)$$

В соотношениях (13) и (14) через D_n^* обозначены макропараметры, полученные в рамках симметричной теории упругости, ε_{zz} — поперечная деформация пластины, определяемая на основании гипотезы о плоско-напряженном состоянии ($\sigma_{zz} = 0$):

$$\varepsilon_{zz}(\rho, \varphi) = \frac{\chi - 3}{\chi + 1} (\gamma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \gamma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)), \quad \chi = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}. \quad (15)$$

Формальный вид соотношений (15) одинаков для симметричной теории упругости и континуума Коссера.

Параметр D_1 привлекателен тем, что в симметричной теории он имеет точное значение $D_1^* = 3$ и не зависит от механических свойств материала.

Для задачи Кирша характерен только один линейный масштаб — радиус отверстия R_0 . Как и следовало ожидать, в этой задаче меры отклика на моментные свойства δ_1 и δ_2 возрастают по мере уменьшения линейного масштаба R_0 (Рис. 3, б).

Таким образом, все рассмотренные выше задачи демонстрирует возможность определения макропараметров, которые откликаются на моментные свойства и, что очень важно, могут быть измерены экспериментально.

4. Численные решения

С целью расширения круга исследуемых задач разработан численный алгоритм, применимый к двумерным статическим задачам несимметричной теории упругости, базирующийся на методе конечных элементов. Алгоритм используется для решения вариационного уравнения несимметричной теории упругости, построенного на основе принципа возможных перемещений [18]:

$$\int_V \left(\tilde{\sigma} \cdot \delta \tilde{\gamma} + \tilde{\mu} \cdot \delta \tilde{\chi} \right) dV - \int_V \left(X \cdot \delta u + Y \cdot \delta \omega \right) dV = \int_S \left(P \cdot \delta u + m \cdot \delta \omega \right) dS, \quad (16)$$

где P , m — интенсивность внешних поверхностных сил и моментов.

В качестве конечного элемента выбран треугольник с квадратичной аппроксимацией компонент вектора перемещений и линейной аппроксимацией компонент вектора поворота. Численные эксперименты показали, что этот тип элемента является наиболее эффективным. При сопоставимых затратах памяти и объемах вычислений он, по сравнению с другими типами элементов, обеспечивает наименьшую погрешность.

Далее приводятся примеры анализа численных решений двух задач несимметричной теории упругости, для которых не представляется возможным найти аналитическое решение.

Задача 4. Одноосное растяжение пластины с квадратным отверстием.

Расчетные схемы решенных задач представлены на рисунке 4, *a* и *б*. Рассматриваются два варианта расположения отверстия по отношению к направлению действия растягивающих сил P . В качестве макропараметра, зависящего от моментных свойств материала, принята величина

$$D = \left| \frac{u_y(0, R)}{u_x(R, 0)} \right|, \quad (17)$$

характеризующая искажение геометрии отверстия. Мера степени искажения δ определяется по формуле:

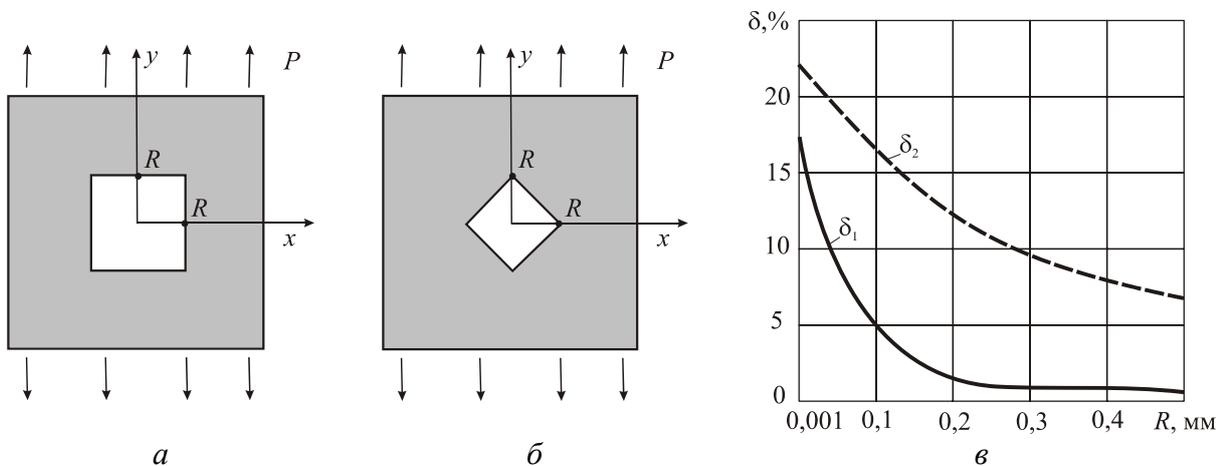


Рис. 4. Расчетные схемы задачи (*a*, *б*) и зависимость мер отклика δ_1 (схема *a*) и δ_2 (схема *б*) от линейного масштаба R (*в*)

$$\delta = \left| \frac{D - D^*}{D^*} \right| \cdot 100\%, \quad (18)$$

где D^* соответствует величине искажения контура отверстия в рамках симметричной теории.

Характерным линейным масштабом рассматриваемой задачи является параметр R , который для первой расчетной схемы равен половине стороны, а для второй — половине диагонали квадрата. На рисунке 4, в приведены зависимости мер искажения профиля отверстия для двух вариантов его расположения. Сравнение графиков показывает, что параметр δ чувствителен к ориентации отверстия относительно направления действия нагрузки.

Задача 5. Одноосное растяжение пластины с 5-ю круговыми отверстиями.

Из анализа задачи Кирша следует вывод о возможности регистрации эффекта проявления моментных свойств материала при измерении некоторых макропараметров. Макропараметры (см. соотношения (13), (14)) вычисляются по решению, полученному в окрестности отверстия, которое провоцирует неоднородные, градиентные поля напряжений и деформаций и тем самым обеспечивает условия проявления моментных свойств материала. Логично предположить, что при одноосном растяжении пластины с 5-ю отверстиями неоднородность и градиентность напряженно-деформированного состояния возрастут, и можно ожидать усиления эффекта отклика моментных свойств материала при одинаковых линейных масштабах задач. Расчетная схема задачи представлена на рисунке 5, а.

В качестве характеристики различия моментного и классического решений используется величина

$$\delta = \left| \frac{u_y - u_y^*}{u_y^*} \right| \cdot 100\%, \quad (19)$$

где u_y и u_y^* — решения, полученные в рамках соответственно несимметричной и симметричной теорий упругости.

Наличие двух характерных линейных масштабов расширяет область анализа зависимости от них меры отклика. На рисунке 5, б представлено семейство кривых, характеризующих зависимость меры отклика от радиуса отверстия R_0 для различных

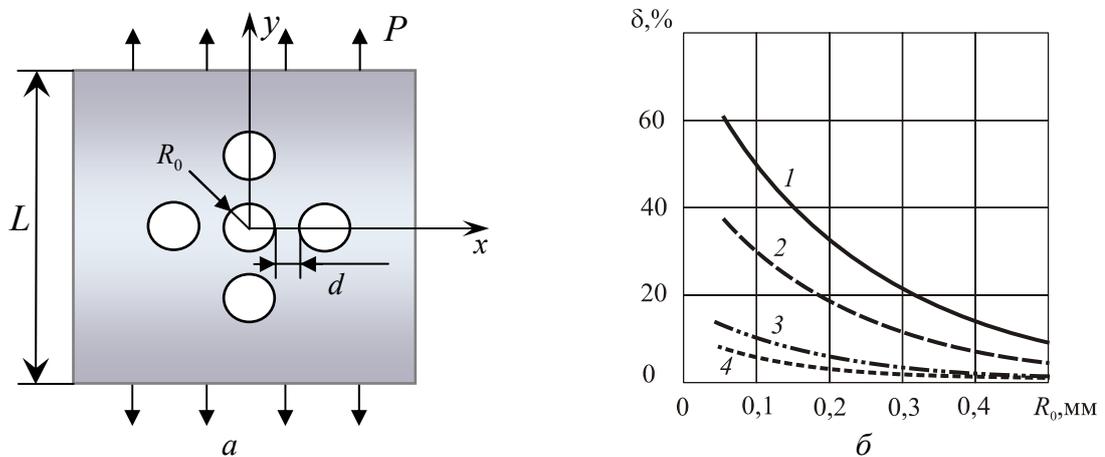


Рис. 5. Расчетная схема задачи (а) и зависимость меры отклика δ от линейного масштаба R_0 (б) при значениях линейного масштаба d : $R_0/4$ (кривая 1); $R_0/2$ (2); R_0 (3); задача Кирша (4)

значений расстояния между отверстиями d в сопоставлении с аналогичной зависимостью для задачи Кирша. Полученные результаты свидетельствуют о возможности усиления проявления моментных свойств материала за счет увеличения числа отверстий и их взаимного расположения.

Из представленных результатов исследования аналитических и численных решений можно сделать следующие выводы:

- во всех рассмотренных задачах меры отклика введенных макропараметров на моментные свойства материалов немонотонно возрастают при уменьшении характерных линейных масштабов, что подтверждает справедливость утверждения об усилении проявлений моментных свойств материалов с увеличением градиентности напряженно-деформированного состояния;
- при одинаковых значениях материальных параметров среды Коссера наиболее яркий эффект проявления моментных свойств обнаружен в задаче о деформировании кольца за счет жесткого поворота внутреннего контура относительно неподвижного внешнего;
- продемонстрирована возможность усиления эффектов проявления моментных свойств за счет усиления градиентности напряженного состояния путем изменения числа источников неоднородности и их взаимного расположения.

5. Экспериментальное исследование моментных эффектов

В основу принципиальной схемы эксперимента положены результаты анализа задачи об одноосном растяжении пластины с круговым отверстием — задачи Кирша. В качестве экспериментально измеряемого параметра берется величина D_2 , определяющая меру искажения профиля поверхности пластины по контуру отверстия, и соответствующая ей мера отклика δ_2 (см. соотношения (14)). Несмотря на то, что данная схема эксперимента базируется на не самой информативной из всех рассмотренных задач, ее выбор обусловлен рядом присущих ей преимуществ:

— простотой изготовления образца и обеспечением краевых условий необходимого вида, а также однозначностью их толкования;

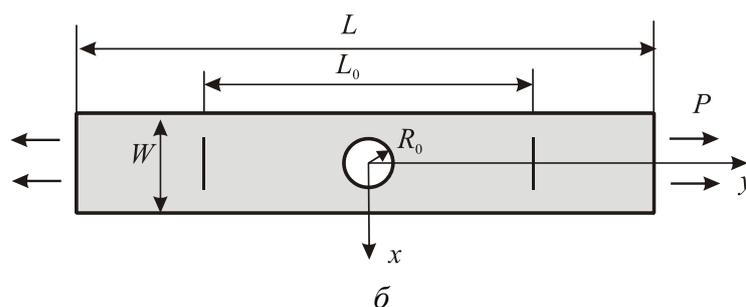
— возможностью использования высокоточного микроскопа–интерферометра «New View 5000», позволяющего производить регистрацию искажения профиля поверхности с точностью 0,1 нм.

Исследуемым материалом служит органическое стекло, имеющее относительно невысокие жесткостные свойства. Это позволяет осуществлять процесс деформирования посредством не слишком массивного нагружающего устройства, масса которого не превышает допустимой нормы массы, устанавливаемой на приборном столе микроскопа–интерферометра. В пользу выбора оргстекла говорит и проведенная оценка величины изменения профиля поверхности образца. Так для образца толщиной $H = 1$ мм в окрестности отверстия с радиусом $R_0 \sim 0,2$ мм искажение профиля составляет ~ 1 мкм, и для его регистрации точности микроскопа–интерферометра вполне достаточно.

Принципиальная схема образца и его нагружения представлена на рисунке 6, б. Размеры образца определялись путем численного эксперимента из условия независимости напряженного состояния в окрестности отверстия от размеров образца и составляли: $L = 120$ мм, $W = 45$ мм, толщина $H = 1$ мм; размеры отверстия R_0 в опытах имели значения: 0,22; 0,32; 0,42; 0,55 мм. Было изготовлено нагружающее устройство, обеспечивающее заданный уровень одноосного деформирования γ_{yy} (при кинематическом нагружении) вдоль оси образца по базе $L_0 = 50$ мм. Нагружающее устройство и микроскоп–интерферометр представлены на рисунке 6, а.



а



б

Рис. 6. Экспериментальный комплекс (а): микроскоп–интерферометр «New View 5000» (1) и нагружающее устройство (2); принципиальная схема образца и его нагружения (б)

На рисунке 7 показаны построенные с помощью программных средств микроскопа–интерферометра трехмерные образы профиля поверхности образца в окрестности отверстия при различных уровнях деформации γ_{yy} . Обработка этих данных с помощью прямого и обратного преобразования Фурье позволила получить величину искажения высоты профиля поверхности образца по контуру отверстия $z(\varphi)$ (Рис. 8).

Рассчитанные на основе экспериментальных данных значения макропараметра D_2 (14) продемонстрировали его зависимость от уровня деформации γ_{yy} . Вид этих зависимостей при различных значениях радиуса отверстия R_0 представлен на рисунке 9.

Следует отметить, что параметр D_2 , вычисленный в рамках симметричной упругой среды, линейно зависит от γ_{yy} и не зависит от радиуса отверстия R_0 . Именно этот факт наблюдается в эксперименте с образцами, имеющими отверстия радиусом $R_0 \geq 0,3$ мм. При $R_0 < 0,3$ мм с увеличением уровня деформирования γ_{yy} по-прежнему наблюдается линейный рост макропараметра D_2 , но при этом обнаруживается его зависимость от масштаба R_0 . Это позволяет сделать вывод, что при таком линейном масштабе материал образца (оргстекло) начинает демонстрировать моментные свойства.

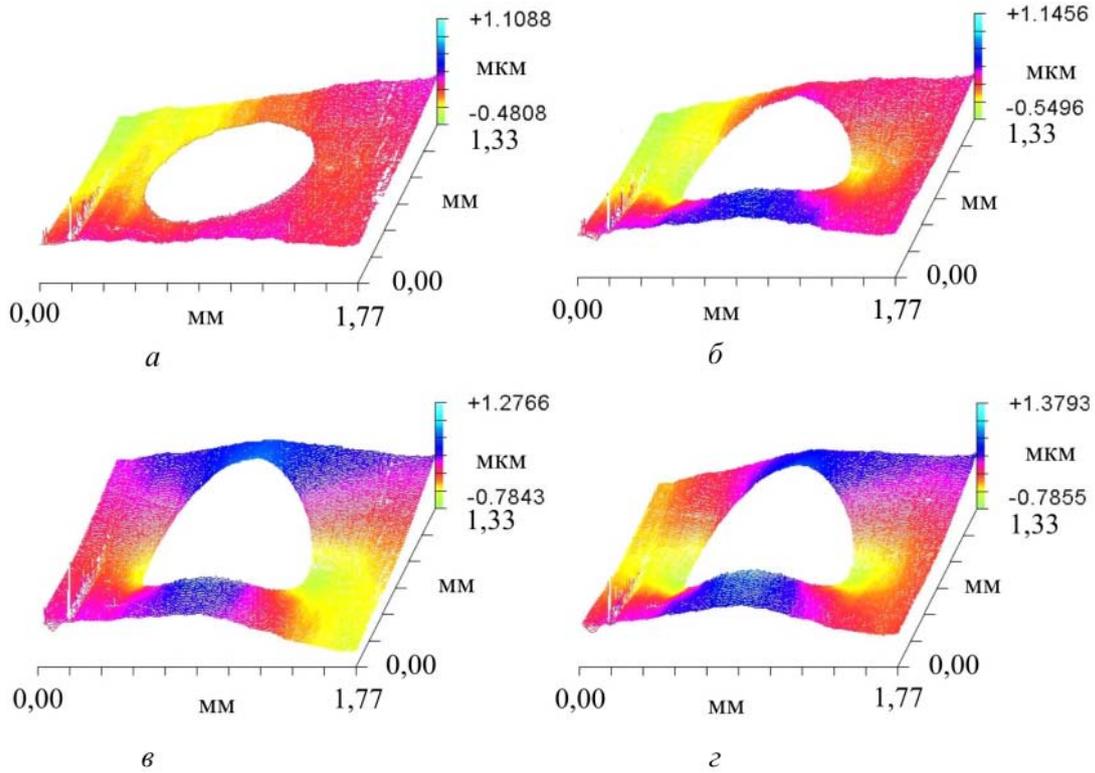


Рис. 7. Поверхность пластины в окрестности отверстия при различных уровнях деформации γ_{yy} (%): недеформированное состояние (*a*), 0,1 (*б*); 0,26 (*в*); 0,3 (*г*)

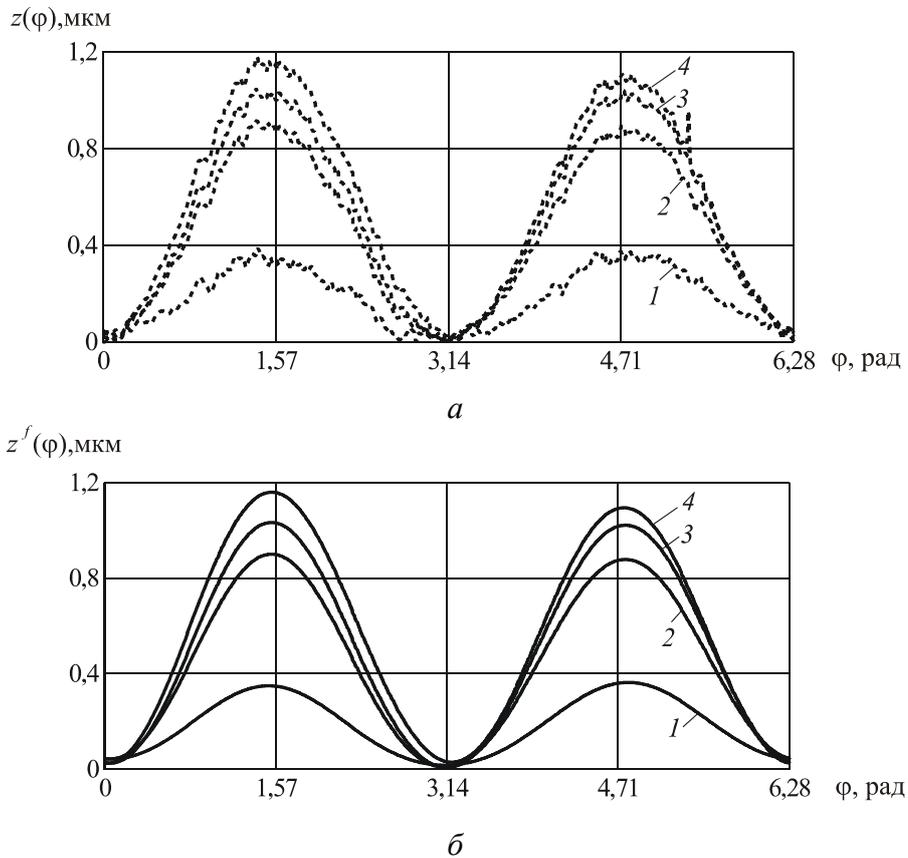


Рис. 8. Искажения высоты профиля поверхности образца по контуру отверстия: экспериментальные данные (*a*) и результаты их обработки с использованием прямого и обратного преобразования Фурье (*б*). Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют поверхностям пластины *a*, *б*, *в*, *г*, изображенным на рисунке 7

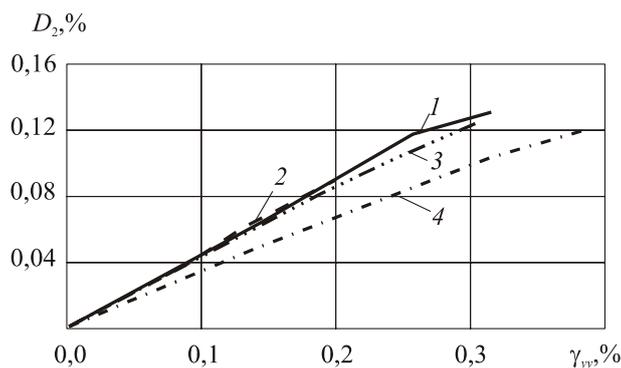


Рис. 9. Зависимости экспериментально измеряемого макропараметра D_2 от уровня деформирования образца γ_{yy} для радиусов отверстия: $R_0 = 0,55$ мм (кривая 1); 0,42 (2); 0,32 (3); 0,22 (4)

6. Выводы

Осуществлен анализ ряда аналитических и численных решений статических задач в рамках континуума Коссера для установления эффектов проявления моментных свойств материалов. Определены макропараметры, реагирующие на моментные свойства материала, а также установлены меры их отклика на эти свойства. Во всех рассмотренных задачах меры отклика найденных макропараметров на моментные свойства материалов немонотонно возрастают при уменьшении характерных линейных масштабов. Этот факт подтверждает справедливость утверждения об усилении проявлений моментных свойств с увеличением градиентности напряженно-деформированного состояния.

Выделены решения, обладающие наибольшей информативностью в отношении проявления моментных свойств. На базе этих решений разработан и осуществлен эксперимент по регистрации проявления моментных свойств материала. Полученные результаты определяют возможные тенденции в реализации физических экспериментов по определению материальных параметров определяющих соотношений упругой среды Коссера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-96029-р_Урал_a, № 07-01-97613-р-офи, № 09-08-01020_a), а также при поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) в рамках гранта молодым ученым № Y4-P-09-04 и Интеграционного проекта фундаментальных научных исследований, выполняемого совместно учеными Уральского, Сибирского и Дальневосточного отделений РАН.

Литература

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des corps deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
2. *Ericksen J.L., Truesdell C.* Exact theory of stress and strain in rods and shells // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1958. – V. 1, N. 4. – P. 295-323.
3. *Тупин Р.А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения. // Механика / Сб. пер. – 1965. – №. 3. – С.113-140.
4. *Toupin R.A.* Elastic materials with couple-stress // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1962. – V. 11, N. 5. – P. 385-399.
5. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – V. 17, N. 2. – P. 85-112.

6. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика / Сб. пер. – М.: Мир. – 1964. – № 4. – С. 115-128.
7. Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика / Сб. пер. – М.: Мир. – 1964. – № 4. – С. 80-114.
8. Mindlin R.D. Influence of couple-stress on stress concentrations // Experimental Mechanics. – 1963. – V. 3, N. 1. – P. 1-7.
9. Mindlin R.D., Tierstin H.F. Effects of couple-stress in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. and Analysis. – 1962. – V. 11, N. 5. – P. 415-488.
10. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. – 1960. – Т. 2, вып. 7. – С. 1399-1409.
11. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // Физика твердого тела. – 1964. – Т. 6, вып. 9. – С. 2689-2699.
12. Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л. Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // Физика твердого тела. – 1963. – Т. 5, № 9. – С. 2591-2598.
13. Коитер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика / Сб. пер. – М.: Мир. – 1965. – № 3. – С. 89-112.
14. Koiter W.T. Couple-stress in the theory of elasticity // Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch. – 1964. – V. 67. – P. 17-29, 30-44.
15. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 401-408.
16. Green A.E., Rivlin R.S. Simple force and stress multipoles // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – V. 16, N 5. – P. 325-353.
17. Reissner E. On kinematics and statics in finite-strain force and moment stress elasticity // Stud. Appl. Math. – 1973. – V. 52, N. 2. – P. 97-101.
18. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
19. Nowacki W. Couple-stresses in the theory of thermoelasticity // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sc. Techn. – 1966. – V. 14. – P. 505-512.
20. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
21. Эринген А.К. Теория микрополяридной упругости // Разрушение. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – С. 646-751.
22. Zubov L.M. Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. – Berlin: Heidelberg; N.Y.: Springer, 1997. – 205 p.
23. Nikitin E., Zubov L.M. Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress // J. Elasticity. – 1998. – V. 51, N. 1. – P. 1-22.
24. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерицова Н.П. Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера // Вычисл. мех. сплош. сред. – Пермь, 2009. – Т. 2, № 2. – С. 40-47.
25. Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д. О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журнал. – 1982. – Т. 28, № 6. – С. 838-840.
26. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // ПМТФ. – 2005. – Т. 46, № 4. – С. 116-124.
27. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журнал. – 2006. – Т. 52, № 2. – С. 227-235.
28. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 143-150.
29. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидомеханика. – М.: Недра, 1996. – 447 с.
30. Khurana A., Tomar S.K. Longitudinal wave response of a chiral slab interposed between micropolar solid half-spaces // Int. J. Solids Struct. – 2009. – N. 46. – P. 135-150.
31. Khurana A., Tomar S.K. Transmission of longitudinal wave at a plane interface between micropolar elastic and chiral solid half-spaces: Incidence from micropolar half-space // J. of Sound and Vibration. – 2008. – N. 311. – P. 973-990.
32. Tomar S.K., Khurana A. Elastic waves in an electro-microelastic solid // Int. J. Solids Struct. – 2008. – N. 45. – P. 276-302.
33. Tomar S.K., Khurana A. Reflection and transmission of elastic waves from a plane interface between two thermo-microstretch solid half-spaces // Int. J. of Appl. Math. Mech. – 2009. – N. 5 (4). – P. 48-68.
34. Садовская О.В. Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Ж. вычисл. математики и математ. физики. – 2009. – Т. 49, № 2. – С. 313-322.
35. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости // Физич. мезомеханика. – 2007. – Т. 10, № 5. – С. 77-90.

36. *Корепанов В.В., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 2. – С. 63-70
37. *Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К. Сиодзава К., Танака К.* Введение в микромеханику. – М.: Металлургия, 1987. – 280с.
38. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants // Trans. ASME. – 1975. – V. E42, N. 2. – P. 369-374.
39. *Ellis R.W., Smith C.W.* A thin-plate analysis and experimental evaluation of couple-stress effects // Experimental Mechanics. – 1967. – V 7. – P. 372.
40. *Hoppman W.H., Shahwan F.O.F.* Physical model of a 3-Constant isotropic elastic material // Transactions Trans. ASME. – 1965. – V. E32. – P. 837.
41. *Askar A.* Molecular crystals and the polar theories of the continua (Experimental values of material coefficient for KNO_3) // Int. J. Eng. Sci. – 1972. – V. 10. – P. 293.
42. *Perkins R.W., Thompson D.* Experimental evidence of a couple-stress effect // AIAA Journal. American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1973. – V. 11. – P. 1053.
43. *Cohen H.* Dislocations in couple-stress elasticity // J. of Mathematics and Physics. – 1966. – V. 45. – P. 35.
44. *Kroener E.* On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics // Int. J. Eng. Sci. – 1963. – V. 1. – P. 261.
45. *Koiter W.T.* Couple-stress in the theory of elasticity // Proc. Koenicl. Acad. Wet. – 1964. – V. B67. – P. 17.
46. *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure. – N.-Y.: J. Wiley, 1995. – P. 1-22.
47. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants // Arch. Mech. – 1981. – V. 33, N. 5. – P. 717-737.
48. *Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N.* Parametric analysis of analytical solutions to one- and two-dimensional problem in couple-stress theory of elasticity // Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM) – 2003. – V. 83, N. 4. – P. 238-248.
49. *Kirsch G.* Die theorie der elastizität und die begründung der lehrlehre // Zentralblatt Berlin Deutscher Ingenieure, 1898. – P. 42.
50. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
51. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – № 5. – С. 69-82.
52. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // ПМТФ. – Новосибирск, 2001. – Т. 42, № 4. – С. 145-154.
53. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28, вып. 6. – С. 1117-1120.

Поступила в редакцию 17.12.09.

Сведения об авторах

Корепанов Валерий Валерьевич, кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1; E-mail: kvv@icmm.ru

Кулеш Михаил Александрович, дфмн, нс, ИМСС УрО РАН; E-mail: mikhail.kulesh@googlemail.com

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, дир., ИМСС УрО РАН; E-mail: mvp@icmm.ru

Шардаков Игорь Николаевич, дфмн, зав. лаб., ИМСС УрО РАН; E-mail: shardakov@icmm.ru