

УДК 531.21

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Р.Г. Куликов, Н.А. Труфанов

Пермский государственный технический университет, Пермь, 614600, Россия

Приводится построение итерационной процедуры решения краевых квазистатических задач нелинейной вязкоупругости, позволяющей свести рассматриваемую проблему к решению последовательности более простых задач в рамках линейной теории упругости. Дается обоснование сходимости, сформулированы основные достоинства предлагаемого алгоритма. Решены две модельные задачи, демонстрирующие построение итерационных схем при использовании различных приближенных методов, а также практическую сходимость построенной процедуры.

Ключевые слова: нелинейная вязкоупругость, краевая задача, численные методы, итерационный алгоритм

ITERATIVE METHOD FOR SOLVING QUASISTATIC NONLINEAR VISCOELASTIC PROBLEMS

R.G. Kulikov and N.A. Trufanov

Perm State Technical University, Perm, 614990, Russia

Construction of an iterative procedure for nonlinear viscoelastic boundary-value problems is considered. The proposed approach allows us to obtain the solution of the problem by solving the sequence of simpler linear elastic problems. Substantiation of the convergence of iterations is given, and the main merits of the developed method are formulated. Two model problems are solved to illustrate the construction of iterative schemes by different approximate methods and to assess the practical convergence of the iterative procedure.

Key words: nonlinear viscoelasticity, boundary-value problem, numerical methods, iterative algorithm

1. Введение

Широкое использование в технике конструкций, изготовленных из полимерных материалов и композитов на их основе, делает насущной задачу разработки эффективных методов оценки их прочности и долговечности. Наличие в рассматриваемом теле нескольких анизотропных материалов с различными свойствами, вязкоупругий характер деформирования, сложное физическое поведение материалов приводят к формулировке краевых задач нелинейной вязкоупругости с несколькими независимыми вязкоупругими операторами. Проблема разработки методов, позволяющих получать решение таких задач с высокой эффективностью и точностью, до сих пор остается актуальной.

Используемые в настоящее время методы имеют существенные ограничения при решении многооператорных задач анизотропной и нелинейной вязкоупругости. Перспективным направлением является разработка итерационных алгоритмов, позволяющих свести поиск решения исходной проблемы к решению последовательности задач более простой природы. В работе [1] рассмотрено построение итерационной процедуры решения задач линейной вязкоупругости, названной авторами методом вспомогательного функционала. В [2] приведен метод последовательных приближений для решения задач нелинейной теории вязкоупругости. Метод применим при рассмотрении физических соотношений довольно общего характера и справедлив для нелинейной среды с анизотропией произвольного вида. Тем не менее, остается проблема

решения последовательности краевых задач линейной вязкоупругости, для чего предлагается использовать какой-либо из подходящих для этого методов.

Данная работа содержит построение и обоснование сходимости итерационного алгоритма, позволяющего свести решение физически нелинейной задачи вязкоупругости к решению последовательности линейно-упругих краевых задач. Алгоритм подразумевает численную реализацию и с учетом быстрого роста производительности вычислительной техники представляется достаточно эффективным даже при решении задач большой размерности.

2. Построение итерационной процедуры метода и обоснование ее сходимости

Рассматривается квазистатическая краевая задача деформирования кусочно-однородного анизотропного вязкоупругого тела. Формулировка общего вида соотношений приведена в работах [2–4] и включает:

– уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений, \mathbf{u} , \mathbf{f} — векторы перемещений и объемных сил, \mathbf{x} — радиус-вектор точки тела, V — занимаемая телом область пространства;

– геометрические соотношения, которые в предположении малости деформаций задаются в форме Коши

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \mathbf{x} \in V, \quad (2)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций;

– граничные условия

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in S_p, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (4)$$

где \mathbf{n} — вектор единичной внешней нормали к поверхности тела, \mathbf{p} — заданный на части поверхности S_p вектор поверхностных сил, \mathbf{U} — заданный на части поверхности S_u

вектор перемещений;

– определяющие соотношения, представленные в форме Фреше–Вольтерры [2]

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\varepsilon}\}, \quad (5)$$

которые в предположении об аналитическом характере оператора $\hat{\mathbf{F}}$ в окрестности нуля можно представить в виде

$$\hat{\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(\hat{\varepsilon})^n \quad (6)$$

с использованием обозначения

$$\Gamma_n(\hat{\varepsilon})^n \equiv \int_0^t \dots \int_0^t {}^{2n+2} \hat{\Gamma}_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \cdot \hat{\varepsilon}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \hat{\varepsilon}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

или в компонентной форме

$$\sigma^{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t \Gamma_n^{ij i_1 j_1 \dots i_n j_n}(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \cdot \varepsilon_{i_1 j_1}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \varepsilon_{i_n j_n}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Здесь ${}^{2n+2} \hat{\Gamma}_n$ — тензор $(2n+2)$ -го ранга ядер релаксации n -го порядка; знак $(\cdot \cdot)$ обозначает двойное скалярное произведение; t — время. В общем случае ядра тензора функций релаксации являются неразностными. При рассмотрении нестареющего материала ядра функций релаксации инвариантны относительно начала отсчета времени и становятся разностными по аргументам. Ядра релаксации симметричны по переменным τ_i , $i = \overline{1, n}$; кроме того, выполнены условия взаимности, предполагающие инвариантность тензоров ядер релаксации относительно некоторой группы преобразований, характеризующей определенный вид анизотропии [2]. Выполнение условий взаимности эквивалентно потенциальности оператора $\hat{\mathbf{F}}$ [5], то есть существует такой скалярный оператор $\mathbf{W}\{\hat{\varepsilon}\}$, что

$$\hat{\mathbf{F}}\{\hat{\varepsilon}\} = \partial \mathbf{W}\{\hat{\varepsilon}\} / \partial \hat{\varepsilon}. \quad (7)$$

Здесь используется следующее определение дифференциала $D\mathbf{W}$ оператора \mathbf{W} и его функциональной производной [6]:

$$D\mathbf{W}\{\hat{\varepsilon}, \hat{\theta}\} \equiv \frac{\partial \mathbf{W}\{\hat{\varepsilon}\}}{\partial \hat{\varepsilon}} \cdot \hat{\theta} \equiv \frac{d}{d\zeta} \left(\mathbf{W}\{\hat{\varepsilon} + \zeta \hat{\theta}\} \right)_{\zeta=0}, \quad (8)$$

где $\hat{\theta}$ — произвольный тензор второго ранга; ζ — числовой параметр.

Рассматривается полное метрическое пространство вектор-функций

$$X(V) = \left\{ \mathbf{v} \in (X^1(V))^n \mid \mathbf{v} = \mathbf{U}, \mathbf{x} \in S_u \right\}. \quad (9)$$

Индекс n означает мерность вектора \mathbf{v} , а единица — то, что вектор-функция \mathbf{v} и все ее первые частные производные по пространственным координатам принадлежат пространству $(L_2(V))^n$.

Следует отметить, что $\mathbf{f} \in (L_2(V))^n \times [0, t]$, $\mathbf{p} \in (L_2(S_p))^n \times [0, t]$.

Вводятся следующие обозначения:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_0 = \int_V \hat{\varepsilon}\{\mathbf{v}\} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\varepsilon}\{\mathbf{u}\} dV, \quad (10)$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in (L_2(V))^n \times [0, t] \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (11)$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in (L_2(S_p))^n \times [0, t] \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_S = \int_{S_p} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (12)$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad \mathbf{L}\{\mathbf{u}\} = \int_V \mathbf{W}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})\} dV, \quad (13)$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad \langle \mathbf{F}\{\mathbf{u}\}, \mathbf{v} \rangle_\Delta = \int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot \left({}^4 \hat{C} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})\} \right) dV, \quad (14)$$

где ${}^4 \hat{C}$ — симметричный тензор-константа, который выбирается таким, чтобы при $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и положительной определенности функционала $\int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})\} dV$ обеспечивалась положительная определенность функционала (14). В частности,

$${}^4 \hat{C} \equiv \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}\{0\}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} h(t) \right)_{t=0} \equiv \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} h(t) \right)_{\substack{t=0 \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=0}}, \quad h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

если материал обладает «мягкой» характеристикой [4], то есть:

$$0 < \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \leq \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}\{0\}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \quad (16)$$

Выражения (10)–(12) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ являются положительно определенными функционалами.

В качестве метрики используемого пространства (9) выбирается

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_0}. \quad (17)$$

Известно [5, 6], что обобщенное решение краевой задачи (1)–(4), (6), получаемое из вариационного уравнения

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad DL\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v})\} \equiv DL(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v})_S, \quad (18)$$

где DL определяется формулами (13) и (7), (8):

$$DL(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})\} dV, \quad (19)$$

является единственным при выполнении условия (16) и придает минимальное значение следующему функционалу, определенному на пространстве вектор-функций (9):

$$\forall t \geq 0 \quad \Pi\{\mathbf{v}\} = L\{\mathbf{v}\} - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - (\mathbf{p}, \mathbf{v})_S. \quad (20)$$

Следуя идее метода геометрического погружения [7, 8], функционал (20) путем тождественных преобразований приводится к виду

$$\forall t \geq 0 \quad \Pi\{\mathbf{v}\} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_0 - \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_0 - \mathbf{L}\{\mathbf{v}\} \right) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - (\mathbf{p}, \mathbf{v})_S, \quad (21)$$

откуда, с учетом выражения (19), следует вариационное уравнение, решение которого дает элемент $\mathbf{u} \in X \times [0, t]$, минимизирующий соотношение (21) и, следовательно, функционал (20):

$$\forall \mathbf{v} \in X \times [0, t] \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_0 = \left(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_0 - DL(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v})_S = \left\langle \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}\}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Delta} + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v})_S. \quad (22)$$

Предлагается следующая итерационная процедура решения вариационного уравнения (22):

$$\forall \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad \langle \mathbf{u}^k, \mathbf{v} \rangle_0 = \left\langle \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-1}\}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Delta} + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v})_S \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (23)$$

Таким образом, для получения решения физически нелинейной вязкоупругой задачи в постановке (1)–(5) необходимо рассмотреть последовательность линейных краевых задач в рамках теории упругости, сформулированных для тела той же пространственной конфигурации. Требование положительной определенности функционала (14) означает, что материал погружения, свойства которого описываются тензором ${}^4\hat{C}$, должен быть «жестче», чем материал изначально рассматриваемого тела.

При соответствующем выборе тензора ${}^4\hat{C}$ имеется возможность перехода от решения задачи для изначально анизотропного кусочно-однородного или даже неоднородного вязкоупругого тела к решению последовательности задач, сформулированных для тела изотропного и однородного (Рис.1), что благоприятным образом должно сказаться на эффективности построенных на базе уравнения (23) численных процедур.

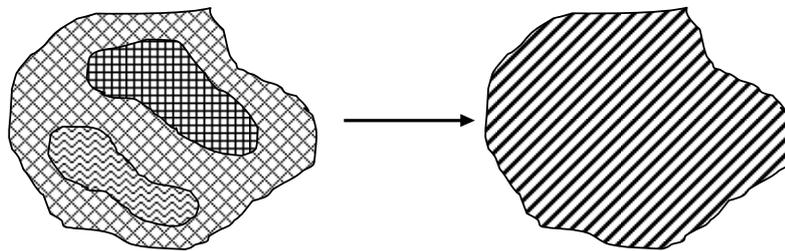


Рис. 1. Схема алгоритма

Сходимость итерационного процесса (23) при любом выборе начального приближения \mathbf{u}^0 обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 1. Последовательность итераций $\{\mathbf{u}^k\}$ вариационного уравнения (23) сходится в смысле метрики пространства X , то есть

$$\rho(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^n) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Пусть $m > n$, тогда

$$\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^n = \sum_{k=n+1}^m (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}).$$

Если перейти к неравенству

$$\rho(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^n) \leq \sum_{k=n+1}^m \rho(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k-1}), \quad (24)$$

из уравнения (23) почленно вычесть равенство

$$\forall \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad \langle \mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v} \rangle_0 = \left\langle \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-2}\}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Delta} + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v})_S,$$

то в результате получим

$$\forall \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad \langle \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v} \rangle_0 = \left\langle \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-1}\} - \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-2}\}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Delta}, \quad (25)$$

причем допустим выбор

$$\forall \mathbf{v} \in X \times [0, t] \quad \langle \mathbf{u}^0, \mathbf{v} \rangle_0 = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v})_S. \quad (26)$$

Из условия непрерывности линейного функционала (26) на пространстве $X \times [0, t]$ имеем:

$$\rho(\mathbf{u}^0, 0) = \langle \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0 \rangle_0^{1/2} = A, \quad (27)$$

где величина A зависит от \mathbf{f} , \mathbf{p} , V и S .

В силу положительной определенности функционалов (10)–(12) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и равенства (22) следует выполнение неравенств

$$\forall \mathbf{u} \in X \times [0, t] \quad \left\langle \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}\}, \mathbf{u} \right\rangle_{\Delta} < \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_0, \quad DL(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_0. \quad (28)$$

Используя (25) и принимая произвольный элемент $\mathbf{v} = \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}$, приходим к соотношению

$$\rho^2(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k-1}) = \left\langle \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-1}\} - \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-2}\}, \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1} \right\rangle_{\Delta}. \quad (29)$$

Преобразуем правую часть выражения (29) с учетом (14):

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-1}\} - \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-2}\}, \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1} \right\rangle_{\Delta} &= \int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \left(\left(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-1}) - \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-1})\} \right) - \right. \\
&- \left. \left(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-2}) - \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-2})\} \right) \right) dV = \int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^{k-2}) dV - \\
&- \int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \left(\hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-1})\} - \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-2})\} \right) dV.
\end{aligned} \quad (30)$$

Оба интеграла в (30) имеют одинаковый знак, поэтому для материалов с «мягкой» характеристикой деформирования в силу (15) и (16) из неотрицательности выражений (29) и (30) следует:

$$\int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^{k-2}) dV \geq 0.$$

Тогда для (29) справедливы оценки:

$$\begin{aligned}
\rho^2(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k-1}) &= \left\langle \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-1}\} - \hat{\mathbf{F}}\{\mathbf{u}^{k-2}\}, \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1} \right\rangle_{\Delta} \leq \alpha^{(k)} \left\langle \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^{k-2} \right\rangle_0, \\
0 &\leq \alpha^{(k)} \leq \alpha_0 < 1.
\end{aligned}$$

Отметим, что для функционала (10) выполняются все аксиомы скалярного произведения элементов пространства X , поэтому к правой части (30) можно применить неравенство Коши–Буняковского:

$$\left\langle \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^{k-2} \right\rangle_0 \leq \sqrt{\left\langle \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1} \right\rangle_0} \cdot \sqrt{\left\langle \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^{k-2}, \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^{k-2} \right\rangle_0},$$

вследствие чего

$$\begin{aligned}
\rho^2(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k-1}) &\leq \alpha^{(k)} \rho(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k-1}) \rho(\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{u}^{k-2}), \\
\rho(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k-1}) &\leq \alpha^{(k)} \rho(\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{u}^{k-2}),
\end{aligned}$$

откуда с учетом равенства (27)

$$\rho(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k-1}) \leq \alpha^{(k)} \alpha^{(k-1)} \dots \alpha^{(1)} A \leq \alpha^k A, \quad (31)$$

где $\alpha = \max(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}, \dots, \alpha^{(k)}, \dots, \alpha^{(m)})$.

Подставляем выражение (31) в неравенство (24):

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^n) &\leq \sum_{k=n+1}^m \alpha^k A \leq A(\alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \alpha^{n+3} + \dots + \alpha^m) = \\
&= A \left(\frac{1 - \alpha^{m+1}}{1 - \alpha} - \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) = A \left(\frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{m+1}}{1 - \alpha} \right) \leq A \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha},
\end{aligned}$$

откуда следует, что если $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 < 1$, то

$$\rho(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^n) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, построение обобщенного решения краевой задачи нелинейной теории вязкоупругости (1)–(5) сводится к рассмотрению итерационной последовательности более простых задач, разрешаемых в рамках линейной теории упругости.

Для демонстрации возможностей предложенного итерационного метода далее рассматриваются два модельных примера: упругое деформирование анизотропного вращающегося диска и вязкоупругое деформирование нелинейно-вязкоупругого стержня.

3. Модельные задачи

3.1. Задача об упругом деформировании анизотропного вращающегося диска

Имеется тонкий однородный упругий диск с отверстием, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω (Рис. 2). Материал диска ортотропен в полярной системе координат и характеризуется жесткостями $C_{rr} = 1,0256$ Па, $C_{\varphi\varphi} = 10,256$ Па, $C_{r\varphi} = 0,512$ Па, полученными с учетом равенства нулю компоненты тензора напряжений σ_z .

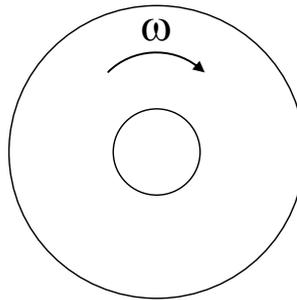


Рис. 2. Расчетная схема задачи о деформировании диска

С учетом осевой симметрии геометрии рассматриваемого тела и приложенных нагрузок вариационная постановка задачи принимает вид [9]:

$$P(u_r) = \frac{1}{2} \int_S \left[\left(C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\varphi} \frac{u_r}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(C_{r\varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\varphi\varphi} \frac{u_r}{r} \right) \frac{u_r}{r} \right] dS - \int_S \rho \omega^2 r u_r dS = \min,$$

где $u_r(r)$ — искомая функция радиальных перемещений; S — площадь рассматриваемого тела; ρ — плотность материала.

Материалом погружения служит однородный упругий изотропный материал с жесткостями $A_{11} = 10,989$ Па, $A_{12} = 3,296$ Па. С учетом записи в форме (21) используемый функционал преобразуется к виду:

$$P(u_r) = \frac{1}{2} \int_S \left[\left(A_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + A_{12} \frac{u_r}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(A_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + A_{11} \frac{u_r}{r} \right) \frac{u_r}{r} \right] dS - \frac{1}{2} \int_S \left[\left((A_{11} - C_{rr}) \frac{\partial u_r}{\partial r} + (A_{12} - C_{r\varphi}) \frac{u_r}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left((A_{12} - C_{r\varphi}) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \right. \right. \quad (32)$$

$$+ \left(A_{11} - C_{\varphi\varphi} \right) \frac{u_r}{r} \frac{u_r}{r} \Big] dS - \int_S \rho \omega^2 r u_r dS$$

Для получения решения рассматриваемой вариационной задачи используется метод Ритца [10], согласно которому искомая функция представляется в виде ряда:

$$u_r = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(r), \quad (33)$$

где a_i — искомые числовые коэффициенты; φ_i — базисные функции. После подстановки ряда (33) функционал (32) принимает вид:

$$\begin{aligned} \Pi(u_r) = & \frac{1}{2} \int_S \left[\left(A_{11} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_i a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{A_{12}}{r} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_i a_j \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \varphi_i \right) + \right. \\ & \left. + A_{11} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_i a_j \frac{\varphi_i \varphi_j}{r^2} \right) \Big] dS - \frac{1}{2} \int_S \left[\left((A_{11} - C_{rr}) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_i a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(A_{12} - C_{r\varphi})}{r} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_i a_j \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \varphi_i \right) + (A_{11} - C_{\varphi\varphi}) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_i a_j \frac{\varphi_i \varphi_j}{r^2} \right) \right] dS - \\ & - \int_S \rho \omega^2 r \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i dS. \end{aligned}$$

Выполнение условий минимума функционала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad (i = \overline{0, N})$$

приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^N a_j \int_S \left[\left(A_{11} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{A_{12}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \varphi_i \right) + A_{11} \frac{\varphi_i \varphi_j}{r^2} \right) \right] dS - \\ & - \sum_{j=0}^N a_j \int_S \left[\left((A_{11} - C_{rr}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{(A_{12} - C_{r\varphi})}{r} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \varphi_i \right) + (A_{11} - C_{\varphi\varphi}) \frac{\varphi_i \varphi_j}{r^2} \right) \right] dS - \\ & - \int_S \rho \omega^2 r \varphi_i dS = 0 \quad (i = \overline{0, N}). \end{aligned}$$

Окончательная формулировка итерационной процедуры отыскания коэффициентов разложения (33), в соответствии с (23), приобретает следующий вид:

$$\sum_{j=0}^N a_j^{k+1} \int_S \left[\left(A_{11} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{A_{12}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \varphi_i \right) + A_{11} \frac{\varphi_i \varphi_j}{r^2} \right) \right] dS =$$

$$= \sum_{j=0}^N a_j^k \int_S \left[\left((A_{11} - C_{rr}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{(A_{12} - C_{r\varphi})}{r} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \varphi_i \right) + \right. \right. \quad (34)$$

$$\left. \left. + (A_{11} - C_{\varphi\varphi}) \frac{\varphi_i \varphi_j}{r^2} \right) \right] dS + \int_S \rho \omega^2 r \varphi_i dS = 0 \quad (i = \overline{0, N}; k = 1, 2, 3 \dots).$$

Следует отметить, что матрица коэффициентов системы (34) не меняется от итерации к итерации, поэтому формируется и обращается только один раз.

При решении рассматриваемой задачи в качестве базисных выбирались степенные функции: $\varphi_i(r) = r^i (i = \overline{0, N})$. Критерий прекращения итераций формулировался в виде:

$\max_{i=0, N} \frac{|a_i^k - a_i^{k+1}|}{a_i^{k+1}} < eps$, где eps — заданная точность. Величина $\rho \omega^2$ полагалась равной $2 \text{ кг}/(\text{м}^3 \text{ с}^2)$. Внутренний и внешний радиусы кольца составляли соответственно $0,1 \text{ м}$ и 1 м .

На рисунке 3 представлены кривые функции радиальных перемещений $u_r(r)$, а в таблице 1 приведены значения коэффициентов a_i , получающиеся в процессе итерирования, для $N = 3$ при $eps = 10^{-3}$.

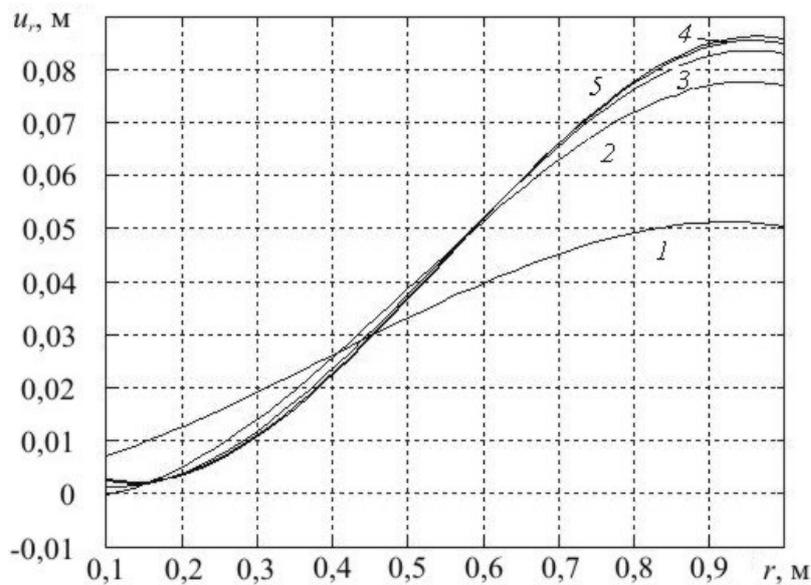


Рис. 3. Распределение радиальных перемещений по радиусу на k -й итерации (в скобках указан номер соответствующей кривой): $k = 1$ (кривая 1); 6 (2); 11 (3); 16 (4); 21 (5)

Таблица 1. Значения коэффициентов a_i при $N = 3$

k	a_0	a_1	a_2	a_3
1	0	0	0	0
5	-0,002913	0,01912	0,19741	-0,14711
10	0,002626	-0,05796	0,38055	-0,24504
15	0,007451	-0,09904	0,45863	-0,28311
20	0,009417	-0,11460	0,48633	-0,29586
25	0,010174	-0,12035	0,49600	-0,29985

3.2. Задача о деформировании нелинейно-вязкоупругого стержня

Рассматривается задача об одноосном деформировании однородного стержня постоянного поперечного сечения, нагруженного на конце продольной силой $P(t)$ (Рис.4). Материал стержня полагается нелинейно-вязкоупругим, и его поведение описывается соотношениями главной кубичной теории вязкоупругости.

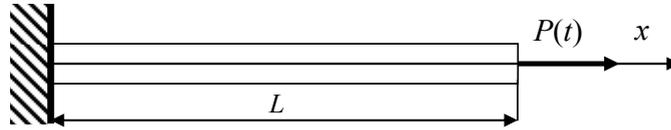


Рис. 4. Расчетная схема задачи о деформировании стержня

Математическая постановка задачи для любого $t > 0$ включает следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(x,t)}{dx} &= 0, & x \in (0, L), \\ \varepsilon(x,t) &= \frac{du(x,t)}{dx}, & x \in (0, L), \\ \sigma(x,t) &= E \left(\varepsilon(x,t) - \int_0^t K_1(t-\tau)\varepsilon(x,\tau)d\tau - \int_0^t K_2(t-\tau)\varepsilon^3(x,\tau)d\tau \right), & x \in (0, L), \\ u(0,t) &= 0, & \sigma(L,t) = \frac{P(t)}{F}, \end{aligned}$$

где $\sigma(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$, $u(x,t)$ — функции напряжения, деформации и перемещения; E — модуль упругости; F — площадь поперечного сечения стержня; $K_1(t)$, $K_2(t)$ — функции ядер релаксации.

В силу однородности полей деформаций и напряжений рассматриваемая задача сводится к решению уравнения

$$E\varepsilon(t) - \int_0^t K_1(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau - \int_0^t K_2(t-\tau)\varepsilon^3(\tau)d\tau = \frac{P(t)}{F}. \quad (35)$$

Применительно к уравнению (35) предлагаемая итерационная процедура принимает вид:

$$C\varepsilon^{k+1}(t) = (C - E)\varepsilon^k(t) + \int_0^t K_1(t-\tau)\varepsilon^k(\tau)d\tau + \int_0^t K_2(t-\tau)(\varepsilon^k)^3(\tau)d\tau + \frac{P(t)}{F} \quad (36)$$

$(k = 1, 2, 3, \dots)$

Задача (36) решается приближенным методом Галеркина [10]. Функция $\varepsilon(t)$ строится в виде ряда: $\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(t)$, где a_i — искомые числовые коэффициенты; $\varphi_i(t)$ — базисные функции. При этом полагается, что для $\varepsilon(t)$ выполняется условие:

$$\varepsilon(0) = \frac{P(0)}{FE}. \tag{37}$$

С учетом этого итерационная схема (36) преобразуется в вид:

$$C \sum_{i=0}^N a_i^{k+1} \varphi_i(t) = (C - E) \sum_{i=0}^N a_i^k \varphi_i(t) + \int_0^t K_1(t - \tau) \sum_{i=0}^N a_i^k \varphi_i(\tau) d\tau + \int_0^t K_2(t - \tau) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{p=0}^N a_i^k a_j^k a_p^k \varphi_i(\tau) \varphi_j(\tau) \varphi_p(\tau) d\tau + \frac{P(t)}{F} \tag{38}$$

Применение к (38) стандартной процедуры метода Галеркина, выражающей условие ортогональности невязки базисным функциям на отрезке $[0, T]$, где $T \equiv t$, дает систему линейных алгебраических уравнений относительно a_i^{k+1} :

$$C \sum_{i=0}^N a_i^{k+1} \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_m(t) dt = (C - E) \sum_{i=0}^N a_i^k \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_m(t) dt + \sum_{i=0}^N a_i^k \int_0^T \int_0^t K_1(t - \tau) \varphi_i(\tau) d\tau \varphi_m(t) dt + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{p=0}^N a_i^k a_j^k a_p^k \int_0^T \int_0^t K_2(t - \tau) \varphi_i(\tau) \varphi_j(\tau) \varphi_p(\tau) d\tau \varphi_m(t) dt + \int_0^T \frac{P(t)}{F} \varphi_m(t) dt \quad (m = \overline{0, N}).$$

Как и в предыдущем случае, в качестве базисных выбрались степенные функции: $\varphi_i(t) = t^i$. Вид базисных функций и условие (37) позволили заранее определить коэффициент a_0 , который равнялся $P(0)/FE$.

В рассмотренном примере использовались следующие значения констант: $E = 1$ Па, $C = 2$ Па, $F = 1$ м². Функции ядер релаксации составляли: $K_1(t) = 0.1e^{-t}$, $K_2(t) = 0.2e^{-5t}$. Ниже в таблице приведены значения коэффициентов a_i для решения на отрезке времени $[0, T]$, где $T = 1$ с, в процессе итерирования при $N = 4$, $P(t) = t$, $eps = 10^{-3}$.

Для оценки точности получаемого решения исследовалась норма невязки уравнения (35), вводимая в виде:

$$\delta = \int_0^T \left(E\varepsilon(t) - \int_0^t K_1(t - \tau)\varepsilon(\tau) d\tau - \int_0^t K_2(t - \tau)\varepsilon^3(\tau) d\tau - \frac{P(t)}{F} \right)^2 dt.$$

Таблица 2. Значения коэффициентов a_i при $N = 4$

k	a_1	a_2	a_3	a_4
1	0	0	0	0
5	0,93775	0,031655	-0,00052882	0,0058135
9	0,99639	0,044642	0,00099271	0,0158400
13	0,99998	0,046812	-0,00038813	0,0190920
17	1,00020	0,047126	-0,00079613	0,0196640
21	1,00020	0,047168	-0,00086829	0,0197450
25	1,00020	0,047170	-0,00087077	0,0197490

Таблица 3. Значения нормы невязки решаемого уравнения при различных N

N	δ
1	$6,6108 \cdot 10^{-5}$
2	$8,2018 \cdot 10^{-7}$
3	$1,3607 \cdot 10^{-8}$
4	$8,6746 \cdot 10^{-12}$
5	$8,1395 \cdot 10^{-12}$

Величины δ для различных значений N приведены в таблице 3.

Таким образом, на примере решения предложенным методом двух модельных задач показана практическая сходимость итерационной процедуры, а также продемонстрировано построение итерационных схем при использовании различных приближенных методов решения.

В заключение следует отметить следующие достоинства рассматриваемого метода:

– метод применим для решения задач как линейной, так и нелинейной вязкоупругости;

– при решении краевых задач возможен учет произвольного количества вязкоупругих операторов; ядра операторов могут быть неразностными по аргументам, что позволяет применять метод к анализу тел с произвольными анизотропией и характером неоднородности, а также рассматривать случаи сложного терморелогического поведения материалов;

– метод не требует аппроксимации вязкоупругих характеристик функциями специального вида, а позволяет использовать измеренные в эксперименте функции релаксации или их аппроксимации подходящими функциями;

– оператор в левой части итерационной процедуры не изменяется от итерации к итерации, что дает возможность построения эффективных численных алгоритмов расчета.

Литература

1. Павлов С.М., Светашков А.А. Итерационный метод решения задач линейной вязкоупругости // Изв. ВУЗов. Физика. – 1993. – Т. 36, вып.4. – С.129-136.
2. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости – М.: Наука, 1970. – 280с.
3. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.В. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336с.
4. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения). – М.: Наука, 1973. – 288с.
5. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов – М.: Изд-во МГУ, 1984 – 336с.
6. Победря Б.Е. Математическая теория нелинейной вязкоупругости // В кн.: Упругость и неупругость. Вып. 3. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. – С.95-173.
7. Шардаков И.Н., Трояновский И.Е., Труфанов Н.А. Метод геометрического погружения для решения краевых задач теории упругости. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – 66с.
8. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 298с.
9. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высш. школа, 1979. – 432с.
10. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: – М.: Мир, 1986. – 318с.

Поступила в редакцию 09.06.09

Сведения об авторах:

Куликов Роман Георгиевич, доцент, к.т.н., Пермский государственный технический университет (ПГТУ), 614000, г. Пермь, Комсомольский пр., 29; krg@cpl.pstu.ac.ru
Труфанов Николай Александрович, зав. кафедрой, профессор, д.т.н., ПГТУ; vmm@cpl.pstu.ac.ru