

УДК 539.3

ФОРМИРОВАНИЕ СОЛИТОНОВ ДЕФОРМАЦИИ В КОНТИНУУМЕ КОССЕРА СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

В.И. Ерофеев¹, А.И. Землянухин², В.М. Катсон², С.Ф. Шешенин¹¹*Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благоврадова РАН,
Нижний Новгород, Россия*²*Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия*

Рассматривается нелинейная вязкоупругая микрополярная среда со стесненным вращением (псевдоконтинуум Коссера). Методом связанных нормальных волн осуществлен переход от системы нелинейных уравнений, описывающих динамику среды, к эволюционным уравнениям. Показано, что эволюционные уравнения представляют собой систему четырех нелинейных уравнений в частных производных, два из которых являются уравнениями Бюргерса, а два — модифицированными уравнениями Кортевега-де Вриза (мКдВ). Аналитически и численно исследована эволюция нелинейных вязкоупругих волн.

Ключевые слова: континуум Коссера, стесненное вращение, нелинейность, вязкоупругость, солитон

FORMATION OF STRAIN SOLITARY WAVES IN THE COSSERAT CONTINUUM WITH RESTRICTED ROTATION

V.I. Erofeyev¹, A.I. Zemlyanukhin², V.M. Catson² and S.F. Sheshenin¹¹*Nizhny Novgorod Branch of Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute RAS,
Nizhny Novgorod, Russia*²*Saratov State Technical University, Saratov, Russia*

The nonlinear viscoelastic micropolar medium with restricted rotation (the Cosserat pseudo-continuum) is considered. Using the method of coupled normal waves, the original nonlinear system describing the dynamics of the medium is transferred to a system of evolutionary equations. It is shown that these evolutionary equations are four nonlinear partial differential equations two of which are the Burgers equations and the other two are the modified Korteweg-de Vries (mKdV) equations. The paper presents the results of the analytical and numerical study of nonlinear viscoelastic wave evolution.

Keywords: Cosserat continuum, restricted rotation, nonlinearity, viscoelasticity, soliton

1. Основные гипотезы и уравнения динамики

Известно, что одним из допущений классической механики сплошных сред является предположение об эквивалентности действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру тяжести площадки. Однако это выполняется не всегда, и в общем случае действие системы сил, приложенных к площадке, эквивалентно действию главного вектора и главного момента этих сил. В данной работе при рассмотрении материальных частиц среды будут учитываться их собственные кинетические моменты и наличие распределенных объемных и поверхностных пар, которыми в классической механике сплошных сред обычно пренебрегают.

При таких предположениях в теле возникают не только напряжения σ_{ji} , но и моментные напряжения m_{ji} , образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Движение такой среды описывается двумя полевыми переменными — вектором перемещения \mathbf{u} и вектором поворота Ψ . В общем случае считается, что компоненты векторов перемещений и поворотов кинематически независимы (континуум Коссера) [1], и в качестве фундаментальных уравнений движения выступают векторные уравнения количества движения и моментов количества движения.

Наряду с общим случаем, рассматривается и упрощенный вариант микрополярной среды (псевдоконтинуум Коссера), в котором предполагается совпадающая с соотношениями классической теории упругости жесткая зависимость вектора поворота от ротора перемещения ($\Psi = (1/2)\text{rot } \mathbf{u}$ — стесненное вращение), но при этом сохраняются моментные напряжения и несимметричность тензора напряжений. В такой среде симметричная часть тензора напряжений зависит от симметричного тензора деформаций так же, как в классической теории упругости.

Уравнения динамики псевдоконтинуума Коссера имеют вид [2]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \Delta \mathbf{u} + \frac{I}{4} \text{rot rot } \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (1)$$

Здесь λ, μ — постоянные Ламе; $\alpha, \gamma, \varepsilon$ — новые упругие постоянные микрополярного материала, удовлетворяющие ограничениям $\alpha \geq 0, \gamma + \varepsilon \geq 0, -(\gamma + \varepsilon) \leq \gamma - \varepsilon \leq (\gamma + \varepsilon)$; ρ — плотность среды; I — константа, характеризующая инерционные свойства макрообъема, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через центр ее тяжести, на число частиц в единице объема.

Вектор \mathbf{F}_1 включает в себя вязкоупругие слагаемые, а вектор \mathbf{F}_2 — нелинейно-упругие слагаемые. Явный вид нелинейных слагаемых для некоторых случаев приведен в работе [2], вязкоупругих слагаемых — в [3].

Система (1) позволяет описывать продольные упругие волны (волны дилатации) и волны сдвига. При этом волны дилатации в среде Коссера по своим свойствам идентичны одноименным волнам классической среды и распространяются со скоростью $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, в то время как волны сдвига, в отличие от классических сдвиговых волн, являются диспергирующими. В низкочастотном диапазоне ($\omega \rightarrow 0$) эти волны распространяются со скоростью, близкой к $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$, а в высокочастотном диапазоне ($\omega \rightarrow \infty$) — со скоростью, близкой к $c_2 = \sqrt{(\gamma + \varepsilon)/I}$.

Рассмотрим далее распространение вдоль оси x_1 плоских волн: продольной — $u_1 = u(x, t)$ и сдвиговой — $u_3 = w(x, t)$. Векторное уравнение (1) переписется в этом случае в виде системы двух одномерных скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ g_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + g_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \gamma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{(\gamma + \varepsilon)}{4\rho} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{I}{4\rho} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \\ = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ g_2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + g_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right\} + \gamma_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \gamma_3 \frac{\partial^3 w}{\partial t^3}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $g_1 = 3\lambda + 6\mu + 2A + 6B + 2C$, $g_2 = \frac{\lambda}{2} + \mu + \frac{A}{4} + \frac{B}{2}$, $g_5 = 3\left(\frac{\lambda}{2} + \mu + \frac{A}{2} + B + J\right)$ — коэффициенты, характеризующие нелинейность материала, а $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — коэффициенты, характеризующие его вязкость; A, B, C, D, G, J, H — упругие модули Ландау [2].

2. Вывод эволюционных уравнений

Исследовать распространение волн конечной амплитуды в континууме Коссера со стесненным вращением достаточно сложно, даже если речь идет об одномерных процессах (2). Значительно проще иметь дело с эволюционными уравнениями, которые, являясь приближенными, сохраняют в себе основные факторы, влияющие на волновые процессы. Существует достаточно много физически и математически корректных методов перехода от исходных уравнений к эволюционным [4]. Воспользуемся методом связанных нормальных волн, развитым в [5]. Для этого запишем систему (2) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}(q)\mathbf{u} = \mathbf{F}(u, q), \quad (3)$$

где $\mathbf{u}^T = (V, u, w, Q)$ — четырехмерный вектор физических переменных; $V = \partial u / \partial t$;

$$Q = \partial w / \partial t; \quad \mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -c_l^2 q^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -c_t^2 q^2 + \frac{\gamma + \varepsilon - Jc_t^2}{4\rho} q^4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— линейная операторная}$$

$$\text{матрица; } \mathbf{F}^T = \left(\left\{ \frac{g_1}{\rho} u^2 + \frac{g_2}{\rho} w^2 + \gamma_1 c_l u \right\} q^3, 0, 0, \left\{ \frac{2g_2}{\rho} uw + (\gamma_2 c_t - \gamma_3 c_t^3) w \right\} q^3 + \frac{3g_5}{\rho} w^3 q^4 \right) \quad \text{—}$$

вектор нелинейных величин; $q = \partial / \partial x$ — оператор дифференцирования.

Переход от системы (2) к уравнениям связанных нормальных волн заключается в диагонализации операторной матрицы $\mathbf{B}(q)$ путем перехода в ее собственный базис с помощью замены переменных

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^4 r_k(q) U_k(x, t), \quad (4)$$

где $U_k(x, t)$ — новые переменные; \mathbf{r}_k — правые собственные векторы матрицы \mathbf{B} ($\mathbf{B}\mathbf{r}_k = p_k \mathbf{r}_k$); $p_k(q)$ — ее собственные значения.

Подставим (4) в векторное уравнение (3), умножим его левую и правую части на левые собственные векторы $\mathbf{l}_j(q)$ и, воспользовавшись условием ортогональности $\mathbf{l}_j \mathbf{r}_k = 0$ при $j \neq k$, получим уравнения связанных нормальных волн $(\partial U_k / \partial t) + p_k(q) U_k = (\mathbf{l}_j \mathbf{r}_k)^{-1} [\mathbf{l}_k \mathbf{F}(r_k U_k, q)]$, где p_k определяет различные ветки дисперсионного уравнения линеаризованной системы. Произвол в выборе собственных векторов можно использовать для приведения правой части к наиболее простому виду. Воспользовавшись этим, разложим собственные значения p_k в ряды Тейлора по q и,

ограничившись первыми двумя слагаемыми, придём к следующим эволюционным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} \pm c_l \frac{\partial U_{1,2}}{\partial x} \pm \frac{\gamma_1}{2} \frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial x^2} &= \mp \frac{g_1}{c_l \rho} U_{1,2} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial x} \mp \frac{g_2}{c_l \rho} U_{3,4} \frac{\partial U_{3,4}}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_{3,4}}{\partial t} \pm c_\tau \frac{\partial U_{3,4}}{\partial x} \pm \frac{(\gamma_2 c_\tau - \gamma_3 c_\tau^3)}{2c_\tau} \frac{\partial^2 U_{3,4}}{\partial x^2} \pm \frac{(Jc_\tau^2 - \gamma - \varepsilon)}{8c_\tau \rho} \frac{\partial^3 U_{3,4}}{\partial x^3} &= \\ = \mp \frac{9g_5}{2c_\tau \rho} U_{3,4}^2 \frac{\partial U_{3,4}}{\partial x} \mp \frac{g_2}{c_\tau \rho} U_{1,2} \frac{\partial U_{3,4}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Связь новых переменных (U_i) с исходными (u, w) определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= U_1 + U_2, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= U_3 + U_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Первые два уравнения ($U_{1,2}$) представляют собой известные в теории нелинейных волн уравнения Бюргера, вторые два уравнения ($U_{3,4}$) — не менее известные модифицированные уравнения Кортевега-де Вриза (мКдВ) [6]. В рассматриваемом случае уравнения оказываются попарно связанными между собой.

3. Численное моделирование

В численном эксперименте рассмотрим случай волн, бегущих в одном направлении, иначе говоря, систему уравнений для U_1 и U_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} + c_l \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\gamma_1}{2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} &= -\frac{g_1}{c_l \rho} U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{g_2}{c_l \rho} U_3 \frac{\partial U_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_3}{\partial t} + c_\tau \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{(\gamma_2 c_\tau - \gamma_3 c_\tau^3)}{2c_\tau} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \frac{(Jc_\tau^2 - \gamma - \varepsilon)}{8c_\tau \rho} \frac{\partial^3 U_3}{\partial x^3} &= \\ = -\frac{9g_5}{2c_\tau \rho} U_3^2 \frac{\partial U_3}{\partial x} - \frac{g_2}{c_\tau \rho} U_1 \frac{\partial U_3}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для удобства моделирования введем безразмерные переменные (x', t'), перейдём в движущуюся систему координат и воспользуемся классическим обозначением для продольной и сдвиговой волновых компонент:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\Lambda}, & t' &= \frac{t \cdot c_l}{\Lambda}, \\ x^* &= x' - t', & t^* &= t', \\ U_1 &= U, & U_3 &= W, \end{aligned}$$

где Λ — некоторая характерная длина волны. Тогда система (7) примет вид (индекс «звездочка» здесь и далее опущен):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_2 U \frac{\partial U}{\partial x} + a_3 W \frac{\partial W}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + C \frac{\partial W}{\partial x} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + a_6 W^2 \frac{\partial W}{\partial x} + a_7 U \frac{\partial W}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $a_1 = \frac{\gamma_1}{2c_l \Lambda}$, $a_2 = \frac{g_1}{c_l^2 \rho}$, $a_3 = \frac{g_2}{c_l^2 \rho}$, $C = \left(\frac{c_\tau}{c_l} - 1 \right)$, $a_4 = \frac{(\gamma_2 c_\tau - \gamma_3 c_\tau^3)}{2c_\tau c_l \Lambda}$, $a_5 = \frac{(Jc_\tau^2 - \gamma - \varepsilon)}{8c_\tau c_l \rho \Lambda^2}$,
 $a_6 = \frac{9g_5}{2c_\tau c_l \rho}$, $a_7 = \frac{g_2}{c_\tau c_l \rho}$.

При численном решении уравнений (8) использовалась полунейвная спектральная схема [7] со следующими параметрами сетки: шаг $\Delta x = 0,25$; длина $L = 128$; число узлов $N = 512$; шаг по времени $\Delta t = 0,1$. По координате x поддерживалось условие периодичности.

Задание начальных условий в форме

$$u_0(x) = w_0(x) = 2e^{-\left(\frac{1}{1000\Delta x} \left[x - \frac{L}{4} \right] \right)^2},$$

приведенной на рисунке 1, и значений коэффициентов $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0,5$, $a_4 = 0,01$, $a_5 = 2$, $a_6 = 2$, $a_7 = 0,1$, $C = -0,5$ позволяет наблюдать относительно устойчивую волновую картину. Выбор малого a_4 накладывает определённые ограничения на коэффициенты γ_2, γ_3 исходной системы (7). Такой выбор также обусловлен тем, что большой коэффициент вязкости будет приводить к слишком скорому затуханию возмущений, препятствуя образованию уединённых волн. Гауссов импульс функции W демонстрирует классическое поведение, свойственное уравнению мКдВ: распадается на несколько солитоноподобных возмущений (Рис. 2). Однако, в отличие от классических

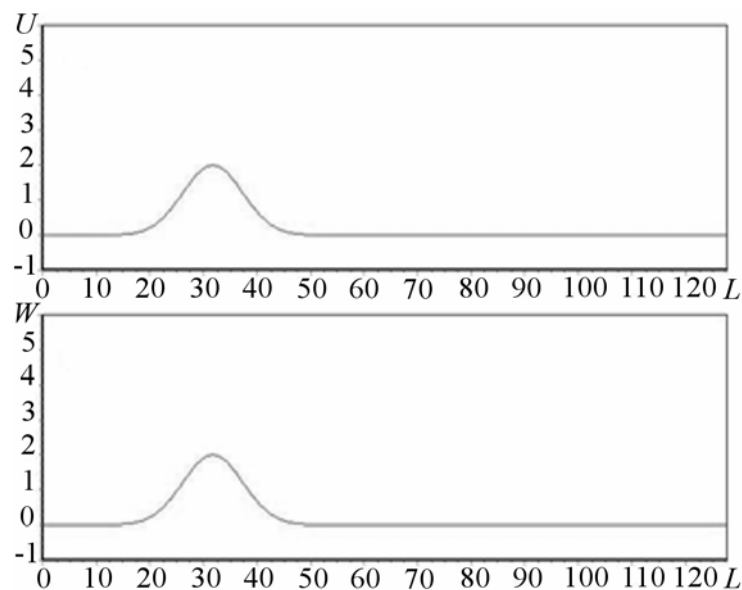


Рис. 1. Начальные условия ($t = 0$) для продольной (U) и сдвиговой (W) волн в виде гауссова импульса

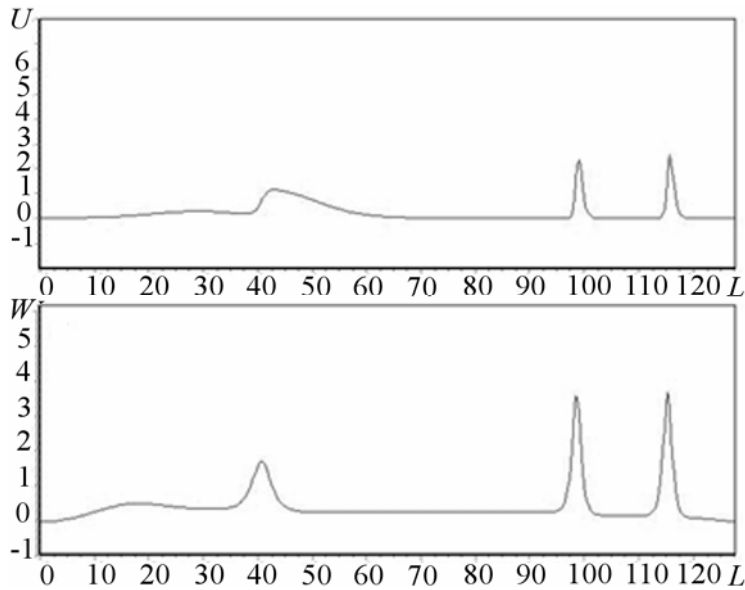


Рис. 2. Продольные (U) и сдвиговые (W) солитоны в момент времени $t = 20$

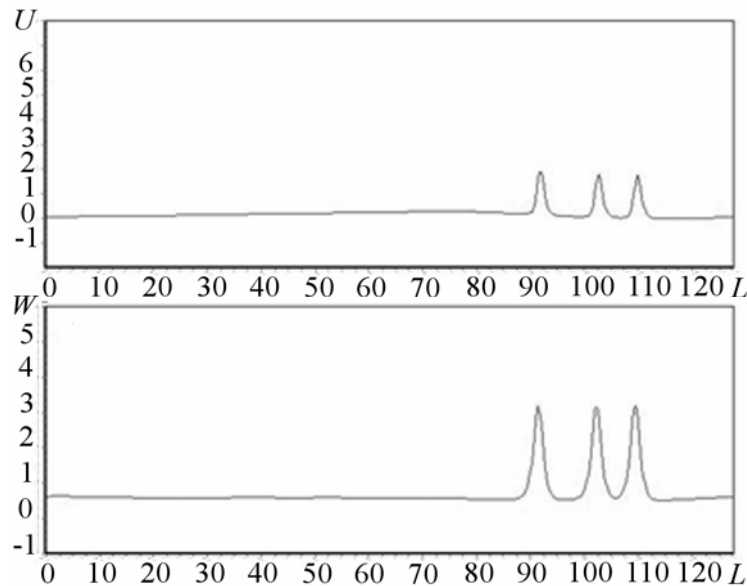


Рис. 3. Продольные (U) и сдвиговые (W) солитоны в момент времени $t = 80$

солитонов мКдВ, амплитуда солитонов функции W продолжает нарастать до некоторого предела, ограниченного коэффициентами затухания ($a_1, a_4 = 0,01$). При этом со временем три первых солитона выравниваются по амплитудам, а волновой хвост затухает (Рис. 3). Возмущения функции U ведут себя несколько иначе. Здесь источником солитоноподобных волн является не столько начальное возмущение, сколько нелинейная связь с уравнением для W . Солитоны U индуцированы солитоноподобными импульсами W , в связи с чем их амплитуда зависит от величины коэффициента связи a_3 . Такое поведение в данной системе естественно, так как уравнение для U не содержит дисперсионных членов и не может иметь собственных уединенно-волновых решений. Увеличение коэффициентов связи a_3 и a_7 приводит к увеличению предельной амплитуды солитонов и уменьшению их толщины. Таким образом, в среде Коссера со стесненным вращением солитоны продольной деформации генерируются только за счёт сдвиговых солитонов.

Выбор начальных условий в виде импульса с нулевой начальной энергией для сдвиговой волны W и в виде отсутствия продольной волны $U = 0$ (Рис. 4)

$$w_0(x) = -\frac{0,06}{\Delta x} \left(x - \frac{L}{4} \right) e^{-\left(\frac{1}{1000\Delta x} \left[x - \frac{L}{4} \right] \right)^2}$$

и значений коэффициентов $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0,01$, $a_5 = 2$, $a_6 = 2$, $a_7 = 0,2$, $C = -0,5$ приводит к следующей эволюционной картине. Положительная часть возмущения W нарастает и в определённый момент поглощает отрицательную часть, превращаясь в уединённую волну. Как и в выше рассмотренном случае, уединенная волна W индуцирует солитоноподобное возмущение функции U (Рис. 5).

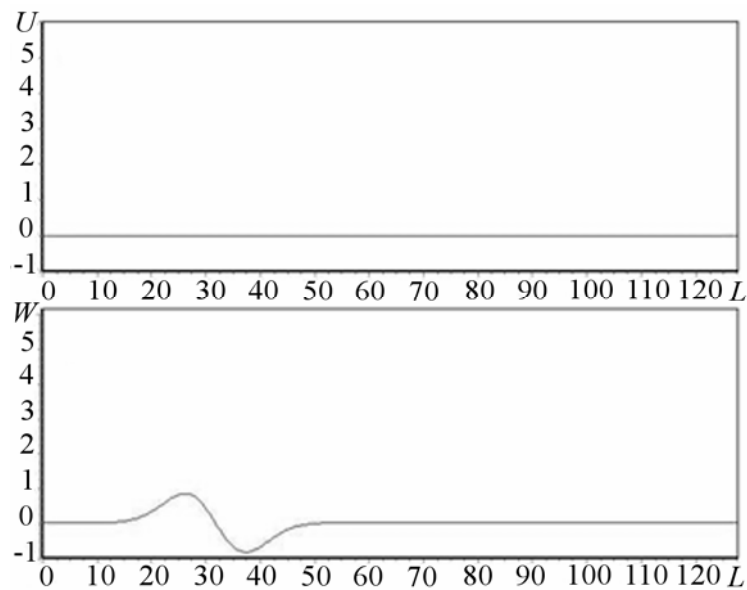


Рис. 4. Начальные условия ($t = 0$) для продольной (U) и сдвиговой (W) волн

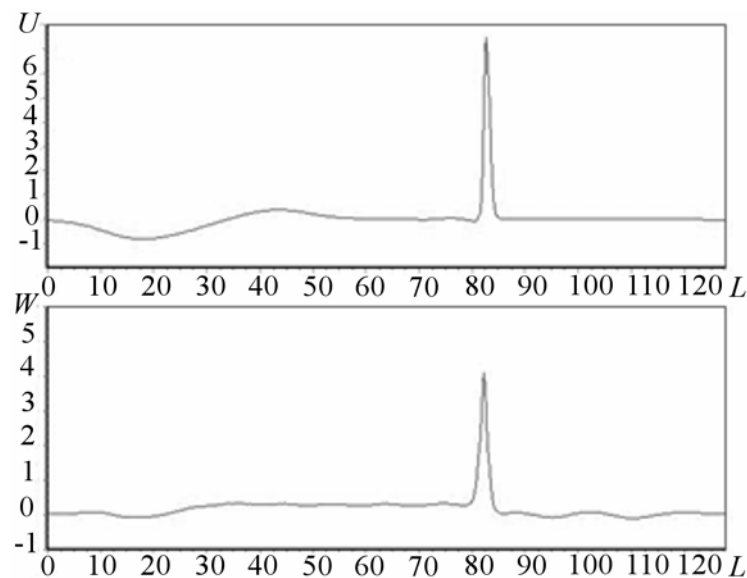


Рис. 5. Продольный (U) и сдвиговой (W) солитоны в момент времени $t = 34$

На сложившуюся волновую картину интересное влияние оказывает изменение соотношения между коэффициентами нелинейности в уравнении для U , а именно, увеличение a_2 и уменьшение a_3 . Оставим прежние начальные условия для U и W (Рис. 4), но увеличим a_2 до 4,5, одновременно уменьшив a_3 в два раза. Таким образом, имеем: $a_1 = 2$; $a_2 = 4,5$; $a_3 = 0,5$; $a_4 = 0,01$; $a_5 = 2$; $a_6 = 2$; $a_7 = 0,2$; $C = -0,5$.

Эволюция возмущения W качественно мало чем отличается от предыдущего случая, разве что высота уединенного волнового импульса не так велика. В то же время перед образованием солитона возмущение U проходит через определённый переходный процесс. Конкуренция эффектов нелинейности 2-го (в уравнении для U) и 3-го (в уравнении для W) порядков приводит к тому, что передний фронт возмущения движется немного быстрее заднего, что приводит к образованию П-образного импульса, движущегося со скоростью солитона функции W (Рис. 6). Однако через некоторое время задний фронт начинает догонять передний, и П-образный импульс превращается в обычную уединённую волну (Рис. 7).

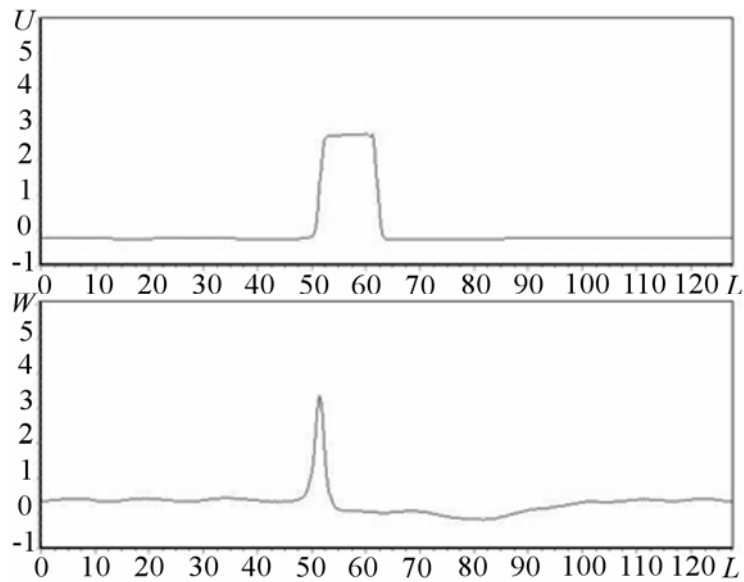


Рис. 6. П-образный импульс продольной волны (U) и сдвиговой солитон (W)

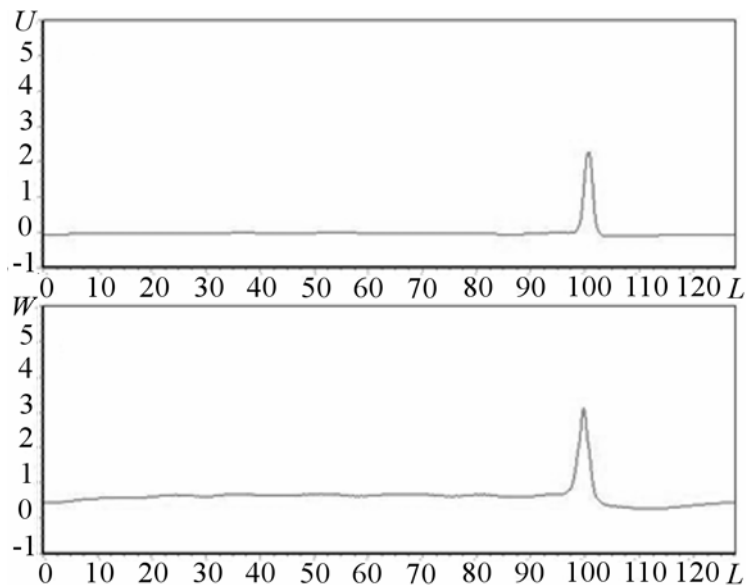


Рис. 7. Продольный (U) и сдвиговой (W) солитоны

Литература

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des Corps Deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
2. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328с.
3. *Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П.* Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С.40-47.
4. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения. – Таллин: Изд-во «Валгус», 1984. – 104 с.
5. *Новиков А.А.* О применимости метода связанных волн к анализу нерезонансных взаимодействий // Изв. вузов. Радиофизика. – 1976. – Т. 19, № 2. – С.321-323.
6. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
7. *Press W.H., Teukolsky S.L., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical recipes in C. The art of scientific Computing. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 680 p.

Поступила в редакцию 26.11.09

Сведения об авторах:

Ерофеев Владимир Иванович, дфмн, проф., зам. дир., Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благодравова РАН (Нф ИМАШ РАН), 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, 85; E-mail: erf04@sinn.ru

Землянухин Александр Исаевич, дфмн, проф., зав. каф., Саратовский государственный технический университет (СГТУ), 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77; E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

Катсон Владимир Маркович, асп., СГТУ, E-mail: bobah311@yandex.ru

Шешенин Сергей Финогентович, ктн, снс, Нф ИМАШ РАН, E-mail: shesheninsf@nnov.transneft.ru