

УДК 531+550+551+622

## МЕХАНИКА КОССЕРА ДЛЯ НАУК О ЗЕМЛЕ

И.А. Гарагаш, В.Н. Николаевский

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*

Механика Коссера учитывает динамику поворотов частиц, слагающих сплошную среду, если такая кинематическая возможность имеется. Для этого – в соответствии с третьим законом Ньютона – необходимо составить континуальное уравнение для моментов количества движения единичного объема среды. Впервые подобное уравнение построено в книге Е. и Ф. Коссера [1] при рассмотрении динамики упругих деформируемых сред. Причем был произведен правильный вычет внешних моментов, соответствующих повороту объема в целом. В природе часто наблюдаются явления, которые вполне можно объяснить ротационной динамикой индивидуальных частиц, слагающих среду – фрагментов горных массивов или же вихрей турбулентной атмосферы. В предлагаемой статье приведены примеры, которые иллюстрируют возможности механики Коссера в изучении природных процессов, стоящие вне традиционных университетских курсов, при условии дополнительного введения вязких, пластических или иных реологических свойств.

*Ключевые слова:* континуум, механика Коссера, геомеханика, волны ротации, торнадо, пластичность, микроструктура, поровое пространство

## COSSERAT MECHANICS IN EARTH SCIENCES

I.A. Garagash and V.N. Nikolaevskiy

*Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow, Russia*

Cosserat mechanics takes into account the rotational dynamics of particles composing a continuous medium, which is of special importance in the case of kinematics. For this purpose, in accordance with Newton's third law, it is necessary to create a continuum equation for the moments of momentum of a unit volume of the medium. Such an equation was first constructed in the book by E. and F. Cosserat [1] who considered the dynamics of elastic deformable media. Correct deduction of the external moments corresponding to the volume rotation as a whole was made. The phenomena that can be explained by the rotational dynamics of the individual particles composing the environment - fragments of rock massifs or whirlwinds of a turbulent atmosphere - are frequently observed in nature. The paper presents some examples illustrating the capabilities of Cosserat mechanics falling outside the scope of traditional University lecture courses. To this end, its classical form is supplemented by viscous, plastic or other rheological properties.

*Key words:* continuum, Cosserat mechanics, geomechanics, rotation waves, tornado, plasticity, microstructure, pore space

### 1. Введение

В 2009 году исполнилось 100 лет со дня публикации теперь известной монографии братьев Коссера (E. Cosserat, F. Cosserat. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hartmann et Fils, 1909, p.228). Эта книга посвящена, по существу, пропущенной главе классической механики континуума — ротационной динамике частиц, находящихся в сплошной среде.

Судьба этого раздела науки драматична. Русский академик Орест Данилович Хвольсон в начале 20 века, в ходе своей научной командировки, встречается с Коссера и

помещает их результаты в свой 4-томный курс физики (Курс физики. Санкт-Петербург, 1914), который сыграл известную роль в становлении физики и, прежде всего, атомной физики в России. Этот курс был переведен на французский язык и издан в Париже под редакцией братьев Коссера: O.D. Chwolson. *Traité de Physique*. Paris: A. Herman, 1914. Тем не менее, и в России и за рубежом этому направлению науки современниками не уделяется достойного внимания. Так Б.Г. Галеркин приобретает книгу в 1925 году, но оставляет ее неразрезанной!

В 50-х годах 20 века К. Труделл (Университет Дж. Гопкинса, Балтимор, США) обращает внимание на предложения Коссера и включает их в свои обширные монографии. Вслед за ним так же поступает А.К. Эринген (Принстон, США). После этого начинается массовое увлечение возможностью соответствующего формального расширения континуальных теорий.

Важнейшую роль сыграл первый пример конкретного приложения динамики Коссера к теории жидких кристаллов (Э.Л. Аэро и Дж. Эриксен). Однако не сразу были найдены не столь экзотические примеры, где механика Коссера оказалась необходимой. В теории турбулентности Д. Бэтчелора, как и в первых изданиях курса Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, существовали запретительные теоремы на асимметрию тензора напряжений. Лишь относительно недавно эти недоразумения устранены.

В предлагаемой статье отражены результаты нашего поиска приложений приемов Коссера в науках о Земле, и мы надеемся, что они достаточно убедительны.

Укажем, что использовались такие обозначения:  $\Phi_i$  — полный угол поворота элемента;  $\phi_i = \Phi_i - \Omega_i$  — собственный угол поворота (спин) фрагмента;  $\Omega_i = (1/2)\varepsilon_{ijk}\partial u_j / \partial x_k$  — средний поворот;  $M_i = \gamma\phi_i$  — объемный момент сил;  $\mu_{ij} = \Lambda_{ijkl}\partial\Phi_k / \partial x_l$  — тензор моментных напряжений;  $\gamma, \Lambda_{ijkl}$  — реологические коэффициенты пропорциональности;  $\rho_0$  — истинная плотность фрагмента, а  $\rho_0 J$  — его приведенный (на единицу объема) момент инерции.

## 2. Маятниковая волна во фрагментированном массиве

Уравнение динамики упругих поворотов в массиве, состоящем из фрагментов, имеет вид:

$$\rho_0 J (\partial\Phi_i / \partial t) + M_i(\phi_k) = \partial\mu_{ij} / \partial x_j, \quad (1)$$

причем в определяющих уравнениях  $\gamma$  — упругий модуль поворота,  $\Lambda_{ijkl}$  — упругие модули моментных напряжений.

При наиболее простом движении смещения  $u_i$  жестко связаны с углом поворота векторным правилом  $u_i = (1/2)\varepsilon_{ijk}b_j\Phi_k$ . Здесь  $\varepsilon_{ijk}$  — альтернирующий тензор Леви–Чивиты,  $b_j \sim \sqrt{J}$  — плечо поворота (радиус блока). Если  $\Phi_k \equiv \phi_k$ , уравнение (1) сводится к нелинейному уравнению Клейна–Гордона, которое в плоском случае — при  $\Phi_3 \equiv \Phi$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $M = M_3$  и  $\phi = \phi_3$  — имеет вид:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + c_2^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} - N(\Phi), \quad (2)$$

где  $c_i = \sqrt{\frac{\Lambda_i}{\rho_0 J}}$  — компоненты упругой скорости поворотов,  $N = \frac{M}{\rho_0 J}$  — приведенный объемный момент.

Тип формирующихся колебаний непосредственно виден в случае одномерной стационарной волны (вдоль оси  $x = x_1$ ,  $c = c_1$ ), когда (2) сводится к уравнению математического маятника:

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} = \frac{N(\Phi)}{(c/V)^2 - 1}. \quad (3)$$

Здесь  $c > V$ ,  $\tau = \left(\frac{x}{V}\right) - t$ , где  $V$  — скорость ротационной (маятниковой) волны.

Если объемный момент  $M$  определяется восстанавливающей силой  $f$  и радиусом поворота фрагмента  $R \sim \sqrt{J}$ , то есть  $M = f R \sin \phi$ ,  $N = f \sin \phi / (\rho_0 \sqrt{J})$  [2], то уравнение (2) принимает вид уравнения  $\sin$ -Гордона. Этим самым подтверждается, что в геологической среде, которая практически всегда фрагментирована, могут распространяться медленные волны, например, в форме кинка:

$$u = \Phi \sqrt{J} = 4\sqrt{J} \operatorname{arctg} \left( \exp \frac{(x-Vt)\sqrt{f/\rho_0 R}}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \right). \quad (4)$$

### 3. Нелинейная волна в зоне дробления ядерного взрыва

Обратимся к особой волне, обнаруженной при экспериментах в массиве каменной соли, разбитом ранее ядерным взрывом [2]. Сейсмические испытания проводились в 1972–73 годах, применялась тротиловая взрывчатка массой от 30 до 2000 кг, которая помещалась в боевую скважину. Измерения проводились на той же глубине, но в других скважинах. Приведенные (к корню кубического веса взрывчатки) расстояния датчиков составляли 12,5–350 м/кг<sup>1/3</sup>. На расстояниях 30–80 м/кг<sup>1/3</sup> проявились особые колебания с частотой 2 Гц и ниже, что в монолитном массиве соответствует взрыву заряда в несколько килотонн. Относительная (ко всему спектру) энергия этих низкочастотных колебаний нарастала вплоть до максимума на расстоянии  $\sim 50$  м/кг<sup>1/3</sup>, тогда как все остальные частоты на таком удалении становились уже незначительными. Иначе говоря, сейсмическая энергия концентрировалась сначала на низких частотах, а только потом, на дальних расстояниях от места взрыва, — на частотах 10–20 Гц, обычных для сейсмических процессов.

Оценки показали [2], что частота и дисперсия скорости в 100 м/с соответствовали предварительной «нарезке» массива на блоки с характерным размером  $\sim 10$  м, причем, судя по анизотропии затухания, в массиве при ядерном взрыве сформировались вертикальные трещины. Следовательно, нелинейные свойства среды должны были проявиться при беге волны в горизонтальном направлении.

Действительно, в эксперименте профиль волны не сохранялся во времени — его первые максимумы шли с большей скоростью (3000–6000 м/с), а последующие — с «упругой» скоростью от 700 до 1000 м/с, характерной для трещиноватого массива. Экспериментальный годограф наблюдаемого нелинейного расширения сигнала, отвечающий, по нашему предположению, волне поворотов блоков, приведен на рисунке 1.

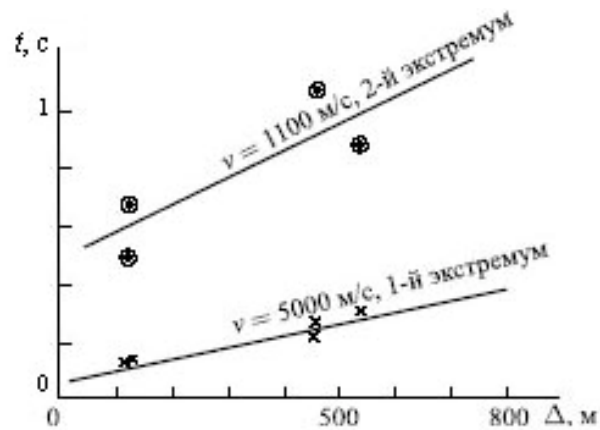


Рис. 1. Годографы (вступления) расширяющейся волны ( $\Delta = x - x_0$ ).

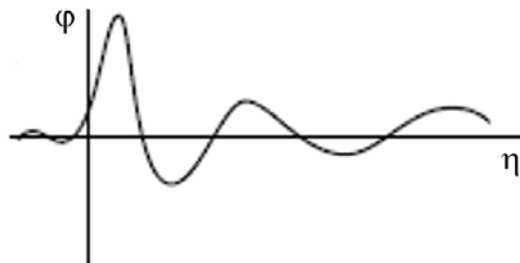


Рис. 2. Автомодельное решение уравнение sin-Гордона

Уравнение sin-Гордона (2), полученное для ротационных волн, имеет автомодельное решение  $\varphi = \varphi(\eta)$ , где  $\eta = \xi\tau$ ,  $\xi = \left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right) + t\sqrt{c}$ ,  $\tau = \left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right) - t\sqrt{c}$ , (Рис. 2).

По виду такой сигнал вполне соответствует записи смещения частицы в наблюдаемой расширяющейся волне и только асимптотически принимает значение сейсмической скорости  $c$ , а его максимумы с координатой  $\eta_i$  перемещаются в реальном пространстве с различными скоростями [2]

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{tc^2}{\sqrt{\eta_i + c^2t^2}}. \quad (5)$$

Укажем, что недавний выпуск Бюллетеня Сейсмологического общества Америки [3] полностью посвящен ротационным волнам Коссера (см также работы [4, 5]). Формальные решения линейных уравнений в [3] дополнены анализом сейсмограмм и описаниями волны поворотов блоков геофизической среды при землетрясениях, а также специальных приборов, нацеленных на фиксацию поворотных волн. Приведенные характерные частоты подобных волн составляют  $\sim 5$  Гц, а скорости ниже, но все же близки к скоростям  $P$ - и  $S$ -волн (в частности они отвечают первой и второй волнам землетрясения). Следует иметь в виду, что средний поворот элемента среды распространяется — в идеале — со скоростью  $S$ -волн, и только избыточный (собственный) поворот блока (спин  $\phi$ ) соответствует волне Коссера.

#### 4. Тектонические волны

Крайне медленные ротационные волны вполне могут объяснять механизм перераспределения тектонических напряжений. Действительно, волна, адекватная тектоническим напряжениям, должна быть инерционной и несравнимо медленнее сейсмических волн [6].

В этой связи обратимся к более полному виду уравнений динамики связанных поперечных смещений  $u$  и поворотов  $\Omega$ ,  $\phi$  [6]. В одномерном случае они имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_G^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\gamma \frac{\partial \sin \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_\Lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -\beta \frac{\partial \sin \phi}{\partial x}, \quad \Phi = \Omega + \phi, \\ c_G^2 &= G / \rho, \quad c_\Lambda^2 = \Lambda / J\rho, \quad \beta = N / J\rho, \quad \gamma = N / \rho, \quad \Omega = \partial u / \partial x. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $c_G$  и  $c_\Lambda$  — соответственно скорости поперечной и ротационной волн,  $G$ ,  $\Lambda$  — модули сдвига и поворота. Если пренебречь средним вращением  $\Omega$ , то второе уравнение системы (6) сводится снова к выражению (2), а поперечные смещения вычисляются по первому из ее уравнений. Тогда приведенное выше решение (4) при специальном подборе параметров отвечает волне, распространяющейся со скоростью всего в  $V = 10$  км/сутки = 0,12 м/с (Рис. 3), что согласуется с нашими представлениями о тектонической волне.

Заметим, что приведенное значение  $V$  соответствует скорости распространения радонового сигнала (эмиссии эманации радия), говорящего о перераспределении тектонических напряжений и отождествляемого, в частности, с предвестником землетрясения (см., например, [7]).

В расчетах, выполненных в работе [6], полагалось:  $c_G = 1200$  м/с;  $c_\Lambda = 1$  м/с;  $\rho = 3$  г/см<sup>3</sup>;  $G = 4,3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>;  $\sqrt{J} = 100$  м;  $\beta = 10$  с<sup>-1</sup>;  $\gamma = 1,4 \cdot 10^8$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. На первом этапе расчет проводился в пренебрежении средним поворотом (см. рисунок 3). Величина  $\Omega$  вычислялась на втором этапе.

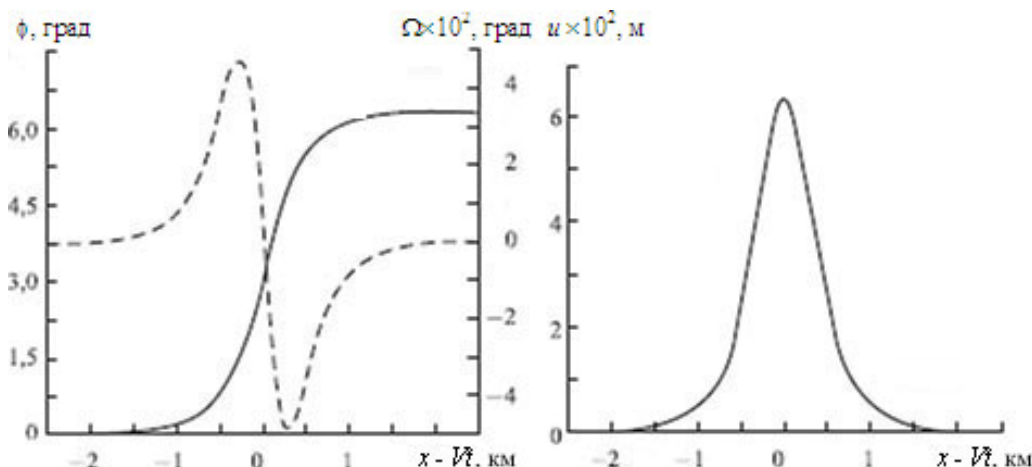


Рис. 3. Тектоническая волна в пренебрежении  $\Omega$  (а) при  $V < c_\Lambda$  ( $V = 10$  км/сутки = 0,12 м/с; сплошная линия соответствует кинке  $\phi$ , пунктирная – профилю  $\Omega$ ) и профиль поперечного смещения (б)

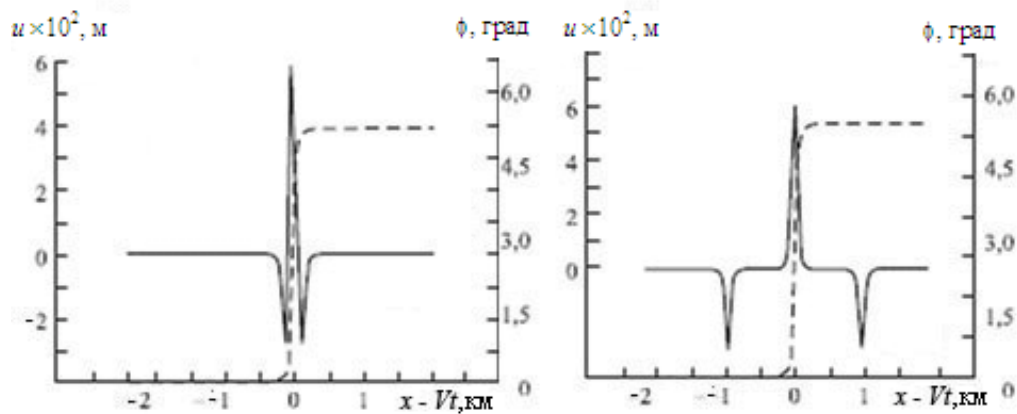


Рис. 4. Эволюция профиля тектонической волны (кинка) согласно полной системе уравнений за 100 (а) и 800 (б) итераций счета; шаг по времени 0,001 с

На рисунке 4 представлено численное решение полной системы (6) в виде последовательных профилей волн в подвижных (имеющих скорость  $V$ ) координатах. Для собственных поворотов блоков  $\phi$  получается решение типа кинка (Рис. 4 — пунктирная линия), от которого со скоростью  $c_G \gg V$  разбегаются пики поперечных сдвигов. Видно, что профиль волны расширяется. И, действительно, оказалось, что собственные повороты блоков (фрагментов) среды в волне намного превосходят их поворот, определяемый трансляционными смещениями, то есть  $\phi \gg \Omega$ .

## 5. Электрические сигналы

Пусть в среде распространяется волна, характеризующаяся продольными смещениями  $u$  и поворотами  $\phi$ :

$$u_i = \delta_{i3} \alpha(x - Vt), \quad \phi_i = \delta_{i3} \beta(x - Vt). \quad (7)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  — профили волны,  $\delta_{i3}$  — единичный тензор,  $V$  — скорость волны. Электромагнитное поле, связанное с этой волной, имеет напряженности  $E_i = \delta_{i3} e(x - Vt)$ ,  $H_i = \delta_{i2} h(x - Vt)$ . Если внутренняя энергия среды включает в себя пондеромоторные эффекты, то в первом приближении получим [8]:

$$e = -\xi_1 c_0^{-1} V \left( \beta + 2^{-1} \partial \alpha / \partial x \right), \quad (8)$$

$$h = -4\pi \sigma \xi_1 c_0^{-1} V \left( \int_{-\infty}^x \beta(y) dy + \frac{\alpha}{2} \right) + c_0^{-1} V \xi_2 \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Здесь  $c_0$  — скорость света в вакууме,  $\xi_i$  — электрокинетические параметры среды,  $\sigma$  — электропроводность. Заметим, что кинетика генерации поля при таком подходе не детализируется — она может определяться или перемещениями ионов в жидкости, или сухим трением, или нарушениями среды под воздействием волны. Существенно, что в бегущий электромагнитный сигнал (8) входят слагаемые, пропорциональные как смещению и повороту, так и их градиентам, а потому он будет содержать и кинки, и импульсы. Таким образом, электромагнитные сигналы, наблюдаемые при мониторинге предвестников землетрясений [7], следует связывать с тектоническими волнами.

## 6. Ползучесть горных пород как источник сейсмического шума

Для объяснения эффекта сейсмического шума [7] построим математическую модель, согласно которой трансляционное движение происходит по вязким законам, тогда как изменения плотности и модули микроповоротов соответствуют законам теории упругости. Результирующее уравнение динамики поворотов [9] включает источник энергии  $F(x)$ , определяемый полем скорости среднего сдвига, и упругую энергию собственных поворотов  $w(\phi)$

$$J\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 4\beta \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial w}{\partial \phi} = F, \quad (9)$$

где появилась вращательная вязкость  $\beta$ . Малые возмущения  $\phi$  стационарного поля  $\phi_0(x)$  будут описываться уравнением

$$J\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 4\beta \frac{\partial \phi}{\partial t} + H\phi = 0. \quad (10)$$

Здесь  $H$  — оператор Шредингера

$$H = -\Lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad V = \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}.$$

Если  $V < 0$ , то стационарное решение уравнения (10) неустойчиво, а возникающие возмущения порождают сейсмическую волну поворотов — шум. Пример численного расчета спектра  $S$  величины  $\Delta\phi(t) = \phi(t) - \alpha$  (при  $x = L/2$ ) для случая  $w = w_0\phi^2(\phi - \alpha)^2$  ( $w_0$  и  $\alpha$  — постоянные) представлен на рисунке 5. При линейном масштабе блоков  $L \sim 2$  м массив излучает шум на частотах  $\sim 10$  Гц, что видно по резонансному усилению тех гармоник, которые отвечают масштабу  $L$  массива, пришедшего в движение:  $\omega_n = \pi(n/L)\sqrt{\Lambda/J}$  (здесь  $n$  — целые числа).

Заметим, что результаты расчетов зависят только от параметров модели, но не от начальных условий. Это связано с существованием для уравнения (10) компактного аттрактора конечной размерности Хаусдорфа.

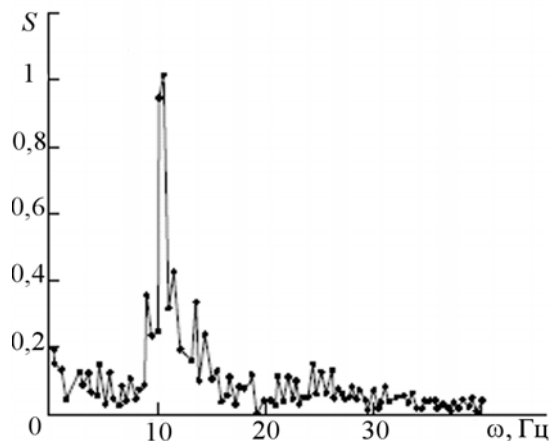


Рис. 5. Пример численного расчета спектра шума (спектр нормирован на свое максимальное значение)

## 7. Генерация ультразвука при распространении сейсмических волн

Разделение нелинейных волн на продольные, поперечные и ротационные достаточно условно. Этими названиями пользуются для волн, которые в линейном пределе отвечают указанным свойствам. Обратимся к нелинейным продольным волнам [10, 11] (далее в этом разделе используются обозначения, подробно описанные в цитируемых работах), уравнения которых имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - \delta u_{xxx} - \nu u_x u_{xx} + 2\chi \phi_x \phi_{xx} + Q^u &= 0, \\ \phi_{tt} - c_2^2 \phi_{xx} + \omega_0^2 \phi - u_x (c_2^2 \phi_{xx} - \mu \phi) + Q^\phi &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

причем продольная деформация  $u_x$  связана с изменениями плотности среды  $\rho$  соотношением

$$\rho_0 / \rho = 1 + u_x,$$

а нелинейные взаимодействия более высокого порядка собраны в слагаемые  $Q^u$  и  $Q^\phi$ .

Такие волны могут передавать свою энергию высокочастотным колебаниям за счет длинно-коротковолнового резонанса (ДКВР). Чтобы показать эту возможность, обратимся к дисперсионным уравнениям линейных волн системы (11)

$$\omega_s^2 = c_1^2 k^2 + \delta k^4, \quad \omega_y^2 = c_2^2 k^2 + \omega_0^2, \quad (12)$$

которые вполне можно относить, соответственно, к сейсмическим (с частотой  $\omega_s$ ) и ультразвуковым (с частотой  $\omega_y$ ) колебаниям, поскольку  $\omega_0^2 = 4\gamma / (\rho_0 J)$ , а момент инерции  $J$ , приведенный на единицу объема среды, имеет порядок гидравлической проницаемости среды  $\sim 10^{-12} \text{ м}^2$ . Как известно, резонанс реализуется при волновом числе  $k_*$ , таком, что групповая скорость ультразвука  $c_{yg}$  совпадает с фазовой скоростью сейсмической волны:  $c_s \equiv \omega / k = c_{yg} \equiv d\omega / dk$  (Рис. 6). Поскольку в резонансное условие входит производная по волновому числу, в реальной среде должен быть еще один источник ультразвука [12] с частотой близкой к  $c_{yg} k_*$ , например, такой как при сухом трении на контактах между зернами среды.

Полный анализ ДКВР проведен в работах [10, 11]. Здесь укажем лишь, что длина волны возбуждаемого ультразвука  $\lambda^*$  практически не зависит от частоты возбуждающего сигнала  $\lambda_0$

$$\lambda^* = \frac{2\pi c_2 (c_2^2 - c_1^2)^{1/2}}{c_1 \omega_0}, \quad (13)$$

если  $\frac{\lambda^*}{\lambda} = \varepsilon \ll 1$ , и определяется только масштабом среды. Другими словами, длинные сейсмические волны могут возбуждать в горной породе колебания отдельных зерен, необходимые, например, для воздействия на капли остаточной нефти в порах горного массива.



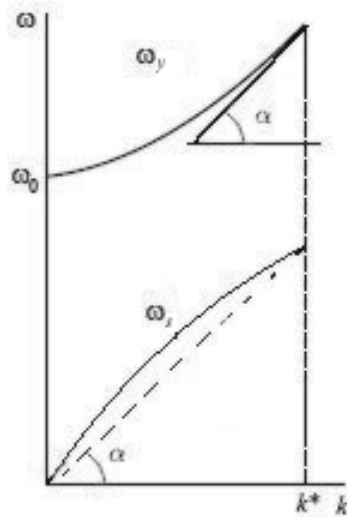


Рис. 6. Условия проявления длинно-коротковолнового резонанса

Коэффициент перехода сейсмической энергии на уровень ультразвука (перед диссипацией в тепло) оценивается в [11] и для слабых волн в сильно фрагментированном массиве составляет  $K \sim 10^{-3} 1/\text{м}$ .

## 8. Генерация низких частот в спектре сигнала

Рассмотрим уравнения Коссера, в которых вязкость линейна, а повороты являются нелинейно-упругими. Динамике такой среды отвечает система дифференциальных уравнений [13, 14]:

$$\begin{aligned} \rho_0 u_{tt} - (1/2)\lambda \partial u_{xx} &= -(1/2)(\beta \phi_t + dW/d\phi)_x, \\ \rho_0 J \phi_{tt} + \beta \phi_t + dW/d\phi &= -(1/2)\rho_0 J u_{t,xx}, \\ dW/d\phi &= (\xi + \xi_1 \phi + \xi_2 \phi^2) \phi. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь коэффициенты  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  характеризуют вклады микровращений.

Колебания в бегущей гармонической волне  $u = -a_0 \cos(\omega t - kx)$ , где  $\omega = kV$ ,  $V = \frac{\lambda}{2} \rho_0$ , соответствуют осциллятору Дюффинга с внешней гармонической силой

$$\varphi_{\eta\eta} + \lambda \varphi_{\eta} + (\kappa_0 + \kappa_1 \varphi + \varphi^2) \varphi = a_0 \sin 2\pi(\eta - \eta_0). \quad (15)$$

Здесь  $\varphi(t, x) = (1/2\pi) \sqrt{\rho_0 J / \xi_2} \omega \phi(t, x)$ ,  $\eta = \omega t / (2\pi)$ , а также коэффициенты  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  заменены на  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ .

Осциллятор характеризуется отображением Пуанкаре, последовательное применение которого отвечает появлению вторичных волн с амплитудами, сопоставимыми с исходной. Численное моделирование процесса отображений привело к результатам, показанным на рисунке 7 [13], где графики соответствуют изменениям спектра  $S(f)$ , нормированного на свое максимальное значение. Исходный сигнал (а) с максимумом, соответствующим частоте  $f_0 = 2000$  Гц, возбуждает колебания (б) с частотой в 1000 Гц, то есть вызывает удвоение периода колебаний.

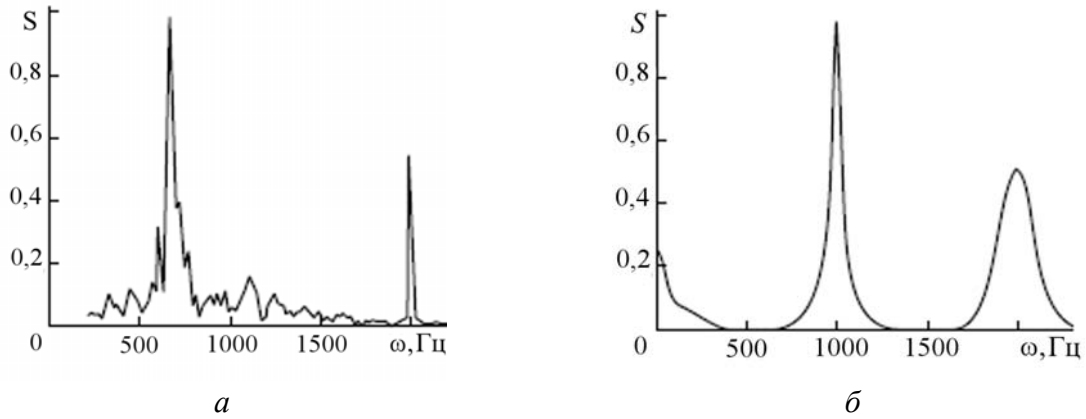


Рис. 7. Расчет преобразования спектра первичного сигнала (а) во вторичный с удвоением периода (б)

Эксперимент [15] показал удвоение и даже утроение периода колебания. Полевые опыты с влажным песком [16] выявили общую тенденцию сейсмической волны к переходу на низкую частоту, являющуюся доминантной в среде испытания. Эффект доминантной частоты отвечает резонансу [17] с нелинейным внутренним осциллятором, выполняющим также трансверсальные колебания.

## 9. Математическая модель превращения турбулентного облака в торнадо

Классическая теория турбулентности описывает хаотическое течение жидкости, но из рассмотрения, как правило, выпадают собственно вихри — энергонесущие элементы этого течения. Если же прибегнуть к механике Коссера, возможность учета вихрей видна непосредственно. Действительно, малый (мезо) вихрь должен подчиняться динамике Ньютона для конечного вращающегося тела. Соответствующие континуальные уравнения [17, 18] составляются так же, как и в динамической теории упругости. Однако теперь в них фигурируют напряжения Рейнольдса  $R_{ij}$ , осредненные по ориентированным площадкам (как и в твердом теле — согласно Коши), момент инерции вихря  $J$ , меняющийся вместе с вихрем, а также более сложное моментное взаимодействие с трансляционным течением, определяемое нелинейной зависимостью коэффициента  $\gamma$  от угловой скорости (спина) вихря  $\phi$ :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho + \partial_j \rho U_j &= 0; & \rho \partial_t U_i + \rho U_j \partial_j U_i &= \partial_j (R_{ij} - \delta_{ij} P); & \varepsilon_{ijk} \partial_j U_k &= 2\Omega_i; \\
 \rho \partial_t M_i + \rho U_j \partial_j M_i &= \partial_j \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} R_{jk}; & M_i &= \rho J \Phi_i; & \Phi_i &= \Omega_i + \phi_i; \\
 \rho \partial_t J + \rho U_j \partial_j J &= \partial_j K_j \partial_j J; & \mu_{ij} &= \lambda \partial \Phi_i / \partial x_j; & \varepsilon_{ijk} R_{jk} &= \gamma(|\phi|) \phi_i.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь  $K_j, \lambda, \gamma$  — кинетические коэффициенты переноса,  $R_{ij} = \eta(\phi) \partial_j U_i$  — симметричная часть тензора напряжений Рейнольдса, включающая обычную турбулентную вязкость  $\eta(\phi)$ , но зависящую теперь от спина. Подобная нелинейность достаточна для присутствия в решении разрыва на границе с внешней спокойной атмосферой. Подробно система (16) рассмотрена в книге [19].

Численное решение системы (16) при задании начального облака мезовихрей с их скоростью вращения  $\phi_0$  реализовано в Институте системного программирования РАН в среде разработки параллельных программ для кластерных систем ParJava [20]. Поскольку среднее адиабатическое течение сухого воздуха вначале считалось нулевым,

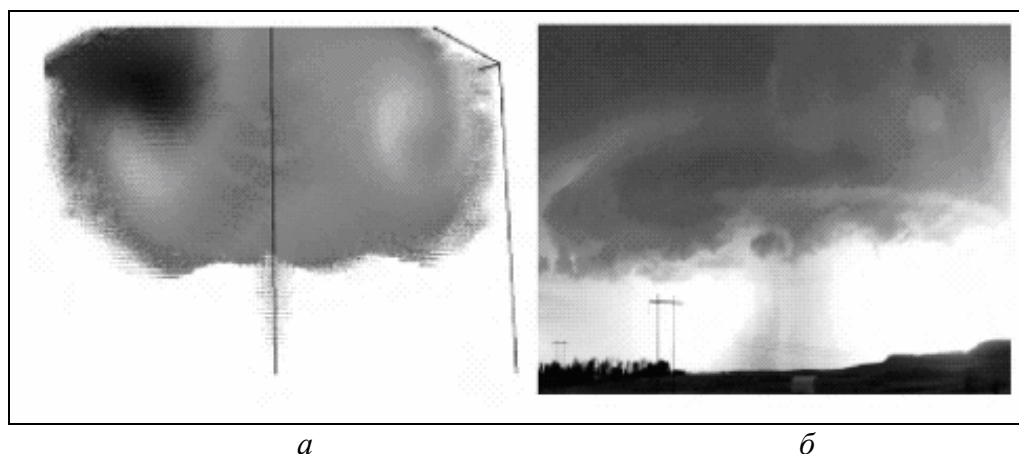


Рис. 8. Визуализация поля скоростей (а) и фотография урагана (б)

движение инициировалось объемным источником, соответствующим  $\phi_0$ , но постепенно угасающим. Происходил разгон среднего движения до значений скорости ветра в 35–43 м/с, а затем — замедление вследствие турбулентной и молекулярной вязкости до 12 м/с за полчаса. Такие порядки чисел соответствуют малым и слабым торнадо (класса Т2–Т4). Для достижения более длительного существования численного решения необходимо введение эффекта присутствия капель дождя или песчинок, обеспечивающих большой момент инерции, придающий устойчивость фигуре торнадо [19] и большее время на обмен моментами движения.

На рисунке 8 представлена 3D–визуализация поля скоростей на момент времени  $t = 164,5$  с. На части б рисунка приведена выполненная А.В. Паншиным фотография урагана (Монтана, США, 2005), на поверхности которого видны мезовихри.

## 10. Предельное равновесие рассеченных горных массивов

Для фрагментированной среды существует внутренний масштаб — характерный размер блоков. Это означает, что вектор напряжения на любой площадке осреднения имеет некоторый эксцентриситет, то есть кроме тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , вызывающих деформацию  $\varepsilon_{ij}$  тетраэдра Коши и его вращение  $\phi_i$ , действуют изгибающие и крутящие моменты  $m_{ij}$ , вызывающие кривизну  $\kappa_{kl}$  граней. Соответственно, кроме трех уравнений равновесия для напряжений  $\sigma_{ij}$ , должны выполняться условия уравновешенности моментов вокруг координатных осей  $x_i$ . Учет моментов приводит к асимметрии тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  (нарушению закона парности касательных напряжений) и появлению, наряду с макроскопическими вращениями  $\Omega_k = \varepsilon_{klm}(u_{m,l} - u_{l,m})/4$ , кинематически независимых микроповоротов  $\phi_i$  отдельных фрагментов. Отвечающие им кососимметричные слагаемые тензора деформации имеют вид  $\varepsilon_{[kl]} = \varepsilon_{klm}(\phi_m - \Omega_m)$ . Действие моментов  $m_{kl}$  приводит к изгибу блоков и появлению тензора кривизн (тензора микрополярных деформаций третьего ранга)  $\kappa_{kl} = \phi_{l,k}$ .

Поскольку пластическое течение фрагментированной среды складывается из проскальзывания блоков друг относительно друга, то для асимметричного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  предельное условие пластичности можно записать как обобщение известного условия Кулона–Мора [21], согласно которому первый и второй инварианты тензора напряжений

$$\sigma = \sigma_{ii} / 3, \quad \tau = \sqrt{(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})} \quad (17)$$

связаны между собой предельным соотношением

$$\tau = Y - \alpha \sigma, \quad (18)$$

где  $\alpha$  и  $Y$  — параметры сухого трения и сцепления соответственно.

В случае плоского деформированного состояния (деформации и напряжения не зависят от координаты  $x_3$  и  $\sigma_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ ) условие (18) имеет вид:

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2)} = Y - \frac{1}{2} \alpha (\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (19)$$

Рассмотрим равновесие элемента Коши с характерным размером  $h$  (Рис. 9) при асимметрии напряжений  $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ . Проектируя усилия на оси  $x_1$  и  $x_2$ , найдем напряжения  $\sigma_{nn}$  и  $\sigma_{n\tau}$  на диагональной площадке с нормалью  $n$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\psi + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \sin 2\psi, \\ \sigma_{n\tau} &= \frac{1}{2}(\sigma_{21} - \sigma_{12}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\psi - \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos 2\psi. \end{aligned} \quad (20)$$

Из соотношений (20) следует, что фигуративные точки напряженного состояния среды составляют круг Мора радиуса  $R_\sigma$  (Рис. 10)

$$(\sigma_{nn} - a_\sigma)^2 + (\sigma_{n\tau} - b_\sigma)^2 = R_\sigma^2, \quad (21)$$

поднятый над осью  $\sigma_{n\tau} = 0$  на величину  $\tau_a$ , определяемую асимметрией касательных напряжений:

$$a_\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -p, \quad b_\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{21} - \sigma_{12}) = \tau_a, \quad R_\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{21} + \sigma_{12})^2}.$$

Уравнение баланса моментов сил относительно точки С (Рис. 9) имеет вид:

$$m = m_{n3} - m_{23} \sin \psi - m_{13} \cos \psi = \frac{h}{\sqrt{2}} (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \sin 2\psi. \quad (22)$$

В пространстве  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{n\tau}$ ,  $m/h$ , где  $m$  — градиент полного изгибающего момента,  $\sigma_{nn}$  и  $\sigma_{n\tau}$  — нормальное и касательное напряжения, входящие в уравнения (20) и (22), определяют эллипс [22], наклоненный к плоскости  $\sigma_{nn}, \sigma_{n\tau}$  под углом  $\theta$  и проецирующийся на нее в круг Мора (21) (Рис. 11;  $\beta$  и  $\theta$  — углы Эйлера). Масштаб оси моментов  $m/h$  показывает, что чем меньше плечо  $h$  рассматриваемой части среды, тем сильнее проявляется ротационный эффект.

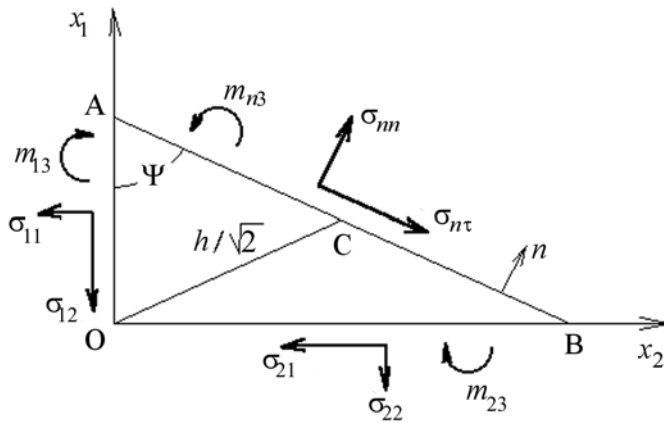


Рис. 9. Равновесие элемента Коши

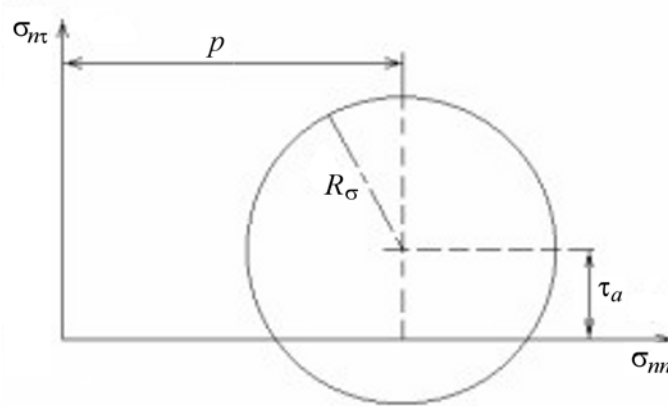


Рис. 10. Круг Мора, поднятый над осью  $\sigma_{n\tau} = 0$  на величину  $\tau_a$

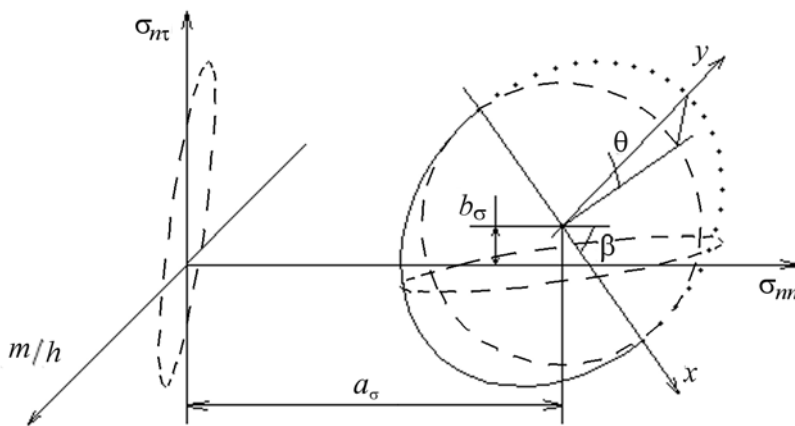


Рис. 11. Эллипс, наклоненный к плоскости  $\sigma_{nm}, \sigma_{n\tau}$  под углом  $\theta$

Пространственная кривая (20), (22) действительно является эллипсом. Введем в рассмотрение радиус-вектор  $r_i$ , проведенный из центра круга Мора (21) в плоскости  $m = 0$ , и представим уравнение кривой в виде:

$$\vec{r} = (a_\sigma \cos 2\psi + c_\sigma \sin 2\psi) \vec{i} + (a_\sigma \sin 2\psi - c_\sigma \cos 2\psi) \vec{j} + b_\sigma \sqrt{2} \sin 2\psi \vec{k}. \quad (23)$$

Здесь  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — базовая тройка векторов,  $c_\sigma = (\sigma_{21} + \sigma_{12})/2 = \tau_s$ . Производная от (23) по углу  $\psi$  имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = 2(-a_\sigma \sin 2\psi + c_\sigma \cos 2\psi) \vec{i} + 2(a_\sigma \cos 2\psi + c_\sigma \sin 2\psi) \vec{j} + 2b_\sigma \sqrt{2} \cos 2\psi \vec{k}. \quad (24)$$

Согласно правилам дифференциальной геометрии нормаль  $\vec{n}_r$  к кривой определяется выражением

$$\vec{n}_r = \vec{r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = -b_\sigma \sqrt{2} (c_\sigma \vec{i} + a_\sigma \vec{j}) + (a_\sigma^2 + b_\sigma^2) \vec{k}. \quad (25)$$

Поскольку вектор  $\vec{n}_r$  не зависит от параметра  $\psi$ , он неизменен вдоль рассматриваемой кривой. Это означает, что кривая (23) лежит в плоскости

$$b_\sigma \sqrt{2} (c_\sigma \sigma_{nn} + a_\sigma \sigma_{n\tau}) - (a_\sigma^2 + b_\sigma^2) m/h = a_\sigma b_\sigma \sqrt{2} (b_\sigma + c_\sigma), \quad (26)$$

ориентация которой в пространстве задается нормалью (25).

В системе координат  $x, y$ , совмещенной с направлением главных осей, эллипс (23) имеет вид:

$$\frac{x^2}{I^2} + \frac{y^2}{D^2} = 1, \quad I^2 = R_\sigma^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{21} - \sigma_{12})^2, \quad D^2 = R_\sigma^2. \quad (27)$$

Для вычисления координат  $x, y$  в системе главных осей эллипса необходимо перенести начало координат в центр круга Мора и затем совершить два последовательных поворота на углы Эйлера: сначала относительно оси  $m/h$  на угол  $\beta$ , а затем на угол  $\theta$  относительно оси  $\sigma_m$  (Рис. 11). В результате получим

$$x = (\sigma_{nn} - a_\sigma) \cos \beta + (\sigma_{n\tau} - b_\sigma) \sin \beta \cos \theta + \frac{m}{h} \sin \beta \sin \theta, \quad (28)$$

$$y = -(\sigma_{nn} - a_\sigma) \sin \beta + (\sigma_{n\tau} - b_\sigma) \cos \beta \cos \theta + \frac{m}{h} \cos \beta \sin \theta,$$

$$\beta = \arctg \frac{\sigma_{n\tau} - b_\sigma}{\sigma_{nn} - a_\sigma}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{2} b_\sigma}{R_\sigma}. \quad (29)$$

Инвариантами эллипса напряжений при переносах и поворотах осей служат сумма квадратов полуосей эллипса

$$I^2 + D^2 = 2R_\sigma^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{21} - \sigma_{12})^2 = \frac{1}{4} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2)] = \tau^2 \quad (30)$$

и его эксцентриситет

$$E = \frac{|\sigma_{21} - \sigma_{12}|}{I\sqrt{2}}. \quad (31)$$

Сравнивая выражения (30) и (31), приходим к выводу, что в случае асимметрии тензора напряжений инвариант эллипса напряжений (30) имеет смысл интенсивности касательных напряжений. Таким образом, с предельным условием пластичности (19) связан предельный эллипс напряжений, наклон которого  $\theta$  к кругу Мора еще не определен и, возможно, зависит от реологической связи с асимметричными слагаемыми тензора деформации  $\varepsilon_{kl}$ .

Предельное условие (19) удовлетворяется тождественно с помощью тригонометрических соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\cos \vartheta [p - (Y + \alpha p \cos \vartheta) \cos 2\varphi], & \sigma_{22} &= -\cos \vartheta [p + (Y + \alpha p \cos \vartheta) \cos 2\varphi], \\ \sigma_{12} &= -(Y + \alpha p \cos \vartheta) [\sin \vartheta - \cos \vartheta \sin 2\varphi], & \sigma_{21} &= (Y + \alpha p \cos \vartheta) [\sin \vartheta + \cos \vartheta \sin 2\varphi], \end{aligned} \quad (32)$$

где  $p$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta$  — независимые параметры. При этом параметр  $\vartheta$  непосредственно связан с асимметрией поля напряжений  $\sigma_{[21]}$ . Действительно, из соотношений (19) и (32) имеем

$$\sigma_{[21]} = \sigma_{21} - \sigma_{12} = 2(Y + \alpha p \cos \vartheta) \sin \vartheta, \quad (33)$$

и, следовательно,

$$\vartheta = \arcsin(b_\sigma / \tau). \quad (34)$$

Сравнение (34) и (29) показывает, что параметр  $\vartheta$  и угол наклона эллипса  $\theta$  связаны между собой однозначной нелинейной зависимостью:

$$\sin \vartheta = \frac{R_\sigma}{\tau\sqrt{2}} \operatorname{tg} \theta. \quad (35)$$

Если микровращения отсутствуют (то есть  $\vartheta = 0$ ), соотношения (32) совпадают с известными зависимостями Надаи [23], а условие (19) — с традиционным условием Кулона–Мора в симметричной механике. При этом параметры  $p$  и  $\varphi$  приобретают простой физический смысл:  $p$  — среднее давление, а  $\varphi$  — угол наклона рассматриваемой площадки.

## 11. Перекачивание фрагментов среды в неупругом состоянии

Рассмотрим некоторые особенности деформирования фрагментированной среды в предельном равновесном состоянии [24, 25]. Обратимся к условию уравниваемости моментов вокруг координатной оси  $x_3$

$$m_{13,1} + m_{23,2} + (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0. \quad (36)$$

Пусть блоки пластически смещаются друг относительно друга, оставаясь при этом упругими. Иными словами, на макроуровне материал находится в состоянии

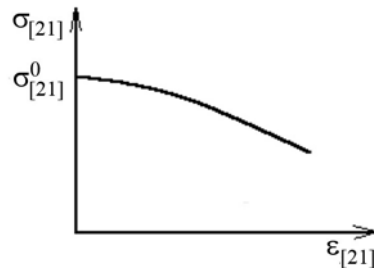


Рис. 12. Ниспадающая ветвь зависимости асимметрии касательных напряжений

пластического течения и подчиняется условию (19), но при этом на микроуровне сохраняется упругая связь между моментами и кривизнами  $B$ :

$$m_{13} = B\phi_{3,1}, \quad m_{23} = B\phi_{3,2}. \quad (37)$$

Кроме того, существует функциональная связь между асимметричными слагаемыми тензора напряжений  $\sigma_{[21]}$  и тензора деформации  $\epsilon_{[21]} = \phi_3$ . Согласно (33) и (35) тензор  $\sigma_{[21]}$  однозначно связан с углом наклона эллипса текучести  $\theta$  к плоскости Мора и, следовательно, с параметром  $\vartheta$ , характеризующим асимметрию поля напряжений. В первом приближении может быть постулировано линейное соотношение

$$\vartheta = \vartheta^\circ - S\phi_3, \quad (38)$$

где  $\vartheta^\circ$  — значение параметра  $\vartheta$  к моменту начала пластического течения,  $S$  — некоторая константа. Тогда уравнение (38) играет роль реологической связи между тензорами  $\sigma_{[21]}$  и  $\epsilon_{[21]}$ , выраженной через параметры  $\vartheta$  и  $\phi_3$ . Константа  $S$  может быть и отрицательной, и положительной. В последнем случае, как следует из соотношения (34), реализуется ниспадающая ветвь зависимости асимметрии касательных напряжений  $\sigma_{[21]}$  от  $\epsilon_{[21]}$  (Рис. 12). Иначе говоря, происходит разупрочнение фрагментированного материала вследствие уменьшения коэффициента трения качения между блоками.

## 12. Пластическая волна во фрагментированной среде

Подставляя (32), (37) в (36) и используя соотношение (38), для случая инерционного движения приходим к следующему виду уравнения динамического поведения фрагментированной среды:

$$\ddot{\vartheta} - \frac{B}{J} \nabla^2 \vartheta - \frac{2S}{J} (Y + \alpha p \cos \vartheta) \sin \vartheta = \left( \vartheta^\circ - \frac{B}{J} \nabla^2 \vartheta^\circ \right) - S \left( \ddot{\phi}_3 - \frac{B}{J} \nabla^2 \phi_3 \right). \quad (39)$$

Согласно этому уравнению при  $\alpha = 0$ ,  $\vartheta^\circ = \text{const}$  и неизменных поворотах  $\phi_3$  распространение одномерного динамического возмущения описывается уравнением  $\sin$ -Гордона

$$\ddot{\vartheta} - \frac{B}{J} \vartheta_{,11} = \frac{2S}{J} Y \sin \vartheta. \quad (40)$$



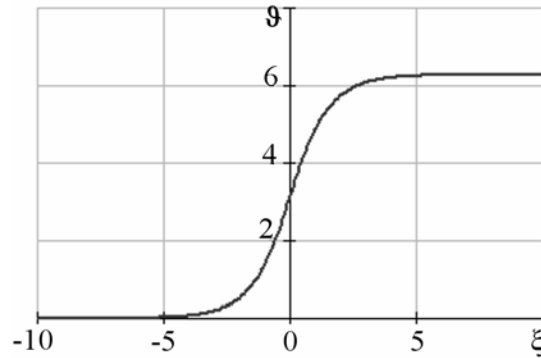


Рис. 13. Волна с неизменным профилем в виде перегиба (кинк)  $\vartheta(\xi)$

Уравнение (40) ранее предлагалось Я.И. Френкелем и Т.А. Канторовой для описания одномерной динамики дислокации (микронесителя пластичности) в кристаллической решетке [27]. В статье [28] подобное уравнение выведено для упруго-ротационной волны, причем правая часть его отвечает восстанавливающему моменту. Это же уравнение получено в [24] для пары сил кручения блоков фрагментированного массива, находящегося в пластическом состоянии.

Если происходит упрочнение, тогда  $S < 0$ , и решением уравнения (40) является кинк — волна с неизменным профилем в виде перегиба по переменной  $\vartheta$  [29], обладающая свойствами солитона:

$$\vartheta = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \exp \frac{(x - vt) \sqrt{2SY/J}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right]. \quad (41)$$

Здесь  $c = \sqrt{B/J}$ ,  $v$  — скорость солитона.

На рисунке 13 приведен пример кинка, движущегося вдоль оси  $\xi = x - vt$ . Известно [30], что скорость солитона растет с его энергией

$$E \sqrt{1 - Jv^2/B} = E_0, \quad (42)$$

где  $E_0 = \text{const}$ . Предельный случай определяется равенством солитонной и волновой скоростей

$$v = c = \sqrt{B/J}, \quad (43)$$

что можно понимать как переход от солитона к осцилляциям [31], распространяющимся со скоростью линейной волны собственных поворотов блоков.

Если же имеет место разупрочнение, то  $S > 0$  и справедливо периодическое решение, называемое бризером:

$$\vartheta = 4 \operatorname{arcsin} \left\{ a \sin \left[ b \left( 2 \frac{SY}{J} \right)^{1/2} t \right] / b \operatorname{ch} \left[ a \left( 2 \frac{SY}{B} \right)^{1/2} x_1 \right] \right\}, \quad a^2 + b^2 = 1. \quad (44)$$

Рисунок 14 содержит пример бризера, построенного в соответствии с формулой (44) в точке  $x_1 = 0$ .

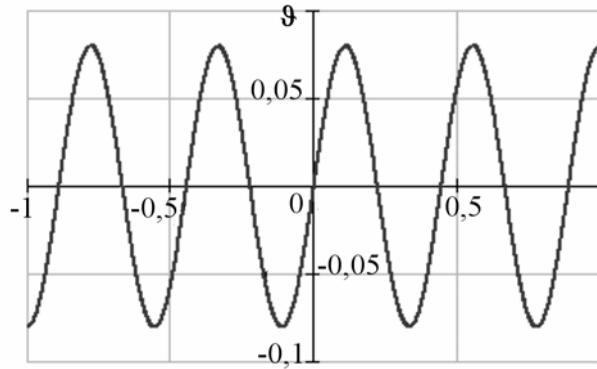


Рис. 14. Периодическая волна (бризер)  $\vartheta(t)$

В случае однородного поля вращений блоков параметры  $\vartheta$  и  $\phi_3$  не зависят от координат, и уравнение (39) сводится к обобщенному уравнению Дуффинга:

$$\ddot{\vartheta} - \frac{2S}{J} Y \sin \vartheta = -S \ddot{\phi}_3, \quad \alpha = 0, \quad \vartheta^\circ = \text{const}, \quad (45)$$

если считать правую часть уравнения (45) возбуждающим полем, кинематически создаваемым основным пластическим течением. Знак константы  $S$  при этом не существен.

Особенностью однородного уравнения (45) является наличие двух устойчивых состояний равновесия. Действительно, когда появляется периодическое внешнее воздействие  $\phi_3 = f \cos \lambda t$  и затухание, пропорциональное скорости изменения  $\vartheta$ , то возникает хаотическое движение [32]. Таким образом, акустическая эмиссия возникает как в ползущем горном массиве [33], так и при стационарном пластическом течении среды с микроструктурой.

В случае осцилляции среднего давления (что возможно в случае вибрационного воздействия на пласт)

$$p = C \cos(\omega t) \quad (46)$$

уравнение (39) сводится к уравнению вида

$$\ddot{\vartheta} - \frac{B}{J} \vartheta_{,11} = \frac{2S}{J} [Y + \alpha C \cos(\omega t)] \vartheta. \quad (47)$$

Здесь  $C$  — константа,  $\omega$  — частота.

Из уравнения (47) следуют уравнения параметрических колебаний Матье [34]

$$\ddot{\vartheta} - (a - 2q \cos \tau) \vartheta = 0, \quad a = \frac{2SY}{J\omega^2}, \quad q = \frac{S}{J} \frac{\alpha C}{\omega^2}. \quad (48)$$

Таким образом, в силу известных особенностей решения уравнения Матье, для блочной среды существует ряд характерных частот, на которых амплитуды колебаний возрастают и наступает параметрический резонанс.

### 13. Высвобождение упругой энергии пласта при вибрационном воздействии

Динамическое перераспределение напряжений в иерархической блочной среде происходит при сейсмовибрационном методе увеличения нефтеотдачи месторождения [35]. Энергия сжатого массива может перекачиваться на более низкий уровень, выводя из равновесия отдельные зерна и меняя условия их взаимодействия [36]. Наибольшее влияние при этом оказывают градиенты напряжений, существующие на контактах зерен. Начальные напряжения на гранях блоков имеют некоторый эксцентриситет, приводящий к изгибу и скручиванию блоков. В результате полное начальное напряжение включает симметричное и асимметричное слагаемые. Подобным образом распределяется и накопленная упругая энергия. Для высвобождения асимметричной части начальной упругой энергии нужно, чтобы сила трения скольжения уменьшилась. Это становится возможным при изменении условий на границах блоков. Причины изменений граничных условий могут быть связаны с вибрациями массива вследствие наличия в земной коре сейсмического фона, а также с работой какого-либо вибратора.

Изучим приращения деформаций в блочной среде при изменении начальных напряжений, используя модель континуума Коссера [36]. С ее помощью удастся объяснить наблюдаемый в природе и в экспериментах [37] эффект образования упорядоченной структуры нагруженных блоков за счет их собственных поворотов при выполнении предельных условий [25]. Ограничимся случаем теории упругости Коссера со стесненным вращением, для которой имеют место следующие геометрические соотношения [38]:

$$\varepsilon_{kl} = (u_{l,k} + u_{k,l}) / 2, \quad \phi_k = \varepsilon_{klm} (u_{m,l} - u_{l,m}) / 4, \quad \kappa_{kl} = \phi_{l,k}. \quad (49)$$

Воспользуемся определяющими соотношениями для изотропной среды, связывающими между собой:

— напряжения и деформации

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad (50)$$

$$\sigma_{12} = 4\mu\varepsilon_{12} - 2\gamma\phi, \quad \sigma_{21} = 4\mu\varepsilon_{12} + 2\gamma\phi; \quad (51)$$

— моменты и кривизны

$$m_1 = 4B\kappa_1, \quad m_2 = 4B\kappa_2. \quad (52)$$

В выражениях (49)–(52) обозначено:  $\kappa_1 = \phi_{,1}$ ,  $\kappa_2 = \phi_{,2}$  — кривизны;  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе;  $B$  — изгибный модуль;  $\gamma$  — поворотный модуль.

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$(\lambda + 2\mu)u_{,11} + (\lambda + \mu - \gamma)u_{,2,12} + (\mu + \gamma)u_{,1,22} + 2\gamma\omega_{,2} = 0, \quad (53)$$

$$(\lambda + 2\mu)u_{,2,22} + (\lambda + \mu - \gamma)u_{,1,12} + (\mu + \gamma)u_{,2,11} - 2\gamma\omega_{,1} = 0, \quad (54)$$

$$4B(\omega_{,11} + \omega_{,22}) - 4\gamma\omega + 2\gamma(u_{,2,1} - u_{,1,2}) = 0. \quad (55)$$

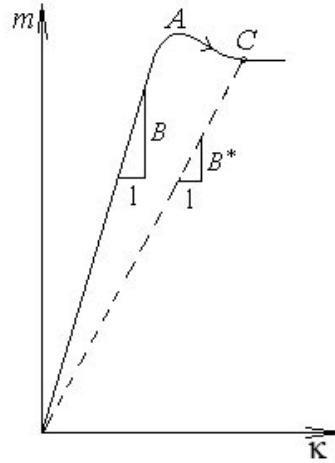


Рис. 15. Зависимость момента от кривизны

Будем исходить из того, напряженное состояние среды находится на пике прочности. Можно предположить, что при вибрационном воздействии сила трения на гранях блоков уменьшится и произойдет переход среды из состояния  $A$  в состояние  $C$  (Рис. 15). В результате изгибная жесткость среды уменьшится от значения  $B$  до значения  $B^*$ .

Начальные напряжения и деформации, обусловленные блочной структурой среды, должны удовлетворять уравнениям (53)–(55). Следует ожидать, что их распределение периодически в силу регулярного блочного строения. Соответственно решение для начальных напряжений будем искать в виде

$$u_1 = C_1 \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2, \quad u_2 = C_2 \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2, \quad \omega = C_3 \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2, \quad (56)$$

где  $k_1 = 2\pi/l_1$  — волновое число,  $l_1$  — длина волны. Подставляя решение (56) в уравнения равновесия (53)–(55), получим систему алгебраических уравнений:

$$C_1 [(\lambda + 2\mu)k_1^2 + (\mu + \gamma)k_2^2] + C_2 (\lambda + \mu - \gamma)k_1 k_2 - 2\gamma k_2 C_3 = 0, \quad (57)$$

$$C_1 (\lambda + \mu - \gamma)k_1 k_2 + C_2 [(\lambda + 2\mu)k_2^2 + (\mu - \gamma)k_1^2 - \rho f^2] + 2\gamma k_2 C_3 = 0, \quad (58)$$

$$-C_1 \gamma k_2 + C_2 \gamma k_1 + [4B(k_1^2 + k_2^2) - Jf^2] C_3 = 0. \quad (59)$$

Из условия совместности при  $k_1 = k_2 = k$  и  $l_1 = l_2 = l$  найдем, что волновое число должно удовлетворять выражению

$$k = \sqrt{\frac{\gamma^2 [2(\lambda + 2\mu) - \gamma]}{2B [2\mu(\lambda + 2\mu) + \lambda(\lambda + \mu) - \gamma^2]}}. \quad (60)$$

Заметим, что постоянные  $C_1$  и  $C_2$  из уравнений (57)–(59) могут быть выражены через постоянную  $C_3$ , однозначно связанную с распределением моментов на бесконечности.

При уменьшении изгибной жесткости до величины  $B^*$  (Рис. 15) изменится и волновое число:

$$k^* = \sqrt{\frac{\gamma^2 [2(\lambda + 2\mu) - \gamma]}{2B^* [2\mu(\lambda + 2\mu) + \gamma(\lambda + \mu) - \gamma^2]}}. \quad (61)$$

В результате поле смещений (56) и поле соответствующих деформаций перераспределятся. До вибрационного воздействия объемная деформация имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = k(C_1 + C_2) \cos kx_1 \cos kx_2; \quad (62)$$

после вибрационного воздействия и уменьшения изгибной жесткости она видоизменяется:

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) = \frac{1}{3}k(C_1^* + C_2^*) \cos k^*x_1 \cos k^*x_2. \quad (63)$$

Для численного примера зададимся следующими значениями параметров: плотность  $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$ , модуль сдвига  $\mu = 10^9 \text{ Па}$ , параметр Ламе  $\lambda = 1,5 \cdot 10^9 \text{ Па}$ , параметр изгибной жесткости  $B = 4n_B\mu l^2 \text{ Н}$  ( $l$  — характерный размер зерна,  $n_B = 0,01$  — коэффициент), параметр  $\gamma = n_\alpha\mu \text{ Па}$  ( $n_\alpha = 0,01$  — коэффициент). Выберем характерный внутренний размер моментной среды, соизмеримый с размером гранул и равный  $l = 0,001 \text{ м}$ . Будем считать, что после вибрационного воздействия изгибная жесткость уменьшится в два раза:  $n_B = 0,005$ .

Вычисления дают начальную длину волны  $L = 2\pi/k = 0,18 \text{ м}$ , которая после снижения изгибной жесткости уменьшается до величины  $L^* = 2\pi/k^* = 0,13 \text{ м}$ . На рисунке 16 приведены начальное распределение нормированной объемной деформации  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon / [k(C_1 + C_2)]$  и распределение объемной деформации  $\hat{\varepsilon}^* = \varepsilon^* / [k^*(C_1^* + C_2^*)]$  после воздействия вибрации.

Выполненный анализ показывает, каким образом вибрационные воздействия могут привести к изменению напряженного состояния гранулированной среды и стимулировать миграцию флюида.

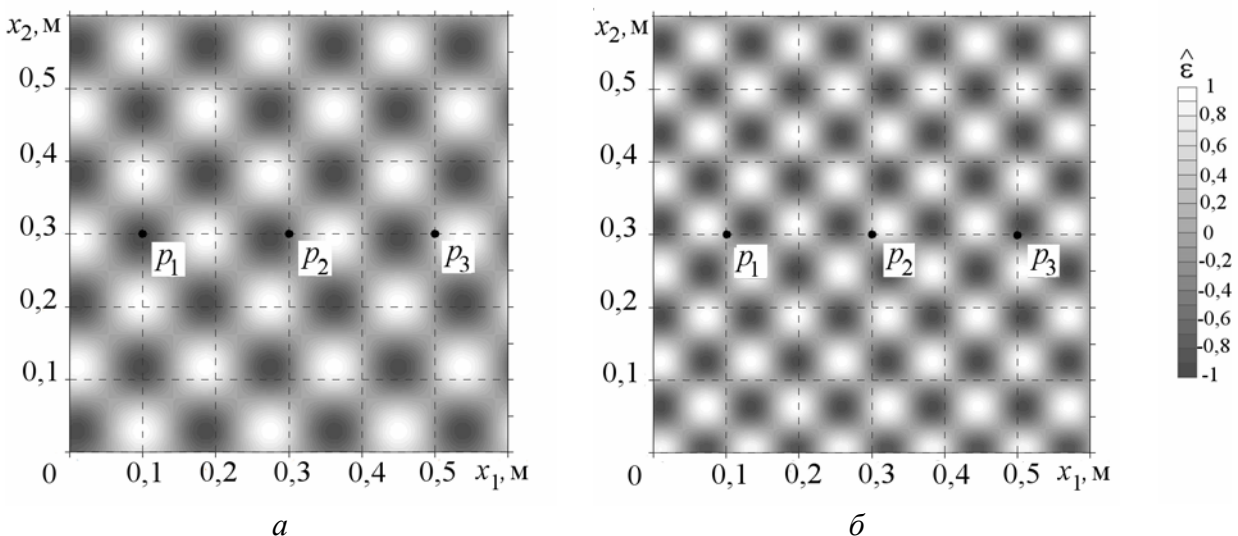


Рис. 16. Начальное распределение объемной деформации (а) и после воздействия вибрации (б)

## Литература

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des Corps Deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
2. *Дараган С.К., Люкэ Е.И., Николаевский В.Н.* Нелинейная сейсмическая волна в зоне дробления массива каменной соли // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 351, № 3. – С. 393-397.
3. Bulletin of Seismological Society of America. Special Issue: «Supplement. Rotational seismology and engineering applications». – 2009. – May. – 1486 p.
4. Earthquake source asymmetry, structural media and rotational effects / Ed. Teisseyre R., Takeo M. and Majewski E. – Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2006. – 582 p.
5. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 328 с.
6. *Михайлов Д.Н., Николаевский В.Н.* Тектонические волны ротационного типа с излучением сейсмического сигнала // Физика Земли. – 2000. – № 11. – С. 3-10.
7. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996. – 448 с.
8. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Об электромагнитном отклике при распространении сейсмического сигнала во фрагментированном горном массиве // Физика Земли. – 1998. – № 6. – С. 45-49.
9. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Ползучесть горных пород как источник сейсмического шума // Доклады Академии наук. – 1993. – Т. 331, № 6. – С. 739-741.
10. *Крылов А.Л., Николаевский В.Н., Эль Г.А.* Математическая модель нелинейной генерации ультразвука сейсмическими волнами // ДАН СССР. – 1991. – Т. 318, № 6. – С. 340-344.
11. *Мазур Н.Г., Николаевский В.Н., Эль Г.А.* Энергетический обмен между сейсмическими и ультразвуковыми колебаниями в упругой среде с микроструктурой // ПММ. – 1997. – Т. 61, вып. 2. – С. 336-340.
12. *Ерофеев В.И.* Синхронные взаимодействия продольных волн и волн вращения в нелинейно-упругой среде Коссера // Акустический журнал. – 1994. – Т. 40, № 2. – С. 237-252.
13. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Нелинейная математическая модель генерации низких частот в спектре сейсмического сигнала // Доклады Академии наук. – 1997. – Т. 352, № 5. – С. 676-679.
14. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Кратное увеличение периода при распространении волн в упругих телах с диссипативной микроструктурой // Изв. Академии наук. МТТ. – 1997. – № 6. – С. 78-85.
15. *Гуцин В.В., Заславский Ю.М., Рубцов С.Н.* Трансформация спектра высокочастотного импульса при распространении в поверхностном слое грунта: Препр. № 395 / Научн.-исслед. радиопиз. инст. – Нижний Новгород, 1994. – 20 с.
16. *Вильчинская Н.А., Николаевский В.Н.* Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов // Физика Земли. – 1984. – № 5. – С. 91-100.
17. *Николаевский В.Н.* Асимметричная механика континуумов и осредненное описание турбулентных течений // ДАН СССР. – 1969. – Т. 184, № 6. – С. 1304-1307.
18. *Искендеров Д.Ш., Николаевский В.Н.* Математическая модель торнадоподобных движений с внутренними вихрями // ДАН СССР. – 1990. – Т. 315, № 6. – С. 1341-1344.
19. *Nikolaevskiy V.N.* Angular momentum in geophysical turbulence. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 245 p.
20. *Губарь А.Ю., Аветисян А.И., Бабкова В.В.* Возникновение торнадо: трехмерная численная модель в мезомасштабной теории турбулентности по Николаевскому // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 419, № 4. – С. 1-6.
21. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
22. *Гарагаш И.А., Николаевский В.Н.* Условия равновесия фрагментированных горных масс в макро- и микромасштабе // Доклады Академии наук. – 1994. – Т. 338, № 5. – С. 675-670.
23. *Надаи А.* Пластичность – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 280 с.
24. *Гарагаш И.А., Николаевский В.Н.* Математическое моделирование возмущенного состояния фрагментированных горных масс // Мех. композиц. материалов и конструкций. – 1995. – Т. 1, № 1. – С. 54-68.
25. *Гарагаш И.А.* Микродеформации предварительно напряженной дискретной геофизической среды // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347, № 1. – С. 403-405.
26. *Гарагаш И.А.* Модель динамики фрагментированных сред с подвижными блоками // Физич. мезомех. – 2002. – Т. 5, № 5. – С. 71-77.
27. *Френкель Ю.И., Канторова Т.А.* К теории пластического деформирования и двойникования // ЖЭТФ. – 1938. – Т. 8. – С. 89-95; 1340-1359.
28. *Николаевский В.Н.* Математическое моделирование уединенных деформационных и сейсмических волн // Доклады Академии наук. – 1995. – Т. 341, № 3. – С. 403-405.

29. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
30. Косевич А.М. Физическая механика реальных кристаллов. – Киев: Наукова Думка, 1981. – 328 с.
31. Уизем Д.В. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1978. – 622 с.
32. Холмс П., Мун Ф. Странные аттракторы и хаос в нелинейной механике // Успехи прикладной механики. – М.: Мир, 1986. – С. 158-193.
33. Динариев О.Ю., Николаевский В.Н. О неустановившемся микроротационном режиме // ПММ. – 1993. – Т. 57, вып. 5. – С. 935-940.
34. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968. – 423 с.
35. Способ разработки обводненного нефтяного месторождения // а.с. 1459301 СССР : Е 21 В 43/00 / 1988. А.Г. Асан-Джалалов, В.В. Кузнецов, И.Г. Киссин, А.В. Николаев, В.Н. Николаевский, Р.И. Урдуханов (РФ) – № 156081: заявл.27.06.88, опубл. 30.09.90. Бюлл. № 36 – 4 с.; 6 ил.
36. Гарагаш И.А. Модель изменения напряженно-деформированного состояния гранулированной среды при вибрационном воздействии // Изв. РАЕН. Сер. Технологии нефти и газа. – 2005. – № 5–6. – С. 67-70.
37. Дрешер А., де Йоселен де Йонг Ж. Проверка механической модели течения гранулированного материала методами фотоупругости // Определяющие законы механики грунтов – М.: Мир, 1975 – С. 144-165.
38. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости // Разрушение. – М.: Мир, 1975. – Т. 2 – С. 646-751.

*Поступила в редакцию 27.10.09*

---

*Сведения об авторах:*

*Гарагаш Игорь Александрович, дфмн, проф., зав. лаб., Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (ИФЗ РАН), 123995, Москва, ул. Б. Грузинская, 10; E-mail: garagash@mail.ru.*

*Николаевский Виктор Николаевич, дтн, проф., гнс, ИФЗ РАН; E-mail: nikola@wwwcom.ru*