

## **ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛ, СВОЙСТВА КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ**

Е.В. Ломакин, А.М. Мельников

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия*

Рассмотрены задачи плоского напряженного состояния сред, характеристики пластичности которых чувствительны к виду напряженного состояния. Исследованы свойства уравнений, описывающих распределения напряжений и скоростей перемещений в пластических областях. Изучены некоторые особенности решений задач пластического равновесия рассматриваемых сред. Получено решение задачи о разрезе в поле удаленного от разреза растяжения. Решена задача о растяжении полосы с угловыми надрезами. Исследована зависимость величины предельной нагрузки от параметра, характеризующего чувствительность пластических свойств среды к виду напряженного состояния.

## **PLANE STRESS STATE OF MEDIA WITH PLASTIC PROPERTIES SENSITIVE TO THE TYPE OF STRESS**

E.V. Lomakin and A.M. Melnikov

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia*

Plane stress problems are considered for the media whose plastic properties are sensitive to the type of stress. The properties of equations characterizing the distribution of stresses and velocities in plastic regions are studied. Some features of the solutions of the problems of the limit plastic equilibrium of media are considered. The problem of a plastic thin sheet with a linear cut subjected to tension far from the cut and normal to its plane is solved. The problem of tension of a strip with V-shape cuts is considered as well. The dependence of the limit load on the parameter characterizing the sensitivity of the plastic properties of media to the type of stress is studied.

Характеристики пластичности и прочности многих материалов зависят от вида нагружения или вида напряженного состояния, которое создается в твердых телах в условиях внешних воздействий. Механизм пластического деформирования таких материалов включает, как правило, не только механизм скольжения, но также перемещение структурных элементов, образование пор и других элементов неоднородности, что приводит к необратимому изменению объема.

В данной работе исследованы характерные особенности пластического течения сред, чувствительных к виду напряженного состояния. Получены уравнения для описания полей напряжений и скоростей перемещения в пластических областях и исследованы их свойства. Определены характеристики системы уравнений и соотношения вдоль этих характеристик. Исследованы поля напряжений вблизи линейного разреза при действии нормального растягивающего напряжения, а также при растяжении полос с угловыми разрезами. Изучена зависимость предельной нагрузки от параметра, характеризующего чувствительность пластических свойств сред к виду напряженного состояния.

### 1. Определяющие соотношения

Условие пластичности для изотропных материалов в общем случае представляется в виде функции трех инвариантов тензора напряжений или трех главных значений тензора напряжений, которые выражаются через эти инварианты. Одна из возможных форм представления условия пластичности следующая:

$$F(\sigma_{ij}) = F(\sigma_0, \xi, S_{III}/\sigma_0^3). \tag{1}$$

Здесь  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$  — интенсивность касательных напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  — девиатор напряжений,  $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$  — среднее напряжение,  $\xi = \sigma/\sigma_0$  — параметр вида напряженного состояния,  $S_{III} = S_{ij} S_{jk} S_{ki}$  — третий инвариант девиатора напряжений. Первый аргумент в правой части формулы (1) определяет интенсивность касательных напряжений, второй — соотношение между нормальными и касательными напряжениями в среде, третий характеризует вид девиатора напряжений [1]. На основе анализа экспериментальных данных для различных материалов установлено, что при описании зависимости их пластических свойств от вида напряженного состояния последним аргументом можно пренебречь, так как он оказывает существенно меньшее влияние по сравнению со вторым аргументом [1]. Таким образом, условие пластичности для материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, может быть представлено в виде:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi) \sigma_0 = k. \tag{2}$$

При определении функции  $f(\xi)$  можно исходить из какого-либо конкретного вида нагружения и по отношению к нему устанавливать отличия в значениях пластических характеристик для других условий нагружения. Например, если при чистом сдвиге, когда  $\xi = 0$ , задать функцию как  $f(0) = 1$ , то тогда  $k = \sqrt{3} \tau_s$ , где  $\tau_s$  — предел текучести при сдвиге. На основе экспериментальных данных для различных материалов могут быть получены разные выражения для функции  $f(\xi)$ . Формулой (2) могут представляться некоторые из известных условий пластичности [1–2] с соответствующими функциями  $f(\xi)$ .

В данной работе используется модель жесткопластического тела, не учитывающая упругие деформации вне области пластичности. Если принять ассоциированный с условием (2) закон течения  $\dot{\epsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij}$ , то в случае жесткопластического тела получается связь между скоростями деформаций и напряжениями вида:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= h' \left[ \frac{1}{3} \Lambda(\xi) \delta_{ij} + \frac{3}{2} \lambda(\xi) f(\xi) \frac{S_{ij}}{k} \right], \\ \Lambda(\xi) &= f'(\xi), \quad \lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi), \quad h' = \frac{H}{\chi(\xi)}, \\ H &= \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}, \quad \chi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{3} \Lambda^2(\xi) + \frac{3}{2} \lambda^2(\xi)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Штрихом обозначается производная функции по параметру  $\xi$ .

Функции  $\lambda(\xi)$  и  $\Lambda(\xi)$ , а также их производные связаны соотношениями:

$$\lambda(\xi) + \xi \Lambda(\xi) = f(\xi), \quad \lambda'(\xi) + \xi \Lambda'(\xi) = 0.$$

На основе соотношений (3) можно получить выражения для интенсивности скоростей деформации

$$\Gamma = \sqrt{(2/3) \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}} = h' \lambda(\xi),$$

где  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$  — девиатор тензора деформаций, и для скорости объемной деформации

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ij} \delta_{ij} = h' \Lambda(\xi).$$

Из данных выражений следует, что функция  $\lambda(\xi)$  должна быть положительно определенной, а скорость объемной деформации зависит от интенсивности скоростей деформации:

$$\dot{\varepsilon} = \Gamma \Lambda(\xi) / \lambda(\xi).$$

Значение скорости необратимого изменения объема определяется не только уровнем интенсивности скоростей деформации, но и условиями нагружения, от которых зависит значение параметра  $\xi$ .

Требование невогнутости поверхности текучести приводит к ограничению  $f''(\xi) > 0$ , накладываемому на функцию  $f(\xi)$  [1, 2].

## 2. Уравнения плоского напряженного состояния

В условиях плоского напряженного состояния компоненты тензора напряжений  $\sigma_{i3}$  удовлетворяют условию:  $\sigma_{i3} = 0$ . Для определения напряженного состояния в пластических областях имеются два уравнения равновесия и условие пластичности (2), которые для условий плоского напряженного состояния представляются в виде:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0; \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0; \quad f(\xi) (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2} = k. \quad (4)$$

Здесь и далее запятой обозначаются производные по соответствующим координатам.

Система уравнений (4) может быть преобразована. Для этого используется представление главных напряжений через инварианты тензора напряжений:

$$\sigma_1 = \sigma + \frac{2}{3} \sigma_0 \cos \theta; \quad \sigma_2 = \sigma + \frac{2}{3} \sigma_0 \cos \left( \theta + \frac{2}{3} \pi \right); \quad \sigma_3 = \sigma + \frac{2}{3} \sigma_0 \cos \left( \theta + \frac{4}{3} \pi \right). \quad (5)$$

Угол  $\theta$  выражается через второй и третий инварианты тензора напряжений  $\cos 3\theta = \frac{9}{2} \left( \frac{S_{III}}{\sigma_0^3} \right)$ . Из системы (5) следует, что в случае плоского напряженного состояния  $\cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} \xi$ , то есть два параметра вида напряженного состояния —  $\xi$  и  $S_{III}/\sigma_0^3$  — взаимосвязаны и использование условия пластичности в виде (2) вполне обосновано.

При решении задач плоского напряженного состояния можно использовать напряжение  $S = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$  — плоский аналог среднего напряжения. Если ввести новые обозначения

$$S_0 = \sigma_0, \quad S = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{3}{2} \sigma, \quad \zeta = \frac{S}{S_0} = \frac{3}{2} \xi, \quad (6)$$

условие пластичности (2) примет вид:

$$f_1(\zeta) S_0 = k; \quad f_1(\zeta) = f \left( \frac{3}{2} \xi \right). \quad (7)$$

Условия (7) устанавливают связь между напряжением  $S$  и параметром  $\zeta$ , а именно:  $S = \zeta S_0 = k \zeta / f_1(\zeta)$ . Эта связь взаимнооднозначна, поскольку производная  $S$  по  $\zeta$  удовлетворяет соотношению:

$$S'_\zeta = k \frac{f_1(\zeta) - \zeta f'_1(\zeta)}{f_1^2(\zeta)} = k \frac{f(\xi) - \xi f'(\xi)}{f^2(\xi)} = \frac{k \lambda(\xi)}{f^2(\xi)} > 0.$$

Таким образом, значение  $\zeta$  можно выразить через напряжение  $S$ :  $\zeta = \zeta(S)$ . В условиях плоского напряженного состояния значения  $\zeta$  ограничены ( $|\zeta| \leq 1$ ), и максимальное значение достигается при равномерном двухосном растяжении, а минимальное — при равномерном двухосном сжатии. Выражения (6) и условие (7) позволяют представить интенсивность напряжений  $S_0$  как функцию напряжения  $S$ ,  $S_0 = S_0(S)$ .

Для определения характеристик системы уравнений (4) используются известные формулы для напряжений [5]:

$$\sigma_{11} = S - k S_1 \sin 2\varphi, \quad \sigma_{22} = S + k S_1 \sin 2\varphi, \quad \sigma_{12} = k S_1 \cos 2\varphi. \quad (8)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между осью  $x_1$  и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение;  $k S_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ , где  $\sigma_1, \sigma_2$  — главные напряжения в плоскости. С помощью формул (8) можно получить следующее выражение для интенсивности напряжений:

$$S_0^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 = S^2 + 3k^2 S_1^2.$$

Последнее равенство позволяет выразить  $S_1$  через напряжение  $S$  :

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \zeta(S)^2} [f_1(\zeta(S))]^{-1} = F(S). \quad (9)$$

Следует заметить, что подкоренное выражение неотрицательно в силу ограничения на значения параметра  $\zeta$ . С учетом зависимости (9) выражения для напряжений (8) приводятся к виду:

$$\sigma_{11} = S - k F(S) \sin 2\varphi, \quad \sigma_{22} = S + k F(S) \sin 2\varphi, \quad \sigma_{12} = k F(S) \cos 2\varphi. \quad (10)$$

В результате подстановки выражения (10) в уравнения равновесия (4) может быть получена система уравнений:

$$\begin{aligned} S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\varphi - S_{,2} \cos 2\varphi) - 2kF(S)(\varphi_{,1} \cos 2\varphi + \varphi_{,2} \sin 2\varphi) &= 0, \\ S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\varphi + S_{,2} \sin 2\varphi) - 2kF(S)(\varphi_{,1} \sin 2\varphi - \varphi_{,2} \cos 2\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Штрихом обозначается производная  $F$  по  $S$ .

Уравнения (11) по своей форме аналогичны уравнениям для условий плоской деформации. Если обозначить характеристики системы уравнений индексами  $\alpha$  и  $\beta$ , можно получить уравнения характеристик и соотношения вдоль них:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \varphi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\varphi \pm \sqrt{1 - k^2 F'^2}}{-kF' + \sin 2\varphi}, \quad dS \mp \frac{2kF d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 F'^2}} = 0. \quad (12)$$

Система уравнений (11) является гиперболической при условии  $|kF'(S)| < 1$ .

Из определяющих соотношений (3) в случае плоского напряженного состояния следует, что:

$$\frac{v_{1,1} - v_{2,2}}{v_{1,2} + v_{2,1}} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}, \quad \frac{v_{1,1} + v_{2,2}}{v_{1,2} + v_{2,1}} = \frac{S_0}{\sigma_{12}} \left( \frac{2}{3} \Lambda(\xi) + \frac{3}{2} \lambda(\xi) \xi \right) / (3\lambda(\xi)), \quad (13)$$

где  $v_1, v_2$  — компоненты вектора скорости.

После подстановки соотношений (9) и (10) в уравнения (13) получается система уравнений для скоростей

$$\begin{aligned} (v_{1,1} + v_{2,2}) \cos 2\varphi + kF'(v_{1,2} + v_{2,1}) &= 0, \\ v_{1,1} - v_{2,2} &= -(v_{1,2} + v_{2,1}) \operatorname{tg} 2\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Характеристики уравнений (14) для скоростей совпадают с характеристиками уравнений (11) для напряжений, и вдоль них выполняются соотношения Гейрингер [4]:

$$dv_\alpha - v_3 d\varphi_\alpha = 0, \quad dv_\beta - v_4 d\varphi_\beta = 0. \quad (15)$$

Здесь  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  — скорости вдоль соответствующих семейств характеристик,  $v_3$  и  $v_4$  — нормальные к характеристикам компоненты скорости:

$$v_3 = (v_\beta - v_\alpha \cos \varphi) / \sin \omega, \quad v_4 = (v_\beta \cos \varphi - v_\alpha) / \sin \omega, \quad \omega = \varphi_\beta - \varphi_\alpha.$$

### 3. Свойства характеристик в случае гиперболичности системы

Для исследования свойств характеристик в работе вводится угол  $\psi$ , зависящий от  $S$ , такой, что  $kF' = -\sin 2\psi$  и  $\sqrt{1 - k^2 F'^2} = \cos 2\psi$ . Подстановка этих выражений в уравнения характеристик системы (12) позволяет получить формулы:

$$\operatorname{tg} \varphi_\alpha = \operatorname{tg}(\varphi - \psi), \quad \operatorname{tg} \varphi_\beta = -\operatorname{ctg}(\varphi + \psi) = \operatorname{tg}\left(\varphi + \psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (16)$$

Следовательно, угол между характеристиками равняется  $\omega = \frac{\pi}{2} + 2\psi$ .

Также вводится обозначение

$$\Omega(S) = \int_0^S \frac{\sqrt{1 - k^2 F'^2}}{kF} dS,$$

с использованием которого соотношения вдоль характеристик (12) преобразуются к виду:

$$\Omega(S) \mp 2\varphi = \operatorname{const}. \quad (17)$$

Отсюда вытекают свойства характеристик, аналогичные тем, которые описаны в работе [5] для случая плоского напряженного состояния идеально пластического тела. В частности, если характеристика имеет прямолинейный участок, то вдоль него должны быть постоянны  $\Omega$  и  $\varphi$ . Действительно, из выражения (17) получается, что вдоль прямолинейного участка (для  $\alpha$ -линии, в частности)

$$\varphi - \psi = \operatorname{const}.$$

Из последнего соотношения и соотношений вдоль характеристик (17) следует постоянство  $S$ ,  $\Omega$ ,  $\varphi$ , а значит, и напряжений. Если в какой-либо области прямолинейны оба семейства характеристик, то в ней реализуется равномерное напряженное состояние.

### 4. Уравнения для частного вида условия пластичности

Рассматривается случай, когда функция  $f(\xi)$  представляется линейной функцией

$$f(\xi) = 1 + C\xi, \quad (18)$$

где  $C$  — коэффициент, характеризующий чувствительность пластических свойств материала к изменению вида напряженного состояния.

Тогда из соотношений (2) и (18) получается обобщенное условие Кулона–Мора, в котором полуразность и полусумма главных напряжений заменены интенсивностью напряжений и средним напряжением. В частности, при  $C = 0$  из условия (2) следует критерий пластичности Губера–Мизеса. При этом функция  $f(\xi)$  необходимым образом должна быть положительно определенной. Поскольку в случае плоского напряженного состояния параметр вида напряженного состояния  $\xi$  ограничен ( $|\xi| \leq 3/2$ ), то на значение параметра  $C$  накладывается ограничение  $|C| < 3/2$ . При задании функции  $f(\xi)$  в линейном виде (18) получаются следующие выражения для параметра  $\zeta$  и функции  $F$ , определенной уравнением (9):

$$\zeta = \frac{S}{k - 2CS/3}, \quad F = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{1 + 2C\zeta/3}. \quad (19)$$

Отсюда  $F$  можно представить как функцию  $S$ :

$$F(S) = \frac{1}{3\sqrt{3}k} \sqrt{(9 - 4C^2) \left( \left( \frac{9k}{9 - 4C^2} \right)^2 - \left( S + \frac{6kC}{9 - 4C^2} \right)^2 \right)}. \quad (20)$$

Для упрощения выражений вводятся обозначения:

$$S_2 = \frac{S}{k}, \quad S_3 = S_2 + \frac{2}{3}aC, \quad a = \frac{9}{9 - 4C^2}, \quad (21)$$

с учетом которых выражение (20) для функции  $F$  приводится к виду:

$$F(S_3) = \sqrt{\frac{a}{3}} \sqrt{1 - S_3^2/a^2}. \quad (22)$$

Из выражения (22) вытекает ограничение на область изменения напряжения  $S$ , а именно,  $|S_3| < a$ . В результате вычисления производной функции  $F$  получается формула:

$$kF'_S = F'_{S_3} = -\frac{1}{\sqrt{3}a^{3/2}} \frac{S_3}{\sqrt{1 - S_3^2/a^2}}. \quad (23)$$

Из условия гиперболичности системы уравнений (11) ( $|kF'| < 1$ ) и выражения (23) следует дополнительное ограничение на значение напряжения  $S$ , которое представляется в виде

$$|S_3| < \frac{a}{\sqrt{1 + 1/(3a)}} < a, \quad \text{так как } a > 0. \quad (24)$$

Это ограничение является более жестким, чем предыдущее. Уравнения характеристик принимают вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \varphi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\varphi \pm \frac{\sqrt{a^3 + (a+1/3)(S_2 + 2aC/3)^2}}{\sqrt{a}\sqrt{a^2 - (S_2 + 2aC/3)^2}}}{\sin 2\varphi + \frac{S_2 + 2aC/3}{\sqrt{3a}\sqrt{a^2 - (S_2 + 2aC/3)^2}}}. \quad (25)$$

Если в выражении (17) функцию  $\Omega$  представить в аналитическом виде, то в результате получаются следующие соотношения вдоль характеристик:

$$2\sqrt{3a+1} \arcsin \frac{\sqrt{1+1/(3a)}}{a} S_3 + \arcsin \frac{a - S_3(1+1/(3a))}{(a - S_3)\sqrt{1+1/(3a)}} - \arcsin \frac{a + S_3(1+1/(3a))}{(a + S_3)\sqrt{1+1/(3a)}} \mp 4\varphi = \text{const}. \quad (26)$$

Эти соотношения могут использоваться для решения различных задач. Ниже они применяются к исследованию растяжения плоскости с полубесконечным разрезом и полосы с угловыми вырезами.

### 5. Линейный разрез в поле растяжения

Рассмотрим задачу о плоскости с полубесконечным разрезом, находящейся под действием равномерного растягивающего напряжения, нормального к плоскости разреза и приложенного на удалении от него (Рис. 1). Края разреза  $-\infty < x_1 \leq 0$ ,  $x_2 = 0$  свободны от напряжений.

С помощью формул (8) получаем выражения для нормального и касательного напряжений на границе:

$$\sigma_n = S - kF \sin 2(\varphi - \gamma), \quad \tau_n = kF \cos 2(\varphi - \gamma). \quad (27)$$

Здесь  $\gamma$  — угол между нормалью к границе и направлением оси  $x_1$ . Из равенства нулю касательного напряжения на краях разреза следует, что  $\varphi = \pm \frac{\pi}{4} + \pi m$ , где  $m$  — целое число. Поскольку нормальное напряжение на поверхности разреза также равно нулю, из выражений (27) находим, что  $S_2 = \pm F$ . Разрешая это равенство с учетом выражения (22) для функции  $F$ , на поверхностях разреза получаем:

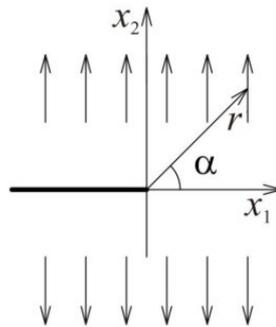


Рис. 1. Полубесконечный разрез

$$S_2 = \frac{3}{6+2C}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \sigma_{11}/k = 2S_2 > 0$$

или

$$S_2 = -\frac{3}{6-2C}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \sigma_{11}/k = 2S_2 < 0.$$

Проанализировав выражения (16) и (25) для углов наклона характеристик, приходим к выводу, что в первом случае в сторону увеличения  $x_1$  направлена  $\beta$ -характеристика, а во втором —  $\alpha$ -характеристика. В силу симметрии задачи касательные напряжения перед разрезом при  $x_1 > 0, x_2 = 0$  также равны нулю. Отсюда следует, что  $\varphi = \pm \frac{\pi}{4} + \pi m$ . Поскольку  $\sigma_{22}$  при растяжении положительно, то заключаем, что на этом участке  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi m$ . Для многих значений параметра  $C$  не удастся получить непрерывное поле напряжений, в частности, для  $C \geq 0$ . Поэтому построим решение, подобное тому, которое описано у Хатчинсона [6]. В этом решении при  $x_1 > 0, x_2 = 0$  система уравнений (11) становится параболической, и криволинейные характеристики асимптотически приближаются к оси  $x_1$ .

Рассмотрим соотношения на линии разрыва. Из геометрических представлений решения в окрестности вершины разреза следует, что возможное направление линии разрыва напряжений совпадает с радиальным направлением. Из условий равновесия вытекает, что на этой линии нормальное  $\sigma_\alpha$  и касательное  $\sigma_{r\alpha}$  напряжения непрерывны и возможен разрыв только радиальной компоненты  $\sigma_r$ . При этом должно выполняться условие пластичности.

На основании соотношений (2) и (18) представляем условие пластичности в виде:

$$\sigma_r^2 \left(1 - \frac{C^2}{9}\right) + \sigma_r \left(\frac{2}{3}kC - \sigma_\varphi \left(1 - \frac{2}{9}C^2\right)\right) + 3\sigma_{r\varphi}^2 + \sigma_\varphi^2 + \frac{2}{3}kC\sigma_\varphi - \frac{C^2}{9}\sigma_\varphi^2 - k^2 = 0. \quad (29)$$

Разрешая уравнение (29) относительно  $\sigma_r$  и учитывая, что остальные компоненты тензора напряжений непрерывны, находим величину скачка радиального напряжения на линии разрыва:

$$[\sigma_r] = \sigma_r^+ - \sigma_r^- = \frac{1}{(1-C^2/9)} \left( 4k^2 - \sigma_\varphi^2 \left( 3 - \frac{4}{3}C^2 \right) - 4kC\sigma_\varphi - \sigma_{r\varphi}^2 \left( 12 - \frac{4}{3}C^2 \right) \right)^{1/2}. \quad (30)$$

На рисунке 2 показано поле характеристик в окрестности разреза при конкретном значении параметра  $C$ . В области АОВ (Рис. 2), примыкающей к поверхности разреза, реализуется равномерное напряженное состояние:  $\sigma_{11} = -\frac{3k}{3-C}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$ , которое в полярной системе координат характеризуется выражениями:

$$\frac{\sigma_r}{k} = -\frac{3}{2(3-C)}(1 + \cos 2\alpha), \quad \frac{\sigma_{r\alpha}}{k} = \frac{3}{2(3-C)} \sin 2\alpha, \quad \frac{\sigma_\alpha}{k} = -\frac{3}{2(3-C)}(1 - \cos 2\alpha). \quad (31)$$

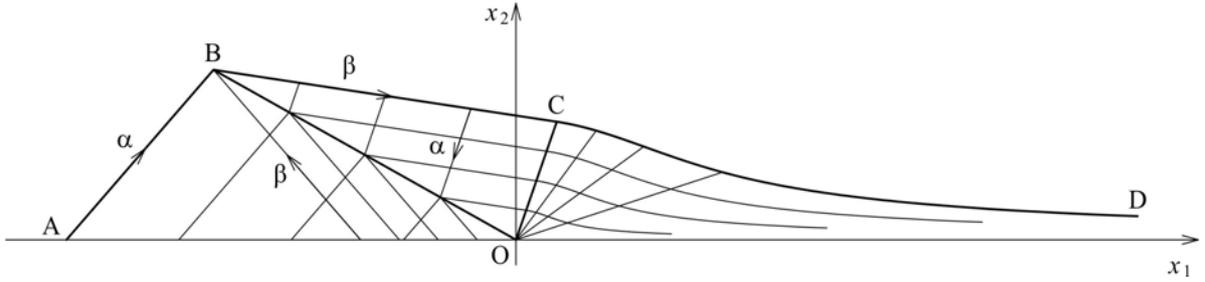


Рис. 2. Поле характеристик при значении  $C = 0,5$

Используя выражения (30) и (31), находим скачок напряжения  $\sigma_r$  на линии разрыва OB и значение напряжения справа от линии разрыва:

$$\left[ \frac{\sigma_r}{k} \right] = \frac{1}{2(1-C^2/9)(3-C)} (9 \cos 2\alpha_{OB} + 3 - 4C),$$

$$\frac{\sigma_r^+}{k} = \frac{3}{2(1-C^2/9)(3-C)} \left[ \left( 2 - \frac{C^2}{9} \right) \cos 2\alpha_{OB} + \frac{C}{3} \left( \frac{C}{3} - 4 \right) \right]. \quad (32)$$

Здесь  $\alpha_{OB}$  — угол наклона линии разрыва. Линия OB не является характеристикой, и на ней, согласно выражениям (31) и (32), напряжения постоянны. Поэтому в прилегающей к ней области ВОС имеет место равномерное напряженное состояние:

$$\frac{\sigma_{11}}{k} = \frac{1}{4(1-C^2/9)(3-C)} \left[ 9 \cos^2 2\alpha_{OB} + 4(3-C) \cos 2\alpha_{OB} - 9 - 4C + \frac{4}{3} C^2 \right],$$

$$\frac{\sigma_{12}}{k} = \frac{\sin 2\alpha_{OB}}{4(1-C^2/9)(3-C)} (9 \cos 2\alpha_{OB} + 3 - 4C),$$

$$\frac{\sigma_{22}}{k} = -\frac{1}{4(1-C^2/9)(3-C)} \left[ 9 \cos^2 2\alpha_{OB} - 2(3-2C) \cos 2\alpha_{OB} - 3 + 4C \right],$$

$$\frac{S^+}{k} = \frac{3}{4(1-C^2/9)(3-C)} \left[ 3 \cos 2\alpha_{OB} - 1 + \frac{2C}{3} \left( \frac{C}{3} - 2 \right) \right]. \quad (33)$$

Углы наклона характеристик в этой области определяются уравнением (25) и выражением (33) для напряжений  $S$ . Линия ОС представляет собой характеристику; угол  $\alpha_{OC}$  равен углу наклона  $\alpha$ -характеристики и может быть вычислен на основе формул (25) и (33).

К области ВОС примыкает область простого напряженного состояния, в которой прямолинейные  $\alpha$ -характеристики исходят из вершины разреза (центрированное поле). Найдем границу CD центрированной области COD. В полярной системе координат  $(r, \alpha)$  с началом в точке O — центре веера характеристик, уравнение линии, касательная к которой составляет с радиусом угол  $\omega(\alpha)$ , записывается в виде:

$$r = r_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} \operatorname{ctg} \omega(\alpha) d\alpha. \quad (34)$$

Рассмотрим веер  $\alpha$ -характеристик. В этом случае угол  $\alpha$  совпадает с углом  $\varphi_\alpha$ , а  $\omega = \frac{\pi}{2} + 2\psi$  — угол между характеристиками (16). При этом уравнение (34) представляет собой уравнение  $\beta$ -характеристики. Приращение угла в соответствии с (16) определяется равенством  $d\alpha = d\varphi_\alpha = d\varphi - d\psi$ .

Согласно соотношению (12), вдоль  $\beta$ -характеристики  $d\varphi = -\frac{\sqrt{1-k^2F'^2}}{2kF}dS$ , и из формулы для угла  $\psi$  следует, что  $d\psi = -\frac{kF''}{2\sqrt{1-k^2F'^2}}dS$ . Таким образом, приращение угла  $\alpha$  удовлетворяет выражению:

$$d\alpha = d\varphi_\alpha = \frac{k^2FF'' + k^2F'^2 - 1}{2kF\sqrt{1-k^2F'^2}}dS. \quad (35)$$

Из формул (16) для угла между характеристиками  $\omega$  получается, что  $\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg}(2\psi + \pi/2) = -\operatorname{tg} 2\psi$ . Подставляя это соотношение, а также приращение (35) в уравнение (34) и интегрируя его, получаем уравнение для  $\beta$ -характеристики:

$$r = r_0 \left( \frac{kF(S)\sqrt{1-k^2F'^2}(S)}{kF(S(\alpha_0))\sqrt{1-k^2F'^2}(S(\alpha_0))} \right)^{-1/2}. \quad (36)$$

В случае, когда центрированное поле состоит из  $\beta$ -характеристик, аналогичным образом находим выражение для приращения угла:

$$d\alpha = d\varphi_\beta = -\frac{k^2FF'' + k^2F'^2 - 1}{2kF\sqrt{1-k^2F'^2}}dS. \quad (37)$$

Эта формула отличается от формулы (35) знаком, однако угол между характеристиками  $\omega$  также имеет противоположный знак, поэтому уравнение  $\alpha$ -характеристики совпадает по виду с уравнением  $\beta$ -характеристики в предыдущем случае (36).

На продолжении разреза при  $x_1 > 0$ ,  $x_2 = 0$  напряжение  $S$  достигает одного из своих граничных значений, определяемых условием (24), и система уравнений (11) становится параболической. В случае растяжения  $S$  принимает максимальное значение. Таким образом, при движении к оси  $x_1$  напряжение  $S$  возрастает. Для функции  $F$  вида (22), (23) из уравнений (35), (37) получаем уравнения

$$d\varphi_\alpha = -\frac{1/(3a)^2 + 1}{2kF\sqrt{1-k^2F'^2}}dS \quad \text{для веера } \alpha\text{-характеристик,}$$

$$d\varphi_\beta = \frac{1/(3a)^2 + 1}{2kF\sqrt{1-k^2F'^2}}dS \quad \text{для веера } \beta\text{-характеристик.}$$

Заметим, что при возрастании напряжения  $S$  угол  $\varphi_\alpha$  уменьшается в случае веера  $\alpha$ -характеристик. В данной задаче реализуется именно этот вариант.

Вследствие симметрии поля напряжений относительно оси  $x_1$  напряжение  $\sigma_{12} = 0$  при  $\alpha = 0$ . Используя значение  $S$ , определенное условием (24), находим напряжения перед вершиной разреза при  $x_1 > 0, x_2 = 0$ :

$$\frac{\sigma_{11}}{k} = \frac{3(9 + 2C^2) - 6C\sqrt{3}\sqrt{9 - C^2}}{\sqrt{3}(9 - 4C^2)\sqrt{9 - C^2}}, \quad \frac{\sigma_{22}}{k} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{9 - C^2} - 6C}{(9 - 4C^2)}, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (38)$$

На основе выражений (33), (38), а также условия непрерывности напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_{r\alpha}$  на линии разрыва напряжений можно численно определить значение угла, при котором происходит разрыв напряжений. С использованием соотношений (27), (31) это условие представляется в виде:

$$\left( \frac{3}{2(3 - C)} \sin 2\alpha_{\text{ОВ}} + F \cos 2(\varphi^+ - \alpha_{\text{ОВ}} - \pi/2) \right)^2 + \left( -\frac{3}{2(3 - C)} (1 - \cos 2\alpha_{\text{ОВ}}) - \frac{S^+}{k} + F \sin 2(\varphi^+ - \alpha_{\text{ОВ}} - \pi/2) \right)^2 = 0.$$

На рисунках 2–5 показаны поля характеристик и распределения напряжений в зависимости от угла при различных значениях параметра  $C$ . Таблица содержит значения напряжений в областях АОВ, ВОС и на положительной полуоси  $Ox_1$ , а также углы, характеризующие взаимное расположение этих областей, соответствующих различным значениям коэффициента  $C$ .

Кроме разрывного поля напряжений при некоторых значениях параметра  $C$  возможно построение непрерывного решения. Значения параметра находим из соотношений вдоль  $\beta$ -характеристики (17), (26). Для этого в левую часть уравнения (26) подставляем первый вариант граничных значений для напряжения  $S$  и угла  $\varphi$  на поверхности разреза (28) и приравниваем к соответствующему значению на продолжении разреза при  $x_1 > 0, x_2 = 0$  в случае достижения параболичности:

$$\Omega \left( \frac{3}{6 + 2C}, C \right) - \frac{\pi}{2} = \Omega(S_0, C) - \frac{3\pi}{2}.$$

Здесь  $S_0$  — верхняя граница напряжений, определяемая неравенством (24). Это уравнение можно решить численно относительно  $C$ . В результате находим, что  $C = -1,0251$ . При меньших значениях  $C$  возможно построение непрерывного поля напряжений. Пример такого решения представлен на рисунках 6 и 7. В области АОВ реализуется равномерное напряженное состояние  $\sigma_{11} = \frac{3k}{3 + C}, \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$ . Область ВОС состоит из веера  $\alpha$ -характеристик, и напряженное состояние здесь описывается соответствующими уравнениями (36). В области СОД также имеет место равномерное

напряженное состояние, которое находим из соотношений вдоль характеристики (17) с учетом того, что  $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$  в силу равенства нулю касательных напряжений на продолжении разреза.

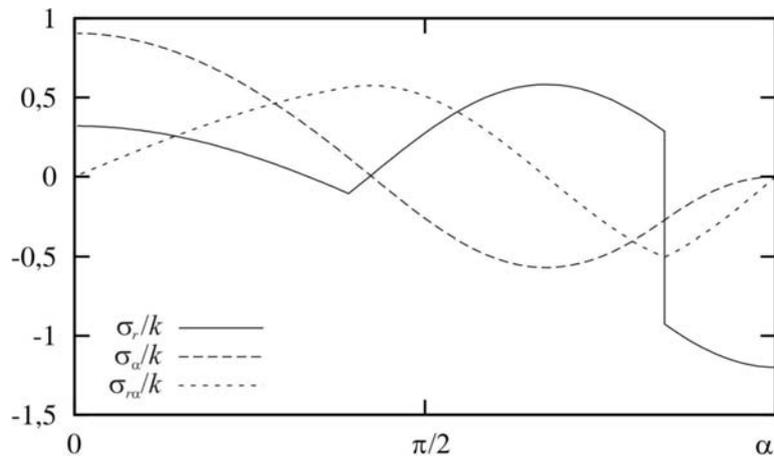


Рис. 3. Распределение напряжений при значении  $C = 0,5$

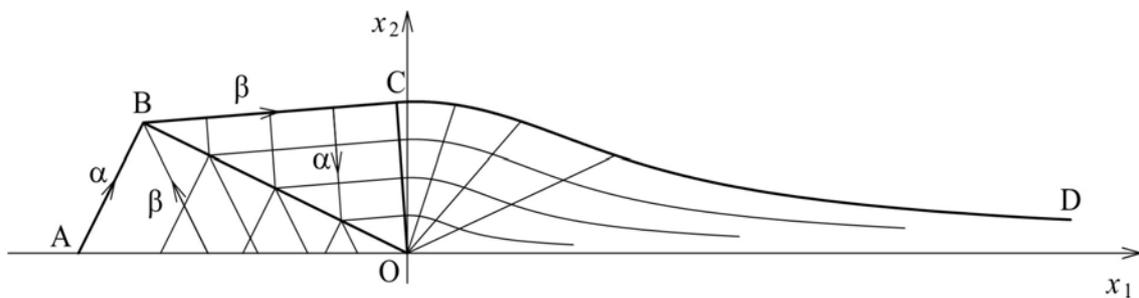


Рис. 4. Поле характеристик при значении  $C = -0,5$

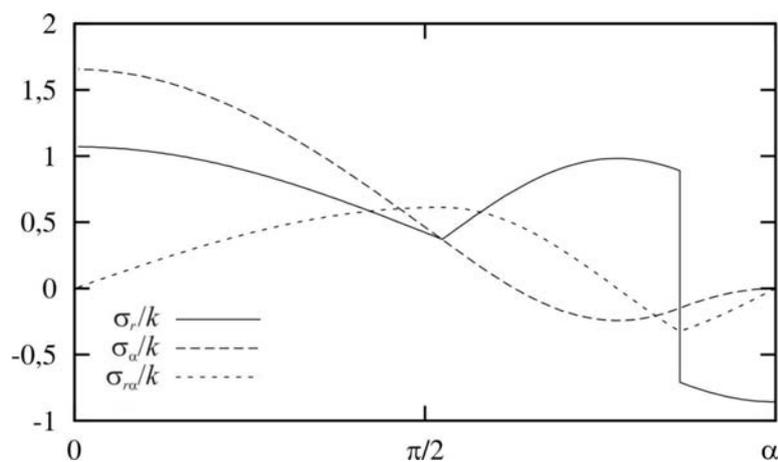


Рис. 5. Распределение напряжений при значении  $C = -0,5$

Таблица. Напряженное состояние в окрестности разреза

| C   | Область АОВ        |                    |                    | Область ВОС        |                    |                    | Ox <sub>1</sub>    |                    |                    | α <sub>ОВ</sub> | α <sub>ОС</sub> |
|-----|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|
|     | σ <sub>11</sub> /k | σ <sub>22</sub> /k | σ <sub>12</sub> /k | σ <sub>11</sub> /k | σ <sub>22</sub> /k | σ <sub>12</sub> /k | σ <sub>11</sub> /k | σ <sub>22</sub> /k | σ <sub>12</sub> /k |                 |                 |
| 0,0 | -1,000             | 0                  | 0                  | 0,003              | 0,302              | -0,551             | 0,577              | 1,155              | 0                  | 151,24          | 79,84           |
| 0,1 | -1,034             | 0                  | 0                  | -0,058             | 0,299              | -0,540             | 0,515              | 1,092              | 0                  | 151,06          | 77,72           |
| 0,2 | -1,071             | 0                  | 0                  | -0,115             | 0,294              | -0,530             | 0,459              | 1,037              | 0                  | 151,01          | 75,73           |
| 0,3 | -1,111             | 0                  | 0                  | -0,167             | 0,288              | -0,522             | 0,408              | 0,998              | 0                  | 151,07          | 73,86           |
| 0,4 | -1,154             | 0                  | 0                  | -0,216             | 0,283              | -0,515             | 0,368              | 0,945              | 0                  | 151,24          | 72,08           |
| 0,5 | -1,200             | 0                  | 0                  | -0,263             | 0,277              | -0,509             | 0,320              | 0,906              | 0                  | 151,48          | 70,36           |

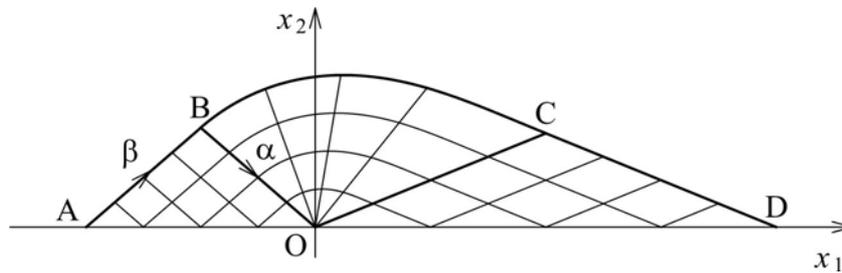


Рис. 6. Поле характеристик при значении C = -1,05

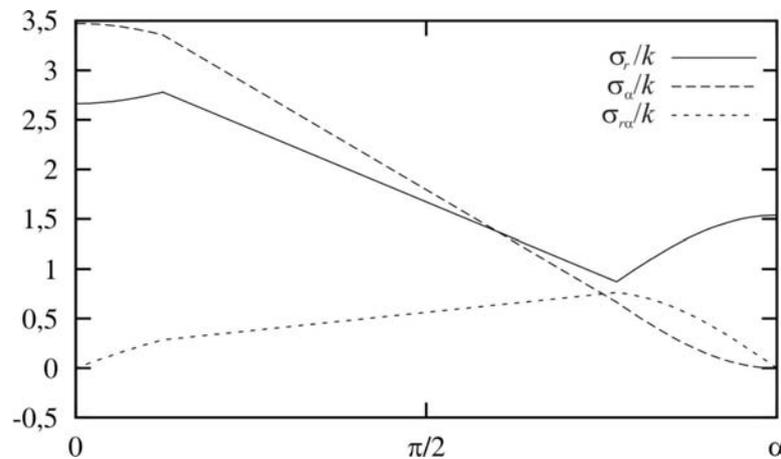


Рис. 7. Распределение напряжений при значении C = -1,05

### 6. Растяжение полосы с угловыми вырезами

Предварительно рассмотрим растяжение силой  $P$  гладкой полосы шириной  $2h$  с боковыми поверхностями, свободными от напряжений (Рис. 8). В полосе реализуется равномерное напряженное состояние. Используя соотношения (27) для нормального и касательного напряжений на свободной границе, находим напряжения в полосе  $\sigma_{22}/k = 3/(3+C)$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{11} = 0$  и предельную нагрузку

$$P = \int_{-h}^h \sigma_{22} dx_1 = 6kh / (3 + C). \tag{39}$$

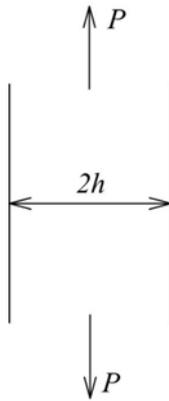
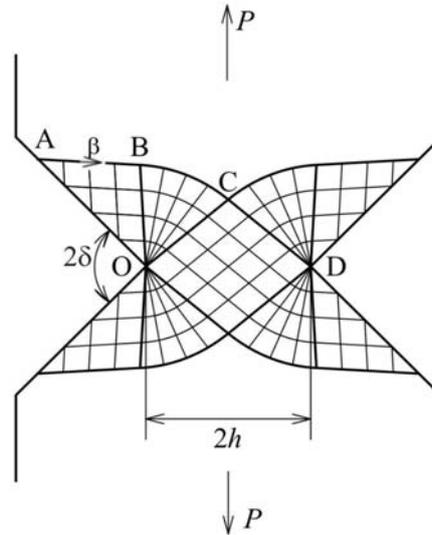


Рис. 8. Гладкая полоса

Рис. 9. Поле характеристик при растяжении полосы с симметричными угловыми вырезами при  $C = -1$ ,  $\delta = \pi/4$ 

Перейдем к растяжению полосы, ослабленной симметричными угловыми вырезами (Рис. 9). Здесь, аналогично задаче о разрезе, к свободным прямолинейным сторонам вырезов примыкают области одноосного растяжения или сжатия. Напряженное состояние в этих областях характеризуется следующими параметрами:

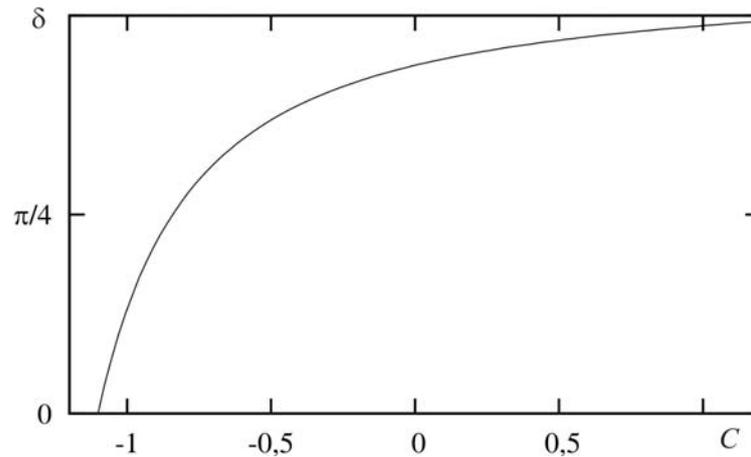
$$S = \frac{3k}{2(3+C)}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} - \delta \quad \text{или} \quad S = -\frac{3k}{2(3-C)}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} - \delta. \quad (40)$$

Растяжению соответствует первый вариант. Среднее сечение также находится в условиях равномерного напряженного состояния. В силу симметрии  $\sigma_{12} = 0$  на OD. Из этого условия следует, что в среднем сечении угол  $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ . Две области равномерного напряженного состояния соединены центрированным полем характеристик.

Определим значения угла  $\delta$ , для которых возможно построение непрерывного поля напряжений. Как и в задаче о разрезе, используем в центрированном поле веер  $\alpha$ -характеристик. При этом угол  $\alpha$  уменьшается при переходе от поверхности выреза к средней области, а напряжение  $S$  увеличивается. Для построения непрерывного решения необходимо, чтобы напряжения на OD удовлетворяли неравенству (24). В выражении (40) обозначаем через  $S_0$  значение напряжения на границе выреза, а через  $S$  — напряжение на OD. Из соотношения (17) вдоль  $\beta$ -характеристики получаем:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} [\Omega(S) - \Omega(S_0)]. \quad (41)$$

Подставив предельное значение напряжения  $S$ , при котором система уравнений (11) становится параболической, в выражение (41), находим минимальное значение угла выреза, при котором возможно построение непрерывного поля напряжений. Такая предельная диаграмма показана на рисунке 10.



**Рис. 10.** Нижняя граница угла  $\delta$ , при котором возможно построение непрерывного поля напряжений

Для значений параметров  $\delta$  и  $C$ , лежащих ниже этой предельной диаграммы, возможно построение решения в виде шейки. При этом вдоль  $OD$  оба семейства характеристик сливаются в одно, а напряжение  $S$  и угол  $\varphi$  определяются по формулам:

$$S = \frac{3k}{9 - 4C^2} \left( \frac{27\sqrt{3}}{2\sqrt{9 - C^2}} - 2C \right), \quad \varphi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Используя данные значения, находим напряжение  $\sigma_{22}$  и предельную нагрузку  $P^*$ :

$$\frac{\sigma_{22}}{k} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{9 - C^2} - 6C}{9 - 4C^2}, \quad P^* = 4kh \frac{\sqrt{3}\sqrt{9 - C^2} - 3C}{9 - 4C^2}.$$

На основе этих выражений получаем формулу для коэффициента усиления  $P^*/P$

$$\frac{P^*}{P} = \frac{(2\sqrt{3}\sqrt{9 - C^2} - 6C)(3 + C)}{3(9 - 4C^2)},$$

где  $P$  определяется выражением (39).

На рисунке 9 приведен пример построения непрерывного поля напряжений. Предельная нагрузка определяется значением напряжения  $\sigma_{22}$  на отрезке  $OD$ . На рисунке 11 показана зависимость коэффициента усиления от угла выреза при различных значениях коэффициента  $C$ , характеризующего чувствительность пластических свойств материала к изменению вида напряженного состояния.

## 7. Заключение

Применительно к условиям плоского напряженного состояния рассмотрена постановка задач пластического течения сред, характеристики пластичности которых зависят от вида напряженного состояния. Исследованы свойства уравнений, описывающих поля напряжений и скоростей перемещений в пластических областях.

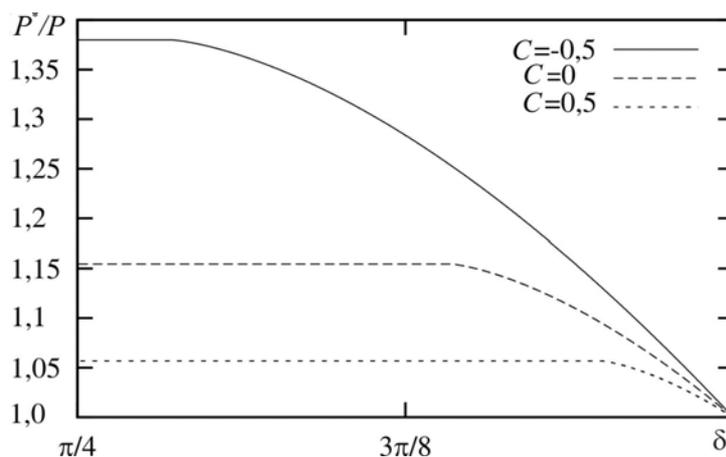


Рис. 11. Коэффициент усиления при различных значениях  $C$

Исследовано распределение напряжений вблизи вершины разреза в плоскости, находящейся под действием растягивающего напряжения, нормального к плоскости разреза и приложенного на удалении от него. Показано, что для широкого диапазона значений параметра, характеризующего чувствительность свойств среды к изменению вида напряженного состояния, не удастся построить поле напряжений, в котором все компоненты тензора напряжений непрерывны. Поэтому продемонстрированы примеры соответствующих разрывных полей напряжений и проведено сравнение с решением для пластически несжимаемой среды, свойства которой инвариантны к условиям нагружения. Рассмотрена задача о растяжении полосы с угловыми вырезами. Исследована зависимость предельной нагрузки и коэффициента усиления от параметра, характеризующего зависимость пластических свойств материалов от вида напряженного состояния.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00190).

## Литература

1. Ломакин Е.В. Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряжённого состояния // Мех. композит. материалов. – 1988. – № 1. – С. 3-9.
2. Ломакин Е.В. Пластическое течение дилатирующей среды в условиях плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 6. – С. 58-68.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752с.
4. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М.: Физматлит, 1962. – 432с.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420с.
6. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – V. 16. – P. 337-347.