

УДК 539.3

**БРАТЬЯ КОССЕРА И МЕХАНИКА ОБОБЩЕННЫХ КОНТИНУУМОВ**

В.И. Ерофеев

*Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
Нижегород, Россия*

Рассказывается о жизни и деятельности Эжена и Франсуа Коссера – основоположников механики обобщенных континуумов. Обсуждается современное состояние механики обобщенных континуумов и перспектив ее развития.

*Ключевые слова:* континуум Коссера, ротационные степени свободы, моментные напряжения

**THE COSSERAT BROTHERS AND GENERALIZED CONTINUUM MECHANICS**

V.I. Erofeev

*Nizhny Novgorod Branch of Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute RAS,  
Nizhny Novgorod, Russia*

This paper presents an overview of the major milestones in the life and research activity of Eugene and Francois Cosserat – the founders of generalized continuum mechanics. The current status and future prospects of generalized continuum mechanics are discussed.

*Keywords:* Cosserat continuum, rotational degrees of freedom, couple stresses

Сто лет назад, в 1909 году, была опубликована книга французских исследователей братьев Эжена и Франсуа Коссера (Cosserat) «Теория деформируемых тел» [1] (Рис. 1), заложившая основы механики обобщенных континуумов.

Известно, что одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями свободы: ротационными, осцилляторными или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

В теории Коссера каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета ротационных степеней свободы. Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

**THÉORIE**  
**DES**  
**CORPS DÉFORMABLES**

PAR

**E. COSSERAT**  
Professeur à la Faculté des Sciences,  
Directeur  
de l'Observatoire de Toulouse

**F. COSSERAT**  
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,  
Ingénieur en Chef  
à la C<sup>e</sup> des Chemins de fer de l'Est

---

**PARIS**

**LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS**  
**6, RUE DE LA SORBONNE, 6**

1909

*em.*

Рис. 1. Титульная страница монографии братьев Коссера «Теория деформируемых тел»

Далее приводятся некоторые сведения о жизни и деятельности Э. и Ф. Коссера.

Старший брат — Франсуа Коссера, родился 26 ноября 1852 года во Французской Фландрии, в городе Дуэ. В 1870 году окончил в Париже Высшую политехническую школу (École Polytechnique), а в 1872 году — Национальную школу мостов и дорог. В 1875 году получил должность гражданского инженера третьего класса. Женится, в 1878 году у него родилась дочь Амелия–Адель. В 1879 году был переведен на должность железнодорожного инженера-строителя второго класса по северной зоне. В 1883 году он становится гражданским инженером первого класса. Франсуа Коссера удостоен ордена Почетного легиона (1893 г.). В 1912 году он избирается вице-президентом, а в 1913 году — президентом Французского математического общества.

Научная работа Ф. Коссера идет параллельным курсом с его деятельностью гражданского инженера, занимающегося строительством путей, тоннелей, мостов, железных дорог. Об этой работе лишь кратко упоминается в его служебных характеристиках (цитаты из книги [2]): «Месье Франсуа Коссера — это выдающийся инженер, имеющий богатый опыт практической деятельности, которую он сочетает с проведением теоретических исследований; недавно он представил во Французскую академию наук несколько замечательных работ по механике (27 июня 1898 г.)»; «Месье Франсуа Коссера является ценным сотрудником, он очень эффективен, особенно в общественных работах. Среди научного сообщества он известен как автор замечательных исследований по вопросам математики и механики (11 октября 1910 г.)»; «Месье Франсуа Коссера обладает высоким уровнем компетенции для строительства тоннелей, мостов, ...он является также выдающимся математиком, президентом Французского математического общества. Кроме того, он внес существенный вклад в работы для нужд армии (20 октября 1913 г.)».

Ф. Коссера умер 22 марта 1914 года на 62 году.

Примечательно, что следующим после него президентом Французского математического общества стал Э. Вессю (1865-1952), получивший всемирную известность работами по представлению групп Ли, создавший (вместе с Э. Пикаром) дифференциальную теорию Галуа и применивший теорию Фредгольма к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Младший брат — Эжен Коссера (полное имя Эжен-Морис-Пьер), родился 4 марта 1866 года на севере Франции в городе Амьене. С 1883 по 1888 годы учился в Высшей нормальной школе (École Normale Supérieure) в Париже, по окончании которой занял должность астронома-ассистента в обсерватории города Тулузы. В 1889 году защитил докторскую диссертацию по математике [3], в которой развивались идеи Ю. Плюккера и Г. Дарбу; переведен на должность адъюнкта Астрономической обсерватории. С 1895 года — профессор кафедры дифференциального и интегрального исчисления университета Тулузы. С 1908 года Э. Коссера становится директором Астрономической обсерватории Тулузы и занимает эту должность до конца своей жизни (умер 31 мая 1931 года в возрасте 65 лет). Его астрономические исследования посвящены кольцам и спутникам Сатурна, кометам и двойным звездам. Именно как астроном Э. Коссера был избран в 1919 году членом Французской академии наук. По отзывам коллег, «...сдержанный, добрый человек и прилежный работник, Эжен Коссера был одной из движущих сил в университете Тулузы в течение тридцати пяти лет» [4].

Неизвестно, как выглядел Франсуа, что же касается Эжена, то до нас дошло только одно его изображение — карандашный рисунок (см. Рис. 2).

О потомках братьев Коссера известно следующее. У Эжена был только один сын, он умер на руках у отца в гостинице во время поездки.

Единственная дочь Франсуа вышла замуж за морского инженера Эдуарда Даво (что интересно, переведшего с русского языка на французский курс физики петербургского профессора О.Д. Хвольсона [5]). У них было два сына, один из которых умер в 1939 году,

а второй, Пьер-Франсуа, прожил до конца 1980-х годов и застал триумфальное возвращение в мир теории своего деда.

В период между 1895 и 1910 годами Э. и Ф. Коссера опубликовали серию статей и монографию по механике. Кроме теории континуума твердых тел, именуемого сегодня континуумом Коссера, в 9-ти статьях 1898–1901 годов братья излагают результаты своих исследований спектра пучка операторов статической теории упругости для одномерной изотропной среды. Обзор этих работ в современной интерпретации можно найти в книге [6].

Работы по спектру Коссера были продолжены в 60–70-х годах двадцатого века С.Г. Михлиным, показавшим, в частности, что исследование спектра открывает перспективу построения теории многомерных интегральных уравнений [7].

Нынешние исследователи полагают, что в творческом союзе братьев главным был Франсуа, а Эжен лишь ассистировал, «...только вносил поправки в вычисления» [2]. В подтверждение сказанного приводится то обстоятельство, что после смерти старшего брата Эжен, активно работавший в науке еще полтора десятилетия, не опубликовал более ни одной работы по механике и совсем не пропагандировал теорию обобщенного континуума.

Современники не были столь единодушными в своих суждениях. Известно, что когда Франсуа претендовал на должность заведующего кафедрой механики Высшей политехнической школы и конкурировал с Ж. Адамаром и Ж. Жуге, кто-то из ответственных лиц высказал сомнение в его участии в совместных работах, и предпочтение было отдано Ж. Жуге.

До недавних пор считалось, что работа Коссера существует как бы «в вакууме», не имея ни предшественников, ни, долгое время, последователей. Но это не соответствует действительности. «Праотцами» полярных сред следует считать Якоба Бернулли, который в 1686 году ввел в рассмотрение момент количества движения, и Леонарда Эйлера, в 1765 году описавшего кинематику твердого тела конечных размеров.

До конца 19-го века физиками разрабатывались две теории эфира, конкурирующие между собой. Из наиболее известных ученых на позиции квазижидкого (газоподобного) эфира стояли Р. Декарт, Дж. Максвелл, Г. Лоренц. Они предполагали, что в эфире существуют вихри из каких-то очень мелких частиц. Потоки этих частиц образуют магнитные поля, а движения частиц от одного заряженного тела к другому обеспечивают электростатическое взаимодействие. Последовательными сторонниками квазитвердого эфира выступали Дж. Мак-Куллаг, В. Томсон (лорд Кельвин) и Дж. Стокс. Согласно их теориям магнитные и электрические поля возникают в эфире в результате определенного вида деформаций.

В 1839 году Дж. Мак-Куллаг предложил модель эфирной среды как упругого тела, невосприимчивого к деформациям сжатия и изменения формы, но реагирующего на деформацию кручения относительно абсолютного пространства [8]. Подробно теория Мак-Куллага изложена в книге А. Зоммерфельда [9] (см. также [10, 11]), который, в частности, заметил, что эта теория, будучи чисто механической, хорошо согласуется с теорией электромагнитных и оптических явлений Дж. Максвелла.



Рис. 2. Портрет Эжена Коссера

Вслед за Дж. Мак-Куллагом В. Томсон (Кельвин) смоделировал эфир с помощью волчков, то есть рассмотрел полярную среду, состоящую из вращающихся осесимметричных частиц, способных совершать большие повороты и перемещения общего вида [12]. В работе [13] найдена аналогия определяющих уравнений среды Кельвина и упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии насыщения. Легко видеть, что модель Мак-Куллага является частным случаем модели Коссера, а модель Кельвина следует причислить к «Коссера-подобным» (определение А.К. Эрингена\*) моделям.

Во Франции среди современников работу Э. и Ф. Коссера оценили немногие, собственно, только трое, но кто! Это А. Пуанкаре, Э. Пикар и Э. Картан. О Э. Картане следует упомянуть особо. Его, будущего автора классической книги «Теория спиноров», знакомство с трудом Коссера вдохновило на создание теории пространств с кручением [14]. Именно у Коссера он нашел подсказку: связать тензор кручения с внутренними вращательными степенями свободы сплошных сред, что, в свою очередь, позволило связать кручение пространства–времени с конкретными свойствами материальных систем, а именно со спином. Такая связь достигается в рамках динамической теории гравитационных взаимодействий Эйнштейна–Картана [15].

В Германии теорию микрополярного континуума пропагандировал К. Хейн, несколько лет читавший лекции по механике Коссера в университете Карлсруэ.

Подробный обзор книги Э. и Ф. Коссера опубликовал профессор Массачусетского технологического университета Э. Вильсон в альманахе «Достижения теоретической механики» за 1913 год.

А далее на несколько десятилетий было забвенье. Но, воистину, идеям Коссера «...как драгоценным винам, настанет свой черед». Без теории Коссера механика не полна. Эта теория вернулась в мир, и эта теория живет сегодня.

Столетняя годовщина издания монографии Э. и Ф. Коссера представляется благоприятным поводом для обзора современного состояния, тенденций и перспектив развития механики обобщенных континуумов.

Сегодня обобщенные континуумы вызывают как теоретический, так и практический интерес и заслуживают внимания не только теоретиков, но и экспериментаторов, специализирующихся в различных отраслях механики и физики. Можно очертить следующий круг активно изучаемых современными исследователями вопросов, связанных с обобщенными континуумами:

- феноменология;
- гомогенизация, динамика кристаллической решетки;
- дискретные модели;
- энергия, импульс и момент импульса;
- волны в обобщенных континуумах;
- экспериментальная идентификация параметров обобщенных континуумов;
- численная реализация;
- классические и новые приложения обобщенных континуумов: наномеханика, биология, экология, науки о земле, строительство, машиностроение и другие;
- технологии, использующие концепции обобщенных континуумов;
- методы неразрушающего контроля и технической диагностики, базирующиеся на свойствах обобщенных континуумов.

Актуальность таких исследований повышает и то обстоятельство, что, в сущности, у всех природных и искусственных материалов и систем проявляются взаимодействия механических процессов различного пространственного масштаба. В настоящее время

---

\* Когда статья готовилась к печати пришла печальная весть о кончине А.К. Эрингена – одного из крупнейших механиков второй половины 20-го века, последовавшей 7 декабря 2009 года. Ему было 88 лет.

обобщенные континуумы применяются при разработке новых металлургических технологий, позволяющих синтезировать искусственные материалы с управляемой микроструктурой. Они помогают прогнозировать поведение таких хрупких материалов, как бетон или лед. Некоторые методы технической диагностики и неразрушающего контроля основываются на усредненных материальных свойствах обобщенных континуумов. На моделирование, базирующееся на концепциях обобщенных континуумов, возлагаются большие надежды для успешного и скорейшего развития нанотехнологий. Обобщенные континуумы, такие как микрополярные или ориентированные материалы, микроморфный континуум, высокоградиентные материалы, тела со слабыми или сильными нелокальными взаимодействиями, также привлекаются при разработке интегральных многомасштабных вычислительных процедур. Подобные компьютерные технологии имеют целью объединение различных пространственных масштабов в одной численной схеме. Начало берется в квантово-механическом описании, затем осуществляется моделирование процессов на атомарном, молекулярном, микроскопическом и, наконец, на континуальном масштабе.

К столетнему юбилею монография Э. и Ф. Коссера переиздана на французском языке. Думается, что пришло время для выхода в свет и русской версии этой эпохальной книги.

## Литература

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des corps deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226p.
2. *Pommaret J.F.* Lie-pseudogroups and mechanics. – Gordon and Breach Science, 1988. – 590p.
3. *Cosserat E.* Sur le cercle considere comme element Generateur de L'Espace / Diss. – Paris, 1889.
4. *Montangerand L.* Eloge de Cosserat // Ann. de l'Observatoire de Toulouse, 1933. – V.10. – P. 20-30.
5. *Chwolson O.D.* Traite de physique. Ouvrage traduit sur les editions russe et allemande per E. Davaux. Edition revue et considerablement augmentee per l'Auteur, suivie de notes sur la physique theorique pur E. et F. Cosserat. Tome 1: Mecanique. Etats de la matiere. Acoustique, vii + 1092 pp., 1908. Tome 2: L'Energie rayonnante. 1188 pp., 1909. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils.
6. *Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукито М.В.* Интегральные уравнения в теории упругости. – СПб.: Изд-во С.Петербургского университета, 1994. – 272с.
7. *Михлин С.Г.* Спектр пучка операторов теории упругости // Успехи математических наук. – 1973. – № 3 (171). – С. 43-82.
8. *MacCullagh J.* An essay towards a dynamical theory of crystalline reflection and resraction // Trans. Roy. Irish. Acad. Sci., 1839. – V. 21. – P. 17-50.
9. *Зоммерфельд А.* Механика деформируемых сред. – М.: Иностранная литература, 1954. – 486с.
10. *Фесенко О.Г.* Континуум Мак-Келлога – электромагнитный эфир. – Белгород: Изд. дом «Шаповалов». 1997. – 86с.
11. *Горбацевич Ф.Ф.* Эфирная среда и универсум – СПб.: Изд-во «Альфа-Штамп», 2004. – 112с.
12. *Thomson W.* Mathematical and physical papers, 1882-1911. – 6 vols. – Cambridge University Press.
13. *Грекова Е.Ф., Жилин П.А.* Среда Кельвина и ферромагнетики: определяющие уравнения и волновые процессы // Нелинейная акустика твердого тела: сборник научных трудов / под ред. В.И. Ерофеева. – Нижний Новгород: Изд-во «Интелсервис», 1998. – С. 87-90.
14. *Cartan E.* Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativite generalisee // Ann. Ec. Norm. Sup. – 1923. – V. 40. – P. 325-412; – 1924. – V. 41. – P. 1-25; – 1925. – V. 42. – P. 17-88.
15. *Иваненко Д.Д., Сарданаивили Г.А.* Гравитация. – М.: УРСС, 2008. – 200с.

Поступила в редакцию 17.11.09

### Сведения об авторе:

*Ерофеев Владимир Иванович*, докт.физ.-мат. наук, проф., зам. директора по научн. работе, Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (Нф ИМАШ РАН), 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, 85; E-mail: erf04@sinn.ru