УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ ОБОЛОЧЕК ТИПА КОССЕРА

Х. Альтенбах[1], В.А. Еремеев[2]

[1]*Университет Мартина Лютера Халле-Виттенберг, Германия*
[2]*Южный научный центр РАН и Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*

Представлен обзор семейства нелинейных моделей оболочек типа Коссера, основанных на прямом подходе в теории оболочек. Начиная с наиболее общей модели деформируемой поверхности, оснащенной *p* директорами, рассматриваются различные варианты этих теорий в случае упругого поведения материала. Для вывода уравнений равновесия и определяющих соотношений используются принцип виртуальной работы и принцип материальной индифферентности, примененный к поверхностной плотности энергии деформации оболочки. Обсуждаются сходство и различия некоторых часто используемых теорий оболочек — модели оболочки с одним деформируемым директором, микроморфных и микрополярных оболочек, а также моделей типа Тимошенко–Рейсснера–Миндлина.

Ключевые слова: оболочки Коссера, микрополярная среда, микроморфная среда, микрополярные оболочки, нелинейная упругость

ON EQUATIONS OF COSSERAT-TYPE SHELLS

H. Altenbach[1] and V.A. Eremeyev[2]

[1]*Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Halle (Saale), Germany*
[2]*South Scientific Center of RAS & South Federal University, Rostov on Don, Russia*

A review of the family of the Cosserat-type nonlinear shell theories is presented. Starting with a general directed deformable surface model with *p* directors, we consider different elastic shell models using the direct approach. For derivation of the governing equations, we use the principle of virtual work and the principle of material frame-indifference applied to the surface density of a strain function. We discuss the interrelation between the most popular models, such as the directed surface model with one deformable director, the micromorphic and micropolar shell models, and the Timoshenko-Reissner-Mindlin model.

Key words: Cosserat shell, micropolar medium, micromorphic medium, micropolar shell, nonlinear elasticity

В 2009 году исполнилось 100 лет со дня выхода книги братьев Эжена и Франсуа Коссера [1], в которой впервые описывается обобщенная модель сплошной среды, получившая в дальнейшем название континуума Коссера или микрополярной среды. Появление этой модели стало следствием работ многих исследователей, среди которых следует отметить Кельвина, Гельмгольца, Ле Ру, Дюгема и др. (см., например, обзор в монографии [2]). Наряду с моделью трехмерной среды, в [1] разрабатываются также двух- и одномерные обобщенные модели, то есть фактически модели оболочек и стержней типа Коссера. Начиная со статьи Эриксена и Трусделла [3], модель Коссера получила дальнейшее развитие, в том числе и для конструирования новых обобщенных моделей пластин и оболочек. Ими используется так называемый прямой подход теории оболочек. В рамках данного подхода уравнения движения оболочки записываются на основе общих законов сохранения импульса и момента импульса и других, сформулированных для двумерного континуума, то есть для деформируемой поверхности. Уравнения движения дополняются определяющими соотношениями для двумерной среды. В настоящее время в литературе известны различные неклассические модели оболочек, в том числе и модели типа Коссера. Анализ публикаций, содержащих эти модели, представлен в работе [4] (также см. [5]).

Целью настоящей статьи является обзор семейства нелинейных моделей оболочек типа Коссера, построенных в рамках прямого подхода для случая упругого поведения материала. При выводе уравнений равновесия и определяющих соотношений используются принцип виртуальной работы и принцип материальной индифферентности, примененный к поверхностной плотности энергии деформации оболочки. Обсуждаются сходство и различия некоторых наиболее распространенных теорий оболочек. В определенной степени данная работа дополняет исследование [4], где также обсуждаются модели оболочек, получаемые в результате редукции трехмерных уравнений состояния микрополярной среды к двумерным.

1. Поверхность Коссера

Предложенная в [3] модель стала одной из наиболее общих моделей оболочек и получила дальнейшее развитие во множестве работ (см. например, [6, 7]). В рамках этой модели оболочка представляет собой деформируемую материальную поверхность. В пределах данной статьи ограничимся случаем упругого поведения материала. В актуальной конфигурации (в деформированном состоянии) оболочка описывается поверхностью ω с радиус-вектором $\mathbf{r}$. Поверхность наделяется набором векторов $\mathbf{d}_k$ ($k = 1,\ldots,p$), которые называются директорами (Рис. 1). На поверхности ω введем гауссовы координаты q^1, q^2, нормаль к поверхности ω обозначим через $\mathbf{n}$. Векторы основного и взаимного базисов на ω обозначим через

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}, \quad \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}^\beta = \delta_\alpha^\beta, \qquad \mathbf{r}^\beta \cdot \mathbf{n} = 0,$$

где δ_α^β — символ Кронекера; греческие индексы принимают значения 1, 2.

Наряду с актуальной конфигурацией рассмотрим также отсчетную конфигурацию (начальное состояние), в которой оболочка представляет собой поверхность Ω с радиус-вектором $\mathbf{R}$, наделенную набором директоров $\mathbf{D}_k$ ($k = 1,\ldots,p$). Векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{D}_k$ будем считать заданными.

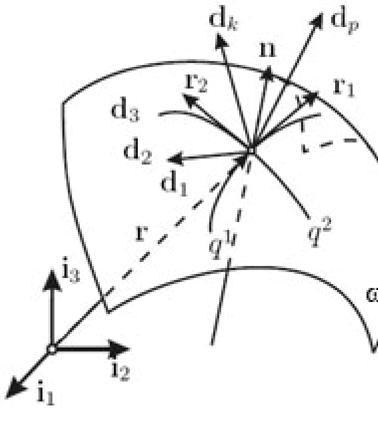

Рис. 1. Поверхность Коссера с p директорами. Актуальная конфигурация

Таким образом, кинематика оболочки в рамках модели поверхности Коссера с p директорами описывается векторными функциями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(q^1, q^2\right), \qquad \mathbf{d}_k = \mathbf{d}_k\left(q^1, q^2\right), \qquad (k = 1, \ldots, p). \tag{1}$$

Из соотношений (1) следует, что в рамках данного подхода каждая точка оболочки обладает ($3 + 3p$) степенями свободы.

Для упругой оболочки существует поверхностная плотность энергии деформации W. Примем для W следующую зависимость:

$$W = W\left(\mathbf{r}, \mathbf{F}, \mathbf{d}_k, \nabla\mathbf{d}_k\right),$$

где $\mathbf{F} = \nabla\mathbf{r}$ — поверхностный градиент деформации; $\nabla = \mathbf{R}^\alpha \dfrac{\partial}{\partial q^\alpha}$ — поверхностный набла-оператор на Ω; $\mathbf{R}_\alpha$ и $\mathbf{R}^\beta$ — векторы основного и взаимного базисов на Ω.

Из принципа материальной индифферентности [8] следует, что должно выполняться равенство

$$W\left(\mathbf{r}, \mathbf{F}, \mathbf{d}_k, \nabla\mathbf{d}_k\right) = W\left(\mathbf{a} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{Q},\ \mathbf{d}_k\cdot\mathbf{Q},\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{Q},\ \nabla\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{Q}\right) \tag{2}$$

для любого вектора $\mathbf{a}$ и любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичный тензор). Отсюда сразу следует, что W не зависит от $\mathbf{r}$. Принцип материальной индифферентности выполняется, если принять, что W задается формулой

$$W = W\left(\mathbf{U},\ \mathbf{d}_k\cdot\mathbf{A}^T,\ \nabla\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{A}^T\right),$$

которая следует из (2), если в качестве $\mathbf{Q}$ взять $\mathbf{A}^T$. В полученном выражении $\mathbf{U}$ — левый тензор искажения, а $\mathbf{A}$ — ортогональный тензор макроповорота из полярного разложения поверхностного градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{A}$ [9].

Уравнения равновесия получим, используя принцип виртуальной работы

$$\delta I - \delta' A = 0, \qquad I = \int\limits_\Omega W\, d\Omega. \tag{3}$$

Здесь $I = \int\limits_\Omega W\, d\Omega$ — функционал потенциальной энергии оболочки, $\delta' A$ — работа внешних нагрузок, выражение для которой будет уточнено позже. Рассматривая вариацию I, получим

$$\delta I = \int\limits_\Omega \left(\mathbf{T}\cdot\nabla\delta\mathbf{r} + \mathbf{M}_k\cdot\nabla\delta\mathbf{d}_k + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}_k}\cdot\delta\mathbf{d}_k \right) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{T}\cdot\delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{M}_k\cdot\delta\mathbf{d}_k \right) dS, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \qquad \mathbf{M}_k = \frac{\partial W}{\partial \nabla\mathbf{d}_k} \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{5}$$

есть тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, $\mathbf{v}$ — вектор нормали к контуру оболочки $\partial\Omega$, лежащий в касательной плоскости к Ω: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$.

Выражение (4) диктует форму выражения для работы внешних нагрузок $\delta' A$ в виде

$$\delta' A=\int\limits_{\Omega}\left(\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{r}+\mathbf{m}_k\cdot\delta\mathbf{d}_k\right)d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega_1}\left(\boldsymbol{\varphi}\cdot\delta\mathbf{r}+\boldsymbol{\mu}_k\cdot\delta\mathbf{d}_k\right)dS\,. \tag{6}$$

В (6) $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ представляют собой плотности сил, распределенных соответственно по Ω и $\partial\Omega_1$, $\mathbf{m}_k$ и $\boldsymbol{\mu}_k$ — поверхностные и контурные нагрузки, соответствующие заданию моментов, а также других сверхстатических величин, например, силовых диполей. Здесь $\partial\Omega_1$ — часть внешнего контура, на котором заданы внешние нагрузки.

Из вариационного уравнения (3) с учетом соотношений (4)–(6) следуют уравнения равновесия в метрике отсчетной конфигурации и статические краевые условия:

$$\nabla\cdot\mathbf{T}+\mathbf{f}=\mathbf{0}\,,\qquad \nabla\cdot\mathbf{M}_k-\frac{\partial W}{\partial\mathbf{d}_k}+\mathbf{m}_k=\mathbf{0}\ \text{ на } \Omega\,, \tag{7}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}=\boldsymbol{\varphi}\,,\qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{M}_k=\boldsymbol{\mu}_k\ \text{ на } \partial\Omega_1\,. \tag{8}$$

Кинематические краевые условия на оставшейся части контура оболочки состоят в задании радиус-вектора положения края оболочки и директоров

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}^0,\quad \mathbf{d}_k=\mathbf{d}_k^0\qquad \text{на}\quad \partial\Omega_2=\partial\Omega\setminus\partial\Omega_1\,. \tag{9}$$

Краевая задача (7)–(9) допускает значительные упрощения. Используя те или иные гипотезы о директорах $\mathbf{d}_k$, можно получить различные варианты теории оболочек типа Коссера. Одним из наиболее употребительных вариантов теории поверхностей Коссера является модель с одним директором $\mathbf{d}$ ($p=1$) (см., например, [7] и соответствующие разделы в [9, 10]). В этом случае каждая точка оболочки имеет 6 степеней свободы.

2. Микроморфные оболочки

Теория микроморфных оболочек основывается на рассмотрении поверхности, оснащенной тремя деформируемыми директорами $\mathbf{d}_k$ $\left(k=1,\ldots,3\right)$ (Рис. 2). Другими словами, микроморфная оболочка представляет двумерный аналог микроморфного континуума или среды с микродеформациями [2, 11, 12].

Энергия деформации микроморфной оболочки может быть представлена в виде

$$W=W(\mathbf{F},\,\mathbf{G},\,\nabla\mathbf{G})\,,$$

где $\mathbf{G}=\mathbf{D}_k\otimes\mathbf{d}_k$ — тензор второго ранга, называемый тензором микродисторсии. Выполнение принципа материальной индифферентности приводит к равенству

$$W(\mathbf{F},\mathbf{G},\nabla\mathbf{G})=W(\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q},\mathbf{G}\cdot\mathbf{Q},\nabla\mathbf{G}\cdot\mathbf{Q})\ \ \forall\ \ \mathbf{Q}:\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T=\mathbf{E}\,.$$

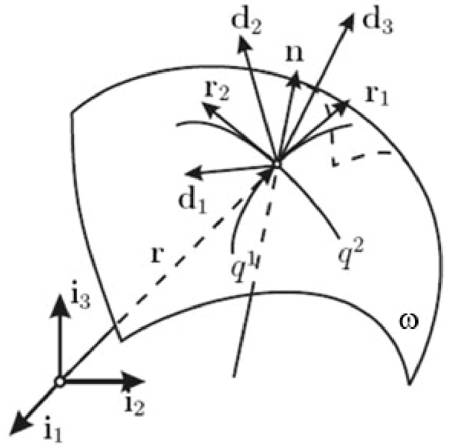

Рис. 2. Микроморфная оболочка — поверхность Коссера с 3-мя деформируемыми директорами. Актуальная конфигурация

Как и в теории поверхностей Коссера общего вида, в рамках теории микроморфных оболочек присутствуют сверхстатические величины, не сводящиеся к действию сил и моментов, поскольку в данной теории присутствует тензор двойных напряжений. Число степеней свободы здесь равняется 12.

3. Микрополярные оболочки

В отличие от представленных выше вариантов, в рамках теории микрополярных оболочек рассматриваются 3 директора, которые предполагаются ортонормированными, то есть выполняются ограничения: $\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_m = \delta_{km}$, $\mathbf{D}_k \cdot \mathbf{D}_m = \delta_{km}$ [9, 13–16]. Наличие этих ограничений приводит к тому, что в рамках теории микрополярных оболочек каждая точка поверхности оболочки обладает 6-ю степенями свободы. Поверхностная плотность энергии деформации может быть записана в виде

$$W = W(\mathbf{F},\, \mathbf{H},\, \nabla\mathbf{H}), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{D}_k \otimes \mathbf{d}_k \,.$$

Здесь тензор $\mathbf{H}$ является ортогональным и называется тензором микроповорота. Применение принципа материальной индифферентности к этому уравнению состояния влечет представление W как функции двух мер деформации:

$$W = W(\mathbf{E},\, \mathbf{K}), \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{H}^T, \qquad \mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{R}^\alpha \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^\alpha}\cdot\mathbf{H}^T\right)_\times, \tag{10}$$

где символ «$\times$» внизу обозначает векторный инвариант тензора второго ранга, например, для диады двух векторов выполняется равенство $\left(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\right)_\times = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Используя принцип виртуальной работы, можно показать [9], что уравнения равновесия и статические краевые условия в метрике отсчетной конфигурации приводятся к уравнениям:

$$\nabla\cdot\mathbf{D} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{P} + \left(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{D}\right)_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Omega\,, \tag{11}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}\cdot\mathbf{H}^T, \qquad \mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{K}}\cdot\mathbf{H}^T, \tag{12}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = \boldsymbol{\varphi}, \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \quad \text{на } \partial\Omega_1. \tag{13}$$

Кинематические краевые условия состоят в задании радиус-вектора положения края оболочки и тензора микроповорота:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0 \quad \text{на } \partial\Omega_2 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1. \tag{14}$$

В выражениях (11)–(13) $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{m}$ — поверхностные силы и моменты, а $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — силы и моменты, распределенные по части контура оболочки.

В рамках данной модели оболочек взаимодействие частей оболочек происходит только при помощи сил и моментов, а сверхстатические величины не вводятся. Уравнения равновесия (11) и краевые условия (13) могут быть также получены, если рассмотреть равновесие произвольной части деформируемой поверхности под действием произвольных сил и моментов. При этом меры деформации $\mathbf{E}$ и $\mathbf{K}$ являются энергетически сопряженными тензорам $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$. Поэтому можно сказать, что каждая точка поверхности микрополярной оболочки обладает 6-ю степенями свободы абсолютно твердого тела. Отметим, что в этой теории возможно задание сверлящего момента, распределенного по поверхности оболочки.

Рассмотренная модель оболочки фактически представляет собой двухмерный континуум Коссера. Например, меры деформации в (10) являются полными аналогами мер, используемых в трехмерной теории [17, 18]. Поэтому представленную теорию также можно называть теорией оболочек Коссера. В западной литературе под оболочками Коссера в основном понимается модель с 1-м директором [3, 6, 7]. В рамках этой теории частицы оболочки также обладают 6-ю степенями свободы, которые, однако, характеризуют другое деформированное состояние оболочки, в частности, для поверхности Коссера с 1-м директором невозможно задать поверхностный момент, соответствующий повороту вокруг директора $\mathbf{d}$, но возможно учесть поперечное обжатие оболочки.

В связи с описанным выше вариантом теории оболочек нужно отметить, что Эрингеном [12] предложена микрополярная теория пластин, кинематика которых отличается от рассмотренной выше. С другой стороны, кинематика микрополярных оболочек полностью совпадает с кинематикой общей нелинейной теории оболочек, также называемой 6-параметрической теорией оболочек, представленной в [19, 20].

4. Переход к 5-параметрической теории оболочек

Описанные выше уравнения оболочек типа Коссера допускают преобразование к моделям пластин и оболочек, связанным с именами Тимошенко, Рейсснера и Миндлина [21]. В случае поверхности Коссера с 1-м директором такое упрощение фактически состоит в принятии ограничения $|\mathbf{d}| = 1$ (см. [7]). Для модели микрополярных оболочек это проделано в работах [13, 16] на основании принятия гипотезы $\mathbf{d}_3 = \mathbf{n}$. В обоих случаях получается теория оболочек, в которой повороты вокруг некоторого вектора не рассматриваются как кинематически независимые величины, а число степеней свободы равняется 5-ти (каждая точка оболочки имеет 3 трансляционных и только 2 вращательных степени свободы). Соответственно на краю оболочки возможно задание 5-ти краевых условий, а не 6-ти, как в случае поверхностей Коссера или микрополярных оболочек. Введение дальнейших ограничений на директоры приводит к теориям оболочек типа Кирхгоффа-Лява [16].

5. Заключение

В работе представлены постановки краевых задач теории оболочек с использованием прямого подхода, в рамках которого оболочка рассматривается как деформируемая поверхность, оснащенная набором векторов — директоров. В зависимости от набора директоров получаются те или иные варианты теории оболочек, отличающиеся, в частности, числом степеней свободы и возможностью учета различных силовых воздействий. Выбор модели, естественно, зависит от решаемой задачи, например, уравнения микроморфных оболочек позволяют, в определенной степени, учитывать микродеформации оболочки, что важно для моделирования тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из полимерных или металлических пен. Уравнения поверхности Коссера применяются для описания деформаций трехслойных конструкций. Уравнения микрополярных оболочек могут оказаться более удобными при исследовании поведения разветвляющихся оболочек или оболочек, обладающих сложным внутренним строением. На выбор модели также влияет возможность построения уравнений состояния на основе экспериментальных данных, поскольку с ростом числа допускаемых степеней свободы увеличивается количество материальных постоянных, входящих в уравнения состояния.

Несмотря на то, что модели типа Коссера являются неклассическими в еще большей степени, чем теории типа Тимошенко–Рейсснера–Миндлина, и подвергаются определенной критике [22], следует отметить, что они входят и в инженерную, и в вычислительную практику, например, в сочетании с методом конечных элементов (см. обзор [4]).

Авторы благодарят профессора В.И. Ерофеева за плодотворные дискуссии по разным проблемам механики, а также за побуждение написать данную работу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00459).

Литература

1. *Cosserat E. et F.* Thèorie des corps deformables. – Paris: Herman et Fils, 1909. – VI+226 p.
2. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: МГУ, 1998. – 328с.
3. *Ericksen J.L., Truesdell C.* Exact theory of stress and strain in rods and shells // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1957. – V. 1, N. 1. – P. 295-323.
4. *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A.* On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography // Arch. Appl. Mech. – 2010. – V. 80, N 1. – P. 73-92.
5. *Altenbach H., Eremeyev V.A.* On the linear theory of micropolar plates // Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM). – 2009. – V. 89, N. 4. – P. 242-256.
6. *Green A.E., Naghdi P.M., Wainwright W.L.* A general theory of a Cosserat surface // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1965. – V. 20, N 4. – P. 287-308.
7. *Rubin M.B.* Cosserat theories: shells, rods and points. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 480p
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир. – 592с.
9. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Механика упругих оболочек. – М.: Наука, 2008. – 287с.
10. *Каюк Я.Ф.* Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. – Киев: Наукова думка, 1987. – 208с.
11. *Mindlin R.D.* Microstructure in linear elasticity// Arch. Rat. Mech. Analysis. – 1964. – V. 16. – P. 51-78.
12. *Eringen A.C.* Microcontinuum field theories. I. Foundations and solids. – Berlin, Heidelberg, N.-Y. et al: Springer-Verlag., 1999. – 325p.
13. *Альтенбах Х., Жилин П.А.* Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. – 1988. – V. 11, N 4. – P. 107-148.
14. *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. – Berlin: Springer, 1997. – 205 p.
15. *Елисеев В.В.* Механика упругих тел. – СПб.: СПбГТУ, 1999. – 341с.

16. *Жилин П.А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 167с.
17. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A.* On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum // Int. J. Solids Struct. – 2009. – V. 46, N. 3-4. – P. 774-787.
18. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A.* On vectorially parameterized natural strain measures of the non-linear Cosserat continuum // Int. J. Solids Struct. – 2009. – V. 46, N. 11-12. – P. 24774-2480.
19. *Libai A., Simmonds J.G.* The nonlinear theory of elastic shells, 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1998. – 560p.
20. C*hròścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W.* Statics and dynamics of multifold shells. Non-linear theory and finite element method (in Polish). – Warszawa: Wydawnictwo IPPT PAN, 2004. – 612p.
21. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемых твердых тел. Т. 5. – М.: ВИНИТИ, 1973. – 273с.
22. *Simmonds J.G.* Some comments on the status of shell theory at the end of the 20th century: Complaints and correctives // AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 38th, and AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Forum, Kissimmee, FL, Apr. 7-10, 1997, Collection of Technical Papers, Pt. 3 (A97-24112 05-39). – P. 1912-1921.

Поступила в редакцию 26.11.09

Сведения об авторах

Альтенбах Хольм, каф. техн. механики, Университет Мартина Лютера Халле-Виттенберг, ул. Курт-Мотес, 1, Халле (Заале), D-06099, Германия; E-mail: holm.altenbach@iw.uni-halle.de

Еремеев Виктор Анатольевич, дфмн, доц., Южный научный центр РАН и Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону, 344090, Россия; E-mail: victor@gmail.com