

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Р.В. Гольдштейн, М.Н. Перельмутер

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*

Предложена модель разрушения композитов и адгезионных соединений, основанная на рассмотрении зоны процесса разрушения вблизи вершины трещины. Полагается, что зона процесса разрушения представляет собой слой конечной длины, содержащий материал с частично нарушенными связями между его отдельными структурными элементами (концевая область), рассматриваемый как часть трещины. Наличие связей между берегами трещины в концевой области моделируется приложением к поверхностям трещины сил сцепления, вызванных присутствием связей. Анализ предельного равновесия трещины в рамках модели концевой области выполняется на основе нелокального критерия разрушения с энергетическим условием продвижения вершины трещины и кинематическим условием для определения продвижения края концевой области трещины и включает: 1) установление зависимости сил сцепления от раскрытия трещины; 2) оценку напряженного состояния вблизи трещины с учетом внешних нагрузок и сил сцепления; 3) определение зависимости критических внешних нагрузок от длины трещины. В работе рассмотрены все перечисленные этапы. Приведены результаты модельных расчетов.

## MODELING OF FRACTURE TOUGHNESS OF COMPOSITE MATERIALS

R.V. Goldstein and M.N. Perelmuter

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia*

A model of fracture of composites materials and adhesion junctions is proposed. The model is based on the analysis of the process zone formed near the crack tip. It is assumed that the process zone is a layer of finite length with weakened bonds between the material particles (the end zone). This zone is considered as a part of the crack. The interaction of crack surfaces is modeled by applying adhesion forces caused by bonds to crack surfaces. In the framework of the present end-zone model, the analysis of the limit equilibrium of cracks involves: (a) definition of relationships between adhesion forces and crack opening, (b) evaluation of displacements and stresses around the crack taking account of external loads and adhesion forces, and (c) definition of the dependence of critical external loads on the crack length. The analysis is based on a fracture criterion with an energy condition for the advance of the crack tip and a kinematic condition of the bond rupture. The results of calculation of fracture parameters are presented.

### 1. Введение

Связи между берегами трещины в композиционных материалах и адгезионных соединениях, образованные подкрепляющими волокнами или слоем адгезива, сдерживают развитие разрушения. Этот эффект усиливается при возрастании размера части трещины, занятой связями (далее — концевой области трещины) [1–3]. Если длина концевой области трещины не является малой по сравнению с размером трещины, то приближенные методы оценки трещиностойкости, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой областью, неприменимы. В таких случаях необходимо прямое моделирование напряженного состояния в концевой области трещины с учетом деформационных характеристик связей и использованием критерия разрушения, описывающего как продвижение вершины трещины, так и изменение размера концевой области трещины при ее росте.

Одна из возможностей моделирования концевой области трещины состоит в рассмотрении ее как части (продолжения) трещины и в явном приложении к поверхностям трещины в концевой области сил сцепления, сдерживающих ее раскрытие. Различные варианты такой модели трещины использованы для анализа хрупкого и упругопластического разрушения однородных тел в работах [4–6] в предположении, что напряжения в вершине трещины ограничены, что эквивалентно равенству нулю коэффициента интенсивности напряжений. Если процессы деформирования и разрушения в концевой области трещины включают в себя несколько физических механизмов, как, например, в композиционных материалах или адгезионных соединениях, то в таких случаях более эффективным является использование модели концевой области с сингулярностью напряжений в вершине трещины. Для трещин в однородных материалах такая модель рассмотрена в статьях [1–3] и развита для трещин с концевой областью на границе раздела материалов с различными физико-механическими свойствами в работах [7–10].

Моделирование трещиностойкости композиционных материалов и адгезионных соединений на основе модели концевой области трещины состоит из трех основных этапов: а) определения закона деформирования связей в концевой области трещины; б) анализа напряженного состояния в концевой области трещины; в) анализа предельного равновесия трещины с учетом возможности продвижения вершины трещины и края концевой области при действии внешних нагрузок и усилий, возникающих в связях.

В работе рассматривается применение модели трещины на границе раздела материалов с концевой областью, содержащей связи с нелинейной диаграммой деформирования, при оценке трещиностойкости композиционных материалов и адгезионных соединений. Размер концевой области трещины не полагается малым по сравнению с размером трещины. Анализ предельного равновесия трещины с концевой областью выполняется на основе нелокального критерия разрушения с кинематическим условием для определения продвижения края концевой области трещины и энергетическим условием продвижения вершины трещины. Приведены результаты модельных расчетов.

## 2. Кривые деформирования связей

Предполагается, что связи между берегами трещины образованы волокнами с заданной диаграммой деформирования (пример получения микромеханического закона деформирования связей приведен в работе [11]). Нелинейные соотношения между раскрытием трещины и усилиями в связях (обобщенную кривую деформирования связей) представляем в форме:

$$\sigma(s) = \frac{u(s)}{c_B(s)} \phi\left(\frac{u(s)}{u_m}\right), \quad (1)$$

где раскрытие трещины  $u(s)$  и модуль вектора усилий в связях  $\sigma(s)$  находятся по формулам

$$u(s) = \sqrt{u_y^2(s) + u_x^2(s)}, \quad \sigma(s) = \sqrt{q_y^2(s) + q_x^2(s)}. \quad (2)$$

В выражениях (1), (2) координата  $s$  определяет положение рассматриваемого волокна вдоль концевой области трещины;  $c_B(s)$  — параметр, который может рассматриваться как эффективная податливость связей;  $u_x(s)$ ,  $u_y(s)$  и  $q_x(s)$ ,  $q_y(s)$  — проекции

раскрытия трещины и вектора усилий в связях на оси  $X, Y$  прямоугольной системы координат;  $u_m$  — значение раскрытия трещины, при котором происходит переход от линейного к нелинейному закону деформирования связей, то есть

$$\phi\left(\frac{u(s)}{u_m}\right) \equiv 1, \quad u(s) \leq u_m, \quad (3)$$

где  $\phi(\cdot)$  — безразмерная функция, описывающая нелинейную часть кривой деформирования связей.

Для линейно-упругих связей из выражения (1) следует:

$$u(s) = c_B(s) \sigma(s). \quad (4)$$

Параметр  $u_m$  не является постоянным и зависит, в частности, от физико-механических характеристик связей и размера трещины. В дальнейшем нелинейный участок кривой деформирования связей ( $u(s) > u_m$ ) представляется монотонной убывающей или возрастающей функцией, конкретный вид которой зависит от типа и характеристик связей в концевой области трещины.

Убывающий нелинейный участок кривой деформирования связей соответствует разупрочнению связей при возрастании раскрытия трещины. Если исходить из критерия предельной вытяжки связей и предположить, что разрыв связи происходит при достижении ее предельной вытяжки  $u_{cr}$ , то этому значению вытяжки связи отвечает натяжение связи  $\sigma_{cr}$ , причем, в зависимости от типа связей, величина  $\sigma_{cr}$  может равняться и нулю. Простейшая кривая такого рода имеет форму билинейной зависимости, восходящий участок которой соответствует упругому деформированию связей до вытяжки  $u_m$  с натяжением связи

$$\sigma_m = \frac{u_m}{c_B(s_m)}, \quad (5)$$

где  $c_B(s_m)$  — эффективная податливость связей в точке концевой области с координатой  $s_m$ . Если  $u(s) > u_m$ , то закон деформирования описывается линейной зависимостью, определяемой точками  $(u_m, \sigma_m)$  и  $(u_{cr}, \sigma_{cr})$  на плоскости  $(u, \sigma)$ . При выполнении условия  $\sigma_{cr} < \sigma_m$  зависимость является убывающей (разупрочнение), а при  $\sigma_{cr} \geq \sigma_m$  — возрастающей (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей). Таким образом, билинейная зависимость между натяжением связи  $\sigma(x)$  и ее вытяжкой  $u(x)$  представляется так:

$$\sigma(u) = \begin{cases} k_B(s)u(s), & 0 \leq u(s) \leq u_m, \\ \sigma_{cr} + \frac{\sigma_m - \sigma_{cr}}{u_{cr} - u_m}(u_{cr} - u(s)), & u_m < u(s) \leq u_{cr}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $k_B(s)$  — жесткость связей

$$k_B(s) = 1/c_B(s). \quad (7)$$

После введения обозначений

$$\eta = \frac{u_{cr}}{u_m}, \quad \delta = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_m} \quad (8)$$

вторая формула в соотношениях (6) с учетом выражения (5) преобразуется к виду:

$$\sigma(u) = \frac{u_m}{c_B(s_m)(\eta-1)} \left[ \left( \eta - \frac{u(s)}{u_m} \right) + \delta \left( \frac{u(s)}{u_m} - 1 \right) \right]. \quad (9)$$

Из зависимости (9) получаем значение вытяжки связи  $u_0$ , соответствующее условиям  $\sigma(u_0) = 0$  и  $\delta < 1$  (разупрочнение):

$$u_0 = u_m \frac{\eta - \delta}{1 - \delta}.$$

Далее, по аналогии с рассмотренной выше билинейной зависимостью строятся степенные зависимости, описывающие закон деформирования связей на участке  $u_m < u(s) \leq u_{cr}$ . Рассматривается двухзвенная кривая, состоящая из участка упругого деформирования связей и нелинейного убывающего участка. Полагается, что нелинейный участок кривой деформирования связей представляет собой степенную функцию и проходит через точки  $(u_m, \sigma_m)$  и  $(u_0, 0)$  на плоскости  $(u, \sigma)$ , где  $u_0$  определяется выражением (10) или является заданной величиной. Ниже приведено два типа описания нелинейного участка кривой.

*Тип 1.* Выпуклая кривая:

$$\sigma(u) = \begin{cases} k_B(s)u(s), & 0 \leq u(s) \leq u_m, \\ \sigma_b \left[ 1 - \kappa \left( \frac{u(s)}{u_m} \right)^n \right], & u_m < u(s) \leq u_{cr}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $n$  — целочисленный параметр, определяющий кривизну нелинейного участка.

Из условий прохождения кривой, описываемой вторым уравнением в выражении (11), через точки  $(u_m, \sigma_m)$  и  $(u_0, 0)$  получим:

$$\kappa = \left( \frac{u_m}{u_0} \right)^n, \quad \sigma_b = \frac{k_B(s)u_m}{1 - \kappa}. \quad (12)$$

По аналогии с выражением (10) вводится обозначение

$$\eta_0 = \frac{u_0}{u_m}, \quad (13)$$

и второе соотношение в выражении (11) записывается так:

$$\sigma(u) = \frac{u_m}{c_B(s)(\eta_0^n - 1)} \left( \eta_0^n - \left( \frac{u(s)}{u_m} \right)^n \right). \quad (14)$$

Тип 2. Вогнутая кривая:

$$\sigma(u) = \begin{cases} k_B(x)u(s), & 0 \leq u(s) \leq u_m, \\ \sigma_B \left( \kappa \frac{u(s)}{u_m} - 1 \right)^n, & u_m < u(s) \leq u_{cr}, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\kappa = \frac{u_m}{u_0}, \quad \sigma_B = \frac{c_B(s) u_m}{(\kappa - 1)^n}. \quad (16)$$

Зависимость (15) для нелинейного участка вытяжки связей ( $u_m < u(s) \leq u_{cr}$ ) с учетом выражений (13) и (16) приобретает вид:

$$\sigma(u) = \frac{u_m}{c_B(s)(1 - \eta_0)^n} \left( \frac{u(s)}{u_m} - \eta_0 \right)^n. \quad (17)$$

В качестве примера рассмотрим билинейные кривые деформирования связей. Полагаем, что в концевой области трещины связи образованы волокнами, состоящими из полимерных молекул с индексом полимеризации  $N$  и размером мономерного звена  $a_0$ . Максимальная длина волокна в таком случае составляет  $L \sim Na_0$ . С учетом этого считаем, что при малых деформациях предельная вытяжка связей равна  $u_{cr} \sim Na_0$ . При известных  $N$  и  $a_0$  ( $N = 400$  и  $a_0 = 0,5 \cdot 10^{-9}$  м) получим  $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$  м. Если изменение закона деформирования связей происходит при значении параметра  $\eta = 2$  (см. обозначения (8)), то  $u_m = 0,5$  и  $u_{cr} = 10^{-7}$  м. Натяжение связи  $\sigma_m$ , соответствующее раскрытию трещины равному  $u_m$ , зависит от податливости связей (см. формулу (5)). Исходя из соображений размерности, податливость упругих связей в соотношении (4) можно представить как

$$c_B(s) = \gamma(s) \frac{H}{E_B}, \quad (18)$$

где  $\gamma(s)$  — безразмерная функция, определяющая закон изменения податливости вдоль концевой области трещины,  $H$  — линейный размер, пропорциональный толщине зоны неоднородности на участке соединения материалов,  $E_B$  — эффективный модуль упругости связей.

При условии, что  $\gamma(s) \equiv 1$ , а параметры  $H$  в (18) и  $u_{cr}$  в (8) пропорциональны, получим

$$H = \lambda u_{cr}, \quad (19)$$

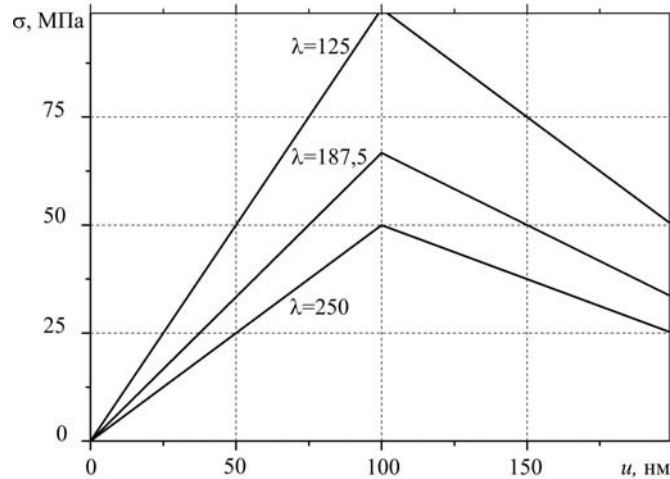


Рис. 1. Билинейные кривые деформирования связей при  $u_m = 10^{-7}$  (м),  $u_{cr} = 2u_m$ ,  $\sigma_{cr} = 0,5\sigma_m$

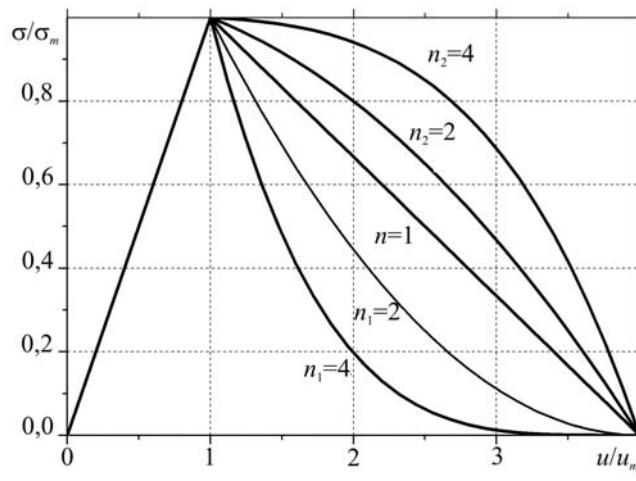


Рис. 2. Деформирование связей с разупрочнением:  $n=1$  – линейное разупрочнение,  $n_1$  – вогнутые и  $n_2$  – выпуклые кривые

где  $\lambda$  — коэффициент, зависящий от физико-механических характеристик связей. Для значений  $\lambda = 250; 187,5; 125$  ( $\lambda \sim N$  у адгезионных соединений на основе полимеров),  $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$  м и модуля упругости связей  $E_B = 25$  ГПа по формуле (18) вычисляются значения податливостей связей на участке упругого деформирования,  $c_B = \lambda u_{cr} / E_B = 2 \cdot 10^{-9}; 1,5 \cdot 10^{-9}; 1,0 \cdot 10^{-9}$  (МПа·м<sup>-1</sup>) соответственно. Из выражения (8) следует, что  $\sigma_{cr} = \delta \sigma_m$ , где максимальные упругие напряжения  $\sigma_m$  определяются соотношением (5); при значении параметра  $\delta = 0,5$  величины натяжения связи  $\sigma_{cr}$  равны:  $\sigma_{cr} = 25; 33,3; 50$  (МПа). Соответствующие билинейные зависимости приведены на рисунке 1.

Для построения кривых по зависимостям (11) и (15) необходим параметр  $n$ , определяющий кривизну нелинейной части зависимости деформирования связей. Модельные кривые, качественно отражающие основные закономерности деформирования связей в концевой области трещины, построенные по этим зависимостям при заданных значениях  $n$ , представлены на рисунке 2.

### 3. Напряженное состояние в концевой области трещины

Для анализа предельного равновесия трещины требуются распределения напряжений и смещений вблизи трещины, включая ее концевую область. В предположении, что малы как кривизна трещины, так и ее размер по сравнению с характерным размером тела, рассматриваем прямолинейную трещину на границе раздела двух бесконечных полуплоскостей из различных материалов (двумерная задача). При учете функциональной зависимости между напряжениями в связях и раскрытием трещины задача об определении смещений и напряжений в концевой области трещины, находящейся в однородном материале или на границе соединения полуплоскостей, сводится к численному решению интегрального или интегро-дифференциального уравнения [1–3, 7–9].

Трещина имеет длину  $2\ell$  и располагается на отрезке  $|x| \leq \ell$ ,  $y = 0$  границы раздела (Рис. 3). На удаленной границе области действуют равномерно распределенные напряжения  $\sigma_0$ , нормальные к плоскости трещины, а в концевых областях трещины длиной  $d$ , примыкающих к ее вершинам ( $\ell - d \leq |x| \leq \ell$ ,  $y = 0$ ), берега трещины взаимодействуют так, что это взаимодействие сдерживает раскрытие трещины. Для математического описания взаимодействия берегов трещины предполагаем, что в концевой области между берегами трещины имеются связи, закон деформирования которых, в общем случае нелинейный, задан соотношением (1).

При действии внешних нагрузок в связях, соединяющих берега трещины на границе раздела различных материалов, возникают усилия  $Q(x)$ , имеющие нормальную  $q_y(x)$  и касательную  $q_x(x)$  составляющие:

$$Q(x) = q_y(x) - i q_x(x), \quad i^2 = -1. \quad (20)$$

К берегам трещины приложены нормальные и касательные напряжения численно равные  $q_y(x)$  и  $q_x(x)$  соответственно.

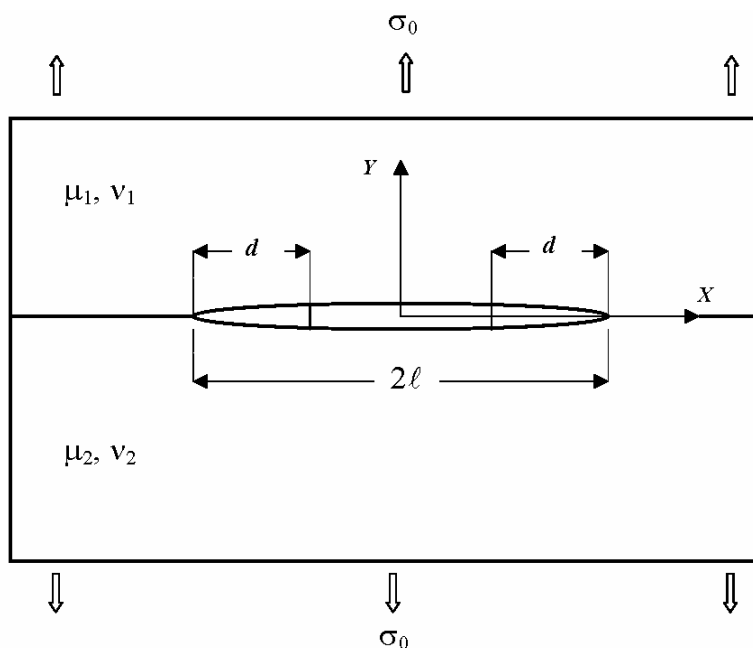


Рис. 3. Трещина на границе раздела материалов со связями между берегами

Для плоской задачи теории упругости с исчезающими на бесконечности растягивающими напряжениями с учетом принципа суперпозиции граничные условия на берегах трещины записываются в виде:

$$\sigma_{yy}(x, 0) - i\sigma_{xy}(x, 0) = -\sigma_0, \quad |x| < \ell - d, \quad (21)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) - i\sigma_{xy}(x, 0) = -\sigma_0 + q_y(x) - iq_x(x), \quad \ell - d \leq |x| \leq \ell. \quad (22)$$

Раскрытие трещины, расположенной на границе между двумя различными материалами,  $u(x, 0) \equiv u(x)$  ввиду линейности задачи теории упругости можно представить так:

$$u(x) = u_\infty(x) + u_Q(x), \quad (23)$$

$$u(x) = u_y(x) - iu_x(x), \quad u_\infty(x) = u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x), \quad u_Q(x) = u_{Qy}(x) - iu_{Qx}, \quad (24)$$

где  $u_y(x)$  и  $u_x(x)$  — проекции раскрытия трещины на оси координат (Рис. 3),  $u_\infty(x)$  — раскрытие трещины от действия напряжений  $(-\sigma_0)$  на берегах трещины,  $u_{\infty x}(x)$  и  $u_{\infty y}(x)$  — проекции раскрытия трещины от действия напряжений  $(-\sigma_0)$  на оси координат,  $u_Q(x)$  — раскрытие трещины, обусловленное напряжениями на берегах трещины в концевой области, возникающими при действии внешних нагрузок.

Уравнения (20)–(24) необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие трещины и усилия в связях, которое без потери общности (см. формулу (1)) представим в виде:

$$u_y(x) - iu_x(x) = c_y(x, \sigma)q_y(x) - ic_x(x, \sigma)q_x(x). \quad (25)$$

Здесь  $\sigma$  — модуль вектора усилий в связях; функции  $c_x, c_y$  (далее обозначаются как  $c_{x,y}$ ) могут рассматриваться как зависящие от натяжения связей эффективные податливости связей, которые вычисляются по формулам, следующим из представления (18):

$$c_y(x, \sigma) = \gamma_1(x, \sigma) \frac{H}{E_B}, \quad c_x(x, \sigma) = \gamma_2(x, \sigma) \frac{H}{E_B}, \quad (26)$$

где  $\gamma_{1,2}(x, \sigma)$  — безразмерные функции.

Так как длина трещины мала по сравнению с размерами тела и внешние нагрузки однородны, то с учетом формул (26) для компонент раскрытия трещины в (24) получаем формулы:

$$u_{y,x}(x) = c_0 \gamma_{1,2}(x, \sigma) q_{y,x}(x) \frac{\ell}{E_B}. \quad (27)$$

Параметр связей в концевой области трещины —  $c_0 = H/\ell$ , далее будет называться относительной податливостью связей. Следует отметить, что при постоянных значениях  $\gamma_{1,2}(x, \sigma)$  выражение (27) является линейным законом деформирования связей. Усилия в



связях  $q_{y,x}(x)$  подлежат определению из решения задачи при заданной внешней нагрузке  $\sigma_0$  и известном законе деформирования связей. В рассматриваемой постановке задачи размер концевой области  $d$  не предполагается малым по сравнению с длиной трещины, и вид функций  $q_{y,x}(x)$  зависит как от принятого закона деформирования связей, так и от размера концевой области.

Получим уравнения для определения усилий  $Q(x)$  в концевой области трещины. Компоненты раскрытия трещины  $u_\infty(x)$  при действии внешних напряжений  $y < 0$ , нормальных к плоскости трещины, определяются следующим выражением [12]:

$$u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x) = 2A\sigma_0\sqrt{\alpha(\ell^2 - x^2)}\left(\frac{\ell - x}{\ell + x}\right)^{-i\beta}, \quad (28)$$

$$A = \frac{1}{4(1 + \alpha)}\left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2}\right), \quad \alpha = \frac{\mu_2 k_1 + \mu_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2}, \quad \beta = \frac{\ell n \alpha}{2\pi}, \quad (29)$$

где  $k_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$  (плоская деформация) или  $k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2}) / (1 + \nu_{1,2})$  (плоское напряженное состояние),  $\nu_{1,2}$  и  $\mu_{1,2}$  — коэффициенты Пуассона и модули сдвига материалов подобластей 1 ( $y > 0$ ) и 2 ( $y < 0$ ) (Рис. 3).

Выражения раскрытия трещины при произвольной нагрузке на ее берегах могут быть получены на основе решения для раскрытия трещины при действии сосредоточенной силы, приложенной на поверхности трещины [12]. Однако в случае кусочно-однородного тела более удобно использование выражений для производных раскрытия трещины. Из соотношения (23) следует:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial u_\infty(x)}{\partial x} + \frac{\partial u_Q(x)}{\partial x}. \quad (30)$$

Производная раскрытия трещины при действии однородных внешних напряжений  $\left(\frac{\partial u_\infty(x)}{\partial x}\right)$  определяется из формулы (28); производная раскрытия трещины, вызванного действием напряжений, смыкающих берега трещины и обусловленных присутствием связей  $\left(\frac{\partial u_Q(x)}{\partial x}\right)$ , находится из представления производных перемещений берегов трещины при действии произвольных нагрузок на ее берегах [13]. С учетом соотношения (28) усилия в связях  $Q(x)$  записываются в форме:

$$Q(x) = q_y(x) - iq_x(x) = (p_y(x) - ip_x(x))\left(\frac{\ell - x}{\ell + x}\right)^{-i\beta}, \quad (31)$$

где функции  $p_{y,x}(x)$  подлежат определению из решения задачи. При действии внешних растягивающих нагрузок  $\sigma_0$  функции  $q_y(x)$  и  $p_y(x)$  — четные, а функции  $q_x(x)$  и  $p_x(x)$  — нечетные.

Выражение для производных перемещений берегов трещины при действии произвольных нагрузок на ее берегах, приведенное в работе [13], после преобразований с

учетом представления (31) и симметрии искомых функций принимает следующий вид [7, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_Q(x)}{\partial x} &= A(1-\alpha)(q_x(x) + iq_y(x)) - \\ &- \frac{2A(1+\alpha)}{\pi\sqrt{\ell^2-x^2}} \left(\frac{\ell-x}{\ell+x}\right)^{-i\beta} \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2-\xi^2}}{\xi^2-x^2} (xp_y(\xi) - i\xi p_x(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (32)$$

Подстановка выражений (25)–(28) и (32) в (30), переход к безразмерным переменным

$$s = x/\ell, \quad t = \xi/\ell, \quad q_{y,x}(s) = q_{y,x}(x)/\sigma_0, \quad p_{y,x}(s) = p_{y,x}(x)/\sigma_0 \quad (33)$$

и некоторые преобразования приводят к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $p_y(s)$  и  $p_x(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \gamma_1(s, \sigma) q_y(s) - i\gamma_2(s, \sigma) q_x(s) \right] - \frac{\pi\varepsilon(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} (q_x(s) + iq_y(s)) + \\ + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-s^2}} \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{-i\beta} \int_{1-d/\ell}^1 R(s, t) [s p_y(t) - it p_x(t)] dt = \\ = \frac{\pi\varepsilon\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)\sqrt{1-s^2}} (2\beta i - s) \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{-i\beta}, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$R(s, t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2-s^2}, \quad \varepsilon = \frac{2AE_B(1+\alpha)}{\pi c_0} = \frac{E_B\ell}{2\pi H} \left( \frac{k_1+1}{\mu_1} + \frac{k_2+1}{\mu_2} \right). \quad (35)$$

Параметр  $\varepsilon$  в выражениях (34)-(35) является относительной жесткостью связей (числитель  $E_B/2\pi H$  представляет собой жесткость связей в концевой области трещины, знаменатель  $1/[4A(1+\alpha)\ell]$  — жесткость участка соединения материалов шириной  $\ell$ ).

Для преобразования системы уравнений (34) к форме, удобной для численного решения, неизвестные функции  $p_y(s)$  и  $p_x(s)$  представим в виде:

$$p_{y,x}(s) = f_{1,2}(s)\sqrt{1-s}. \quad (36)$$

После дифференцирования по переменной  $s$  в левой части уравнений (34), разделения действительных и мнимых частей уравнений и ряда преобразований получается система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (см. подробные преобразования в работах [7, 8]):

$$T_{ij}(s, \sigma) \frac{df_j(s)}{ds} + W_{ij}(s, \sigma) f_j(s) + \varepsilon \int_{1-d/\ell}^1 G_{ij}(s, t) f_j(t) dt = Z_i(s) \quad (i, j = 1, 2). \quad (37)$$

Выражения для функций  $T_{ij}(s, \sigma)$ ,  $W_{ij}(s, \sigma)$ ,  $G_{ij}(s, t)$ ,  $Z_i(s)$  приведены в [7, 8].

Уравнения (37) представляют собой систему нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядрами типа Коши и могут быть решены только численно. Для их решения используется коллокационная схема с кусочно-квадратичной аппроксимацией неизвестных функций. Если закон деформирования связей является нелинейным, то определение усилий в связях осуществляется с помощью итерационной процедуры, аналогичной методу переменных параметров упругости [14]. Первый шаг итерационного процесса состоит в решении уравнения (37) для линейно-упругих связей. Последующие итерации реализуются в том случае, если на части концевой области трещины выполняется неравенство  $u(x) > u_m$ . На каждой такой итерации определяется решение уравнения (37) для квазиупругих связей вида (1) с эффективной податливостью, переменной вдоль концевой области трещины и зависящей от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге решения. Вычисление эффективной податливости производится подобно определению текущего модуля в методе переменных параметров упругости. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия в связях, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга.

#### 4. Предельное равновесие для трещины со связями

При анализе предельного равновесия трещины с концевой областью, размер которой не является малым по сравнению с размером трещины, необходимы два условия разрушения: условие разрыва связей на краю концевой области и условие продвижения вершины трещины.

В качестве первого условия разрушения используем критерий критического раскрытия трещины и полагаем, что разрыв связей на краю концевой области ( $x_0 = \ell - d$ ) происходит при выполнении условия

$$u(x_0) = [u_x^2(x_0) + u_y^2(x_0)]^{1/2} = u_{cr}, \quad (38)$$

где  $u_{cr}$  — предельная длина связи.

Рассмотрим, исходя из энергетических характеристик разрушения, условие продвижения вершины трещины. Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнение условия [7–9]:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \ell} = -\frac{\partial}{\partial \ell} \left[ \int_V w(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_e} f_i u_i ds \right] - \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{S_i} \Phi(u) ds = 0, \quad (39)$$

где  $\Pi$  — потенциальная энергия деформации;  $w(\varepsilon_{ij})$  — плотность энергии деформации в объеме тела  $V$ ;  $\varepsilon_{ij}$  — тензор деформаций;  $f_i, u_i$  — силы и перемещения, заданные на внешней поверхности тела  $S_e$ ;  $S_i$  — поверхность концевой области трещины;  $\Phi(u)$  — плотность энергии деформации связей в концевой области трещины.

Первые два слагаемых в (39) представляют собой скорость высвобождения энергии деформации при образовании новой поверхности трещины, а последнее слагаемое определяет скорость потребления энергии деформации связями.

Скорость высвобождения энергии деформации для трещины на границе раздела материалов определяется выражением [15]:

$$G_{tip}(d, \ell) = \left( \frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_B^2}{16 \operatorname{ch}(\pi\beta)}, \quad (40)$$

где  $K_B = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  — модуль коэффициента интенсивности напряжений от действия внешних нагрузок и напряжений в связях.

Скорость потребления энергии деформации связями в концевой области трещины находится по следующей формуле:

$$G_{bond}(d, \ell) = \frac{\partial U_{bond}(d, \ell)}{b \partial \ell} + \gamma_m. \quad (41)$$

Здесь

$$U_{bond}(d, \ell) = b \int_{\ell-d}^{\ell} \Phi(u) dx, \quad \Phi(u) = \int_0^{u(x)} \sigma(u) du, \quad u(x) = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad (42)$$

где  $b$  — толщина тела;  $U_{bond}(d, \ell)$  — работа по деформированию связей;  $\sigma(u)$  — модуль вектора усилий в связях;  $\gamma_m$  — трещиностойкость материала матрицы ( $\gamma_m = 0$  для адгезионного слоя).

После подстановки выражения (42) в (41) получаем:

$$G_{bond}(d, \ell) = \frac{\partial U}{b \partial \ell} = \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{\ell-d}^{\ell} \left( \int_0^{u(x)} \sigma(u) du \right) dx + \gamma_m. \quad (43)$$

Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнение условий (38) и следующего:

$$G_{tip}(d, \ell) = G_{bond}(d, \ell). \quad (44)$$

Решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (37), (38) и (44) позволяет (при заданных длине трещины и характеристиках связей) определить критическую внешнюю нагрузку  $\sigma_0^m$  и размер концевой области  $d_{cr}$  в состоянии предельного равновесия трещины. Скорость потребления энергии деформации связями  $G_{bond}(d_{cr}, \ell)$ , полученная из этого решения, является энергетической характеристикой сопротивления адгезионному разрушению:  $G_{cr} = G_{bond}(d_{cr}, \ell)$ , причем величина  $G_{cr}$  не остается постоянной при изменении длины трещины.

Чтобы выделить режимы равновесия и квазистатического роста трещины для заданных размеров трещины и концевой области при монотонном нагружении, рассмотрим следующие условия:

$$\begin{aligned} \text{условие 1:} & \quad a) G_{tip}(d, \ell) \geq G_{bond}(d, \ell), & \quad \bar{b}) G_{tip}(d, \ell) < G_{bond}(d, \ell), \\ \text{условие 2:} & \quad a) u(\ell - d) < u_{cr}, & \quad \bar{b}) u(\ell - d) \geq u_{cr}. \end{aligned} \quad (45)$$

При выполнении условий  $1a$  и  $2a$  возможно продвижение вершины трещины с возрастанием длины концевой области без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать как процесс приспособляемости трещины к заданному уровню внешних нагрузок (докритический рост трещины).

Продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области (квазистатический рост трещины) происходит при одновременном выполнении условий  $1a$  и  $2b$ .

При выполнении условий  $1b$  и  $2b$  происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины, и размер концевой области сокращается, стремясь к предельному значению для данного уровня нагрузки.

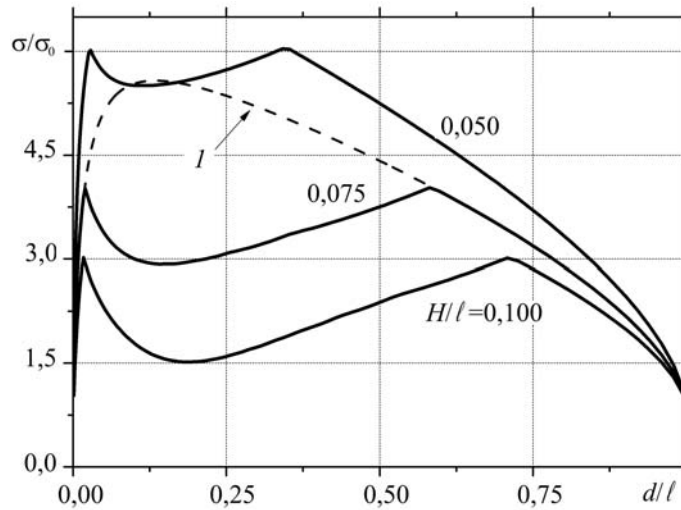
В рамках рассматриваемой модели положение концевой области и вершины трещины не меняется при одновременном выполнении условий  $1b$  и  $2a$ .

Таким образом, величина внешней нагрузки  $\sigma_0$  и параметры связей определяют характер разрушения: продвижение вершины трещины с ростом концевой области; сокращение размера концевой области без продвижения вершины трещины; продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области.

## 5. Анализ модели концевой области трещины

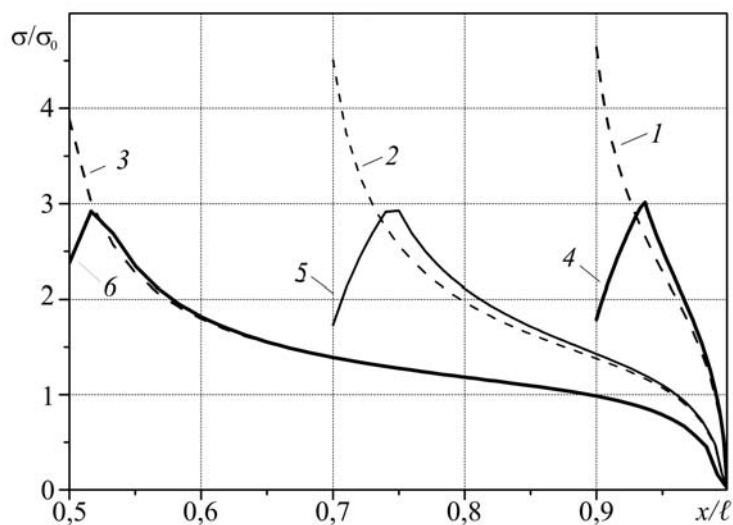
Для анализа модели концевой области трещины рассмотрим пример расчета параметров модели трещины с концевой областью для адгезионного соединения металла (модуль упругости  $E_1 = 135$  ГПа) и полимера (модуль упругости  $E_2 = 25$  ГПа) при билинейной кривой деформирования связей (Рис. 1). Полагаем, что на границе раздела материалов существует трещина длиной  $2\ell = 10^{-3}$  м с концевой областью, заполненной связями, состоящими из волокон, образованных молекулами полимера (модуль упругости связей  $E_B = E_2$ ). Распределения усилий  $q_{x,y}$  вдоль концевой области трещины определяются из решения системы (37), причем для линейно-упругих связей решение зависит только от параметра относительной жесткости связей  $\varepsilon$ . Если значения упругих параметров материалов и связей  $E_{1,2}, E_B, \nu_{1,2}$  фиксированы, то фактически упругое решение системы уравнений (37) зависит только от относительной податливости связей  $c_0 = H/\ell$ .

Зависимости модуля вектора усилий на краю концевой области ( $\sigma$ ) от относительного размера концевой области  $d/\ell$  при  $\sigma_0 = 16,5$  МПа и относительной податливости связей  $H/\ell = 0,1; 0,075; 0,05$  (для значений  $\lambda = 250; 187,5; 125$  соответственно) и билинейной кривой деформирования ( $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$  м, см. Рис. 1) приведены на рисунке 4. Для значения  $H/\ell = 0,075$  также показаны результаты расчета для линейно-упругого деформирования связей. При линейном законе деформирования связей усилия в связях всегда максимальны на краю концевой области [7, 8]. Для закона деформирования связей с падающей ветвью именно в этой области происходит наиболее значительное перераспределение усилий и их величина достигает минимума. Следует отметить, что в случае нелинейного закона деформирования связей раскрытие трещины на краю концевой области имеет максимум, как и в случае линейных связей. При этом чем выше относительная податливость связей, тем значительнее увеличение раскрытия трещины.



**Рис. 4.** Усилия на краю концевой области трещины (билинейная кривая деформирования связей; внешняя нагрузка 16,5 МПа; кривая 1 – упругий расчет для  $H/\ell = 0,075$ ,  $\lambda = 187,5$ )

На рисунке 5 приведены распределения модуля вектора усилий в связях ( $\sigma$ ) вдоль концевой области трещины при внешней нагрузке  $\sigma_0 = 16,5$  МПа и  $H/\ell = 0,1$ . Кривые 1, 2, 3 — для линейных связей, а кривые 4, 5, 6 — для билинейной кривой деформирования связей ( $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$  м, Рис. 1) и значений  $d/\ell = 0,1$ ; 0,3; 0,5 соответственно. С возрастанием размера концевой области уровень упругих напряжений в связях снижается и, таким образом, уменьшается зона нелинейного деформирования связей. Изменение параметра  $\eta$  оказывает заметное влияние на распределение усилий в зоне нелинейного деформирования связей (см. обозначения (8)). При  $\eta \rightarrow \infty$  распределение усилий в области нелинейного деформирования стремится к однородному ( $\sigma \rightarrow \sigma_m$ ). Возрастание внешней нагрузки при фиксированных параметрах концевой области трещины и кривой деформирования связей приводит к увеличению зоны нелинейной деформации связей.

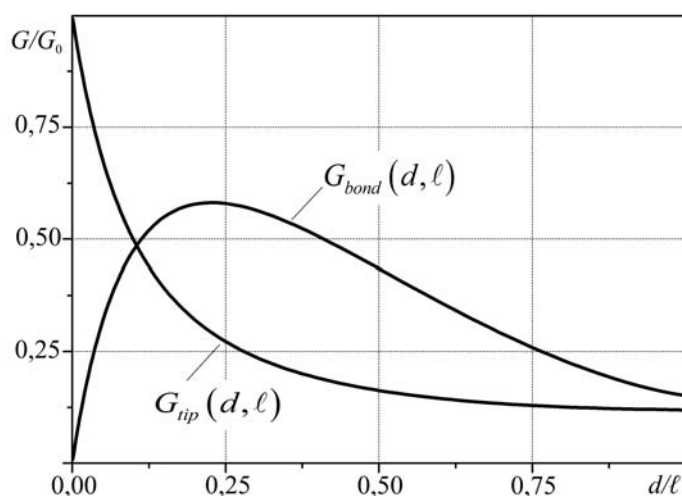


**Рис. 5.** Усилия в связях вдоль концевой области трещины (билинейная кривая деформирования;  $H/\ell = 0,1$ ,  $\lambda = 250$ )

На рисунке 6 представлены энергетические характеристики трещины — зависимости скоростей высвобождения  $G_{ip}(d, \ell)$  и поглощения  $G_{bond}(d, \ell)$  энергии деформации связями от относительного размера концевой области. Характеристики получены в предположении, что связи деформируются линейно при любом уровне внешней нагрузки ( $\lambda = 625$ ) и нормированы значением  $G_0$  — скоростью высвобождения энергии деформации при отсутствии связей. Скорость высвобождения энергии деформации, связанная с модулем коэффициента интенсивности напряжений выражением (40), монотонно уменьшается при возрастании размера концевой области трещины и снижении относительной податливости связей. Скорость потребления энергии деформации связями изменяется немонотонно; максимальное значение достигается при определенной величине размера концевой области. При увеличении относительной жесткости связей в концевой области трещины  $\varepsilon$  (см. уравнение (37)) максимальное значение скорости потребления энергии деформации возрастает, а положение максимума смещается в сторону меньших значений  $d/\ell$ .

Применение методики оценки параметров предельного равновесия трещины с использованием критерия разрушения, основанного на уравнениях (37), (38) и (44), покажем на примере линейно-упругих связей. Ввиду линейности связей расчет выполняется в два этапа.

На первом этапе, после решения системы интегральных уравнений (37) и (44), определяется относительная критическая длина концевой области трещины в состоянии предельного равновесия  $t_{cr}$  при заданных параметрах связей и материалов. Это решение представляет рисунок 6. Здесь положение точки пересечения графиков  $G_{ip}(d, \ell)$  и  $G_{bond}(d, \ell)$  соответствует критическому значению относительной длины концевой области  $t_{cr} = d_{cr}/\ell \approx 0,105$ . Выполнение условия (44) при рассмотрении линейно-упругих связей зависит только от относительной жесткости связей  $\varepsilon$ , а при заданных упругих параметрах материалов и связей — от относительных характеристик концевой области и трещины ( $H/\ell, d/\ell$ ). Ввиду этого, относительное критическое значение длины концевой области, полученное из условия (44), может быть отнесено к трещине любого масштаба при допустимой внешней нагрузке. Критическая длина концевой области для заданной длины трещины определяется как  $d_{cr} = \ell t_{cr}$ .



**Рис. 6.** Зависимости скоростей высвобождения и поглощения энергии деформации связями от относительного размера концевой области (связи деформируются линейно при любом уровне внешней нагрузки;  $H/\ell = 0,25, \lambda = 625$ )

На втором этапе из решения уравнения (38) для заданных значений  $\ell, d_{cr}, u_{cr}$  находим критическую внешнюю нагрузку  $\sigma_0^m$ , соответствующую решению уравнения (44). Это решение иллюстрируется рисунком 7, где значению  $t_{cr}$ , полученному из решения уравнений (37) и (44), соответствует положение точки пересечения (точка А) прямой  $u = u_{cr}$  и зависимости раскрытия трещины на краю концевой области ( $x = \ell - d_{cr}$ ) от длины концевой области при внешней нагрузке равной критической ( $\sigma_0 = \sigma_0^m$ ). Второе решение уравнения (38) (точка В на Рис. 7) не согласуется с условием (44) и, следовательно, не определяет состояния предельного равновесия концевой области и вершины трещины. При нелинейном законе деформирования связей для вычисления критической внешней нагрузки и критического размера концевой области требуется итерационное решение системы уравнений (37), (38) и (44).

Рассмотрим схемы развития разрушения для трещины с произвольной концевой областью. Пусть концевая область трещины равна  $d = d_{cr}$ . Положим, что величина критической нагрузки в этом случае уже определена. В случае монотонно возрастающей внешней нагрузки  $\sigma_0 < \sigma_0^m$  и  $d < d_{cr}$  раскрытие трещины на краю концевой области не превышает критического значения ( $u < u_{cr}$ ) и выполняются условия 1а и 2а (см. условия (45) и Рис. 6). Происходит увеличение длины трещины без разрыва связей на краю концевой области. В момент достижения критического размера концевой области и критической величины внешней нагрузки возможен переход к квазистатическому режиму разрушения, описываемому условиями 1а и 2б. Если задан размер концевой области трещины  $d$  такой, что  $d_{cr} < d < \ell$ , то выполняются условия 1б и 2б, и при монотонном нагружении ( $\sigma_0 < \sigma_0^m$ ) происходит разрыв связей на краю концевой области, размер концевой области трещины сокращается без продвижения вершины трещины,  $d \rightarrow d_{cr}$ . Переход к квазистатическому режиму разрушения происходит так же, как и в первом случае, при достижении критического размера концевой области и критической величины внешней нагрузки.

Для примера рассмотрим оценку параметров предельного равновесия для трещины длины  $2\ell = 10^{-3}$  м. Размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия в случае линейно-упругих связей определяется условием (44). При  $c_0 = H/\ell = 0,25$  это условие выполняется при значении  $d_{cr}/\ell \approx 0,105$  (см. Рис. 6).

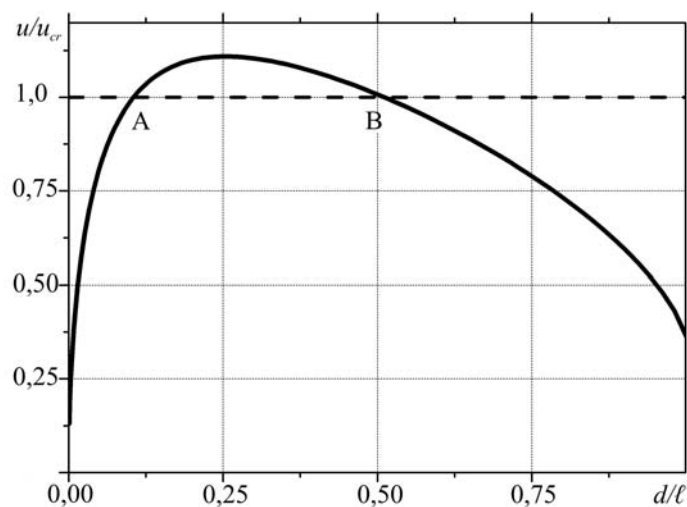


Рис. 7. Раскрытие трещины на краю концевой области ( $H/\ell = 0,25$ )



Уместно отметить еще раз, что относительный размер концевой области, получаемый при рассмотрении линейных связей из условия (44), не зависит от длины трещины и величины внешней нагрузки и определяется только относительной жесткостью связей  $\varepsilon$ . Определить критическую нагрузку  $\sigma_0^m$  и энергетическую характеристику сопротивления адгезионному разрушению  $G_{cr} = G_{bond}(d_{cr}, \ell)$  для заданного размера трещины можно только при учете дополнительного условия (38). Наложение этого условия при  $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$  м позволяет получить значение критической нагрузки  $\sigma_0^m = 16$  МПа и определить скорость высвобождения энергии деформации:  $G_{ip}(d_{cr}, \ell) = 4,1$  Дж/м<sup>2</sup>. Так как при  $d_{cr}/\ell \approx 0,105$  выполняется условие (44), то полученное значение  $G_{ip}$  является характеристикой сопротивления адгезионному разрушению соединения и  $G_{cr} = G_{bond}(d_{cr}, \ell) = 4,1$  Дж/м<sup>2</sup>. Решение уравнений (38) и (44) при постоянных значениях  $H$  и  $u_{cr}$  и изменении длины трещины позволяет найти зависимость критической нагрузки от длины трещины. Аналогично для  $c_0 = H/\ell = 0,1$  получаем  $d_{cr}/\ell \approx 0,044$ ,  $\sigma_0^m = 25$  МПа,  $G_{ip}(d_{cr}, \ell) = 10,2$  Дж/м<sup>2</sup>. Также интерес представляют результаты расчетов для билинейной кривой деформирования связей ( $c_0 = 0,1$ ,  $u_{cr}/u_m = 2$ ,  $\sigma_{cr}/\sigma_m = 0,5$ , Рис. 1). Совместное решение уравнений (37), (38) и (44) дает критическую длину концевой области  $d_{cr}/\ell \approx 0,055$  и величину критической нагрузки  $\sigma_0^m = 20$  МПа. Подобно линейному случаю имеем скорость высвобождения энергии деформации:  $G_{ip}(d_{cr}, \ell) = G_{cr} = 6,37$  Дж/м<sup>2</sup>. Как и следовало ожидать, разупрочнение связей приводит к снижению адгезионной трещиностойкости соединения.

Зависимость критической внешней нагрузки от длины трещины находится из решения системы уравнений (38) и (44) для заданных физико-механических параметров модели.

## 6. Заключение

Модель трещины на границе раздела материалов со связями между берегами позволяет:

- исследовать основные закономерности распределения усилий в связях при различных законах их деформирования;
- проводить анализ предельного равновесия трещины с учетом кинематического и энергетического условий разрушения;
- оценивать критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкость композиционного материала или адгезионного соединения, а также выделять режимы равновесия и роста трещины на основе анализа условий ее предельного равновесия, исходя из микромеханических параметров связей;
- решать задачи оптимизации адгезионной трещиностойкости, управляя параметрами закона деформирования связей (см., в частности, работы [16, 17]).

Модель может использоваться на различных масштабах разрушения и дает возможность с единых позиций рассматривать процесс разрушения композитов и адгезионных соединений, включая стадии зарождения дефекта, формирования и роста трещины на нано-, микро-, мезо- и макроуровнях. Именно поэтому продолжается интенсивное развитие моделей трещин с явным учетом нелинейных законов взаимодействия поверхностей применительно к упруговязкопластическому поведению материалов и различным видам нагружения (квазистатическому, циклическому, динамическому); библиография работ по этой тематике содержится в статьях сборника [18].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00696 и № 08-08-00798).

## Литература

1. *Rose L.R.F.* Crack reinforcement by distributed springs. // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1987. – V. 35, № 4. – P. 383-405
2. *Cox B.N., Marshall D.B.* Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue. // *Acta metal. mater.* – 1994. – V. 42, № 2. – P. 341-363.
3. *Budiansky B., Cui Y.L.* On the tensile strength of a fiber-reinforced ceramic composite containing a crack-like flaw // *Journal of Mechanics and Physics of Solids.* – 1994. – V. 42, № 1. – P. 1-19
4. *Баренблатт Г.И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // *ПММ.* – 1959. – Т. 23, вып. 3. – С. 434-444; вып. 4. – С. 706-721; вып. 5. – С. 893-900.
5. *Леонов М.Я., Панасюк В.В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле // *Прикл. механика.* – 1959. – Т. 5, № 4. – С.391-401.
6. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1960. – V. 8, № 2. – P. 100-104.
7. *Goldstein R. V., Perelmuter M. N.* Modeling of bonding at an interface crack // *Int. J. of Fracture.* – 1999. – V. 99, № 1-2. – P. 53-79.
8. *Гольдштейн Р.В. Перельмутер М.Н.* Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами. // *Изв. РАН. МТТ.* – 2001. – № 1. – С. 94-112.
9. *Перельмутер М.Н.* Критерий роста трещин со связями в концевой области // *ПММ.* – 2007. – Т. 71, вып. 1. – С. 152-171.
10. *Греков М.А., Морозов Н.Ф.* О равновесных трещинах в композитах, армированных однонаправленными волокнами // *ПММ.* – 2006. – Т. 70, вып. 6. – С. 1054-1066.
11. *Goldstein R.V., Bakirov V.F., Perelmuter M.N.* Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints // *Proc. Inst. Phys. Technol., Russian Ac. of Sci.* – 1997. – V. 13. Modeling and Simulation of Submicron Technology and Devices. – P. 115-125
12. *Rice J.R., Sih G.C.* Plane problems of cracks in dissimilar media // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1965. – V. 32. – P. 218-224.
13. *Слепян Л.И.* Механика трещин. – Л.: Судостроение, 1981. – 295с.
14. *Биргер И.А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести. // *Изв. АН СССР. Механика.* – 1965. – № 2. – С. 113-119.
15. *Салганик Р.Л.* О хрупком разрушении клеенных тел // *ПММ.* – 1963. – Т. 27, вып. 5. – С. 957-962.
16. *Гольдштейн Р.В. Осипенко Н.М.* Балочное приближение в задачах отслоения тонких покрытий // *Изв. РАН. МТТ.* – 2003. – № 5. – С. 154-163.
17. *Гольдштейн Р.В. Осипенко Н.М.* Моделирование отслоений покрытий при термомеханическом нагружении в балочном приближении // *Изв. РАН. МТТ.* – 2007. – № 5. – С. 75-90.
18. The special issue: Cohesive models // *Eng. Fract. Mech.* – 2003. – V. 70, № 14. – P. 1741-1987.