ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН В РАМКАХ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОСТИ

С.О. Саркисян

Гюмрийский государственный педагогический институт, Гюмри, 377501, Армения

На основе общих математических моделей микрополярных упругих тонких пластин (с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью») изучены задачи изгиба для шарнирно-опертых прямоугольных и круглых пластин. Получены аналитические решения для величин, определяющих напряженно-деформированное состояние микрополярных пластин. На основе численного анализа полученных решений выявлены характерные особенности напряженно-деформированного состояния пластин из микрополярного материала.

PECULIARITIES OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THIN PLATES IN THE FRAMEWORK OF THE THEORY OF MICROPOLAR ELASTICITY

S.H. Sargsyan

Gyumri State Pedagogical Institute. Gyumri, 377501, Armenia

The aim of the present paper is to investigate the bending problems for hinge-supported rectangular and circular plates. The study is carried out using three general mathematical models of micropolar elasticity, namely, models with independent displacement and rotation fields, constraint rotation, and «low shear rigidity». Analytical solutions are presented for quantities defining the stress-strain state of micropolar plates. Numerical analysis of these solutions reveals some distinctive features of the stress-strain state of micropolar plates.

В настоящее время микрополярная, несимметричная, моментная теория упругости, или иначе, теория упругости контитуума Коссера [1], трактуется как строгий математический алгоритм полевых уравнений как для упругих сред со структурой, так и для континуальной теории дефектов.

В работах [2, 3] демонстрируются эффекты, вызванные учетом микрополярного поведения упругого материала в различных плоских и пространственных статических задачах и в задачах о распространении волн в микрополярной среде. Исследование аналитических решений, полученных в работе [4], позволило определить макропараметры, которые откликаются на моментные свойства материала и являются экспериментально измеряемыми величинами.

В работах [5–7] построены общие математические модели микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек в рамках моделей среды со свободным вращением частиц, со стесненным вращением и «с малой сдвиговой жесткостью». На основе численного анализа [5] выявлены особенности напряженно-деформированного состояния микрополярных упругих тонких балок.

В данной работе в рамках общих математических моделей для микрополярных упругих тонких пластин [6] рассматриваются некоторые задачи статического изгиба прямоугольной и круглой пластинок и численно выявляются особенности напряженно-деформированного состояния микрополярных материалов (то есть материалов с внутренней структурой).

1. Изгиб упругой микрополярной прямоугольной пластинки

Рассматривается прямоугольная пластинка $\left(0 \le x_1 \le a,\quad 0 \le x_2 \le b\right)$ толщиной $2h$, шарнирно опертая по всему контуру, под действием нормально приложенной нагрузки ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$), распределенной по закону:

$$q_3 = q_0 \sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b} \tag{1}$$

где q_0 — интенсивность нагрузки в центре пластинки $\left(x_1 = a/2,\ x_2 = b/2\right)$.

1.1. Модель среды со свободным вращением частиц

Для описания моментных свойств среды вводятся две независимые переменные, характеризующие движения точек среды – векторы перемещения и вращения. Принимаются следующие значения безразмерных физических параметров, характеризующих микрополярные свойства пластинки [6]:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim 1,\quad \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1,\quad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1,\quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{2}$$

Здесь $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коэффициенты Ламе (E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона); $\alpha, \beta, \gamma,\ \varepsilon$ — упругие константы микрополярного материала; a — характерный линейный размер пластинки в плане. Водится малый геометрический параметр $\delta = h/a$.

Система дифференциальных уравнений изгиба микрополярной пластинки в декартовых координатах имеет вид [6]:
уравнения равновесия

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + \left(N_{32} - N_{23}\right) = 0,\ \ \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} - \left(N_{31} - N_{13}\right) = 0,\ \ \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + q_3 = 0; \tag{3}$$

физические соотношения

$$\begin{gathered} L_{ii} = 2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right], \qquad L_{ij} = 2h\left[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}\right], \\ N_{i3} = -2h\frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu}\Gamma_{i3}, \quad \left(i, j = 1,2,\quad i \ne j\right); \end{gathered} \tag{4}$$

геометрические соотношения

$$\begin{gathered} \gamma_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad \gamma_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_2}, \qquad \Gamma_{i3} = \gamma_i + (-1)^j\,\Omega_j, \\ \chi_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \qquad \chi_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, \qquad \chi_{12} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, \qquad \chi_{21} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $w(x_1,x_2)$, $\Omega_1(x_1,x_2)$, $\Omega_2(x_1,x_2)$ — соответственно, нормальное перемещение (прогиб) и независимые повороты точек срединной плоскости пластинки; N_{3i}, N_{i3} — усредненные усилия; L_{ii}, L_{ij} — усредненные моменты от моментных напряжений; Γ_{i3} — компоненты тензора деформации; χ_{ii}, χ_{ij} — компоненты тензора изгиба–кручения на срединной плоскости пластинки.

Как видно из уравнений (3)–(5), внутренние силы и моменты пластинки выражаются через перемещение w и повороты Ω_1, Ω_2.

Подстановка значений компонентов тензоров деформации и изгиба–кручения (5) в физические соотношения (4) и значений внутренних усилий и моментов (4) — в уравнения равновесия (3) приводит к системе дифференциальных уравнений относительно функций w, Ω_1, Ω_2:

$$\begin{gathered}
\nabla^2 w-\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}=-\frac{1}{2h}\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}q_3;\\
\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_2^2}-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_1+\left[\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}+(\gamma-\varepsilon)\right]\Omega_2=0;\\
-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\left[\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}+(\gamma-\varepsilon)\right]\Omega_1+\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_2^2}-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_2=0.
\end{gathered}\tag{6}$$

Представление решения в виде

$$\begin{gathered}
w=A\sin\frac{\pi}{a}x_1\sin\frac{\pi}{b}x_2,\\
\Omega_1=B\sin\frac{\pi}{a}x_1\cos\frac{\pi}{b}x_2,\\
\Omega_2=C\cos\frac{\pi}{a}x_1\sin\frac{\pi}{b}x_2
\end{gathered}\tag{7}$$

позволяет удовлетворить граничным условиям, которые в рассматриваемом случае записываются следующим образом:

$$w\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0,\ \ \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0,\ \ \Omega_1\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0,\ \ w\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0,\ \ \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0,\ \ \Omega_2\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0.\tag{8}$$

Подстановка выражений w, Ω_1, Ω_2 из (7) в основные уравнения (6) дает значения искомых коэффициентов A, B и C:

$$\begin{gathered}
A=\frac{q_0}{2Bh}\frac{1}{\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^2}\left\{1+B\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]\right\};\\
B=\frac{\pi}{b}\frac{q_0}{2Bh}\frac{1}{\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^2};
\end{gathered}\tag{9}$$

$$C = -\frac{\pi}{a}\frac{q_0}{2Bh}\frac{1}{\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^2}.$$

Здесь $2Bh = 2h(\gamma + \varepsilon)$ — величина, условно называемая жесткостью пластинки согласно микрополярной теории с независимыми полями перемещений и вращений.

В результате подстановки вычисленных значений искомых функций w, Ω_1, Ω_2 в соотношения (4) можно определить усилия и моменты (N_{i3}, L_{ii}, L_{ij}) и далее, с использованием соответствующих формул [6], найти распределение компонентов силового и моментного тензоров напряжений $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, \sigma_{33}, \mu_{33}$ в сечениях пластинки.

Полученные формулы позволяют выполнять численные расчеты и анализировать влияние микрополярных свойств материала пластинки на ее напряженно-деформированное состояние. Хотя в настоящее время существуют композиты, для которых упругие константы определены в соответствии с подходами несимметричной теории упругости [8–10], но, на взгляд автора, для выявления особенностей поведения материала с учетом микрополярных эффектов имеет смысл проанализировать влияние физических параметров, не привязываясь к конкретному материалу.

В таблице 1 приведены результаты расчетов пластинки в рамках микрополярной теории со свободным вращением, показывающие, на сколько повышается жесткость пластинки, рассчитанная с учетом микрополярных свойств материала, по сравнению с жесткостью в рамках классической теории.

Во всех приведенных ниже расчетах принимается: интенсивность внешней нагрузки q_0 = 0,1 МПа; относительная полутолщина пластинки δ = 0,025.

Таблица 1. Результаты численных расчетов для квадратной пластинки в рамках микрополярной теории со свободным вращением

Физические параметры материала пластинки: α = 1,6 ГПа; μ = 2 ГПа; λ = 3 ГПа; $\gamma = \varepsilon$ = 1 кН					
Характерный размер	Полу-толщина пластинки	Жесткость		Максимальное перемещение	
		микрополярная теория	классическая теория	микрополярная теория	классическая теория
a, мм	h, мм	$2(\gamma+\varepsilon)\,h$, Н·мм	D, Н·мм	w_{max} 10^{-3}, мм	w^*_{max}, мм
0,5	0,0125	50	0,00744	0,0145691	0,0021550
2,0	0,0500	200	0,47619	0,0775251	0,0086230
5,0	0,1250	500	7,44048	0,4632949	0,0215585

1.2. Модель среды со стесненным вращением

Для описания моментных свойств среды используется модель, связывающая вращения точек среды с их перемещениями. Принимаются следующие значения безразмерных физических параметров пластинки:

$$\frac{\alpha}{4\mu} \sim \delta^2\alpha^*, \quad \text{где } \alpha^* \sim 1; \quad \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{10}$$

Система уравнений равновесия, физических и геометрических соотношений в этом случае имеет вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}+q_3=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(G_{11}-L_{12}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(H_{21}+L_{22}\right)-N_{13}=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(G_{22}+L_{21}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(H_{12}-L_{11}\right)-N_{23}=0; \tag{11}$$

физические соотношения

$$G_{ii}=-\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\qquad H_{ij}=\frac{Eh^3}{3\left(1+\nu\right)}\left[K_{12}+K_{21}\right],$$
$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\gamma+\beta\right)}{2\gamma+\beta}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}\chi_{jj}\right],\quad L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\chi_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\chi_{ji}\right], \tag{12}$$

где G_{ii}, H_{ij} — усредненные моменты от силовых напряжений; K_{ii},K_{ij} — компоненты тензора изгиба-кручения в точках срединной плоскости пластинки;

геометрические соотношения

$$K_{11}=\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1},\ K_{22}=\frac{\partial\beta_2}{\partial x_2},\ K_{12}=\frac{\partial\beta_2}{\partial x_1},\ K_{21}=\frac{\partial\beta_1}{\partial x_2},\ \beta_1=-\gamma_1=\frac{\partial w}{\partial x_1},\ \beta_2=-\gamma_2=\frac{\partial w}{\partial x_2},$$
$$\chi_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1},\ \chi_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2},\ \chi_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},\ \chi_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2},\ \Omega_i=\left(-1\right)^i\beta_j; \tag{13}$$

граничные условия:

$$w\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0,\quad \left(L_{12}-G_{11}\right)\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0,\quad w\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0,\quad \left(L_{21}+G_{22}\right)\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0. \tag{14}$$

После ряда преобразований система уравнений (11)–(13) сводится к одному уравнению относительно перемещения w:

$$D^*\Delta\Delta w=q_3, \tag{15}$$

где Δ — оператор Лапласа; D^* — цилиндрическая жесткость пластинки, которая в рамках микрополярной теории со стесненным вращением вычисляется по формуле

$$D^*=D+2h\left(\gamma+\varepsilon\right). \tag{16}$$

В выражении (16) $D=\dfrac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}$ — классическая жесткость пластинки.

Решение уравнения (15), удовлетворяющего граничным условиям (14), записывается в виде:

$$w = A\sin\frac{\pi}{a}x_1\,\sin\frac{\pi}{b}x_2\,. \tag{17}$$

После подстановки выражения (17) в уравнение (15), получается значение искомого коэффициента A:

$$A = \frac{q_0}{D^*}\cdot\frac{1}{\left[\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2\right]^2}\,. \tag{18}$$

Таким образом, решение краевой задачи (15) с граничным условием (14) имеет вид:

$$w = \frac{q_0}{D^*}\cdot\frac{a^4b^4}{\pi^4\left[a^2+b^2\right]^2}\sin\frac{\pi}{a}x_1\,\sin\frac{\pi}{b}x_2\,. \tag{19}$$

Подстановка найденного значения w в геометрические (13) и физические (12) соотношения дает выражения для усилий и моментов $\left(N_{i3}, G_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}\right)$, а использование соответствующих формул [6] — выражения компонентов силового и моментного тензоров напряжений: σ_{ii}, σ_{ij}, μ_{ii}, μ_{ij}, σ_{i3}, σ_{3i}, μ_{i3}, μ_{3i}, σ_{33}, μ_{33} в сечениях пластинки.

В таблице 2 приведены численные результаты расчета. Сопоставление полученных результатов с известными классическими решениями демонстрируют существенное повышение жесткости пластины при учете ее микрополярных свойств.

Таблица 2. Результаты численных расчетов квадратной пластинки в рамках микрополярной теории со стесненным вращением

Физические параметры материала пластинки: α = 1,6 ГПа; μ = 2 ГПа; λ = 3 ГПа; $\gamma = \varepsilon$ = 1 кН					
Характерный размер	Полу-толщина пластинки	Жесткость		Максимальное перемещение	
		микрополярная теория	классическая теория	микрополярная теория	классическая теория
a, мм	h, мм	D^*, Н·м	D, Н·м	$w_{\max}$, мм	$w^*_{\max}$, мм
6	0,15	0,612860	0,012857	0,000543	0,025870
12	0,30	1,302857	0,102857	0,004085	0,051740
18	0,45	2,147143	0,347143	0,012548	0,077611

1.3. Модель среды «с малой сдвиговой жесткостью»

Безразмерные физические параметры материала пластинки в этом случае имеют значения [6]:

$$\frac{\mu}{4\alpha}\sim\delta^{-2}\alpha^*, \quad \text{где } \alpha^*\sim 1; \qquad \frac{a^2\mu}{\beta}\sim 1, \qquad \frac{a^2\mu}{\gamma}\sim 1, \qquad \frac{a^2\mu}{\varepsilon}\sim 1 \tag{20}$$

Особенностью рассматриваемой модели среды является то, что уравнения, описывающие «моментную» и «силовую» части задачи, распадаются на две несвязанные группы. Основные уравнения и граничные условия «моментной» части задачи имеют вид [6]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}=0, \qquad \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}=0\,; \tag{21}$$

физические соотношения

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right], \qquad L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}\right]; \tag{22}$$

геометрические соотношения

$$\chi_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1},\ \ \chi_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2},\ \ \chi_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},\ \ \chi_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\,; \tag{23}$$

граничные условия

$$L_{11}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0, \qquad L_{12}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0, \qquad L_{22}\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0, \qquad L_{21}\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0\,. \tag{24}$$

Для «силовой» части задачи аналогичные уравнения записываются в виде:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}+q_3=0, \qquad N_{31}=\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial H_{21}}{\partial x_2}, \qquad N_{32}=\frac{\partial G_{22}}{\partial x_2}-\frac{\partial H_{12}}{\partial x_1}\,; \tag{25}$$

физические соотношения

$$G_{ii}=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\ \ H_{12}=H_{21}=\frac{2\mu h^3}{3}\left[K_{12}+K_{21}\right],\ \ N_{i3}=N_{3i}-8h\alpha\Gamma_{i3}\,; \tag{26}$$

$$(i,j=1,2,\quad i\neq j)$$

геометрические соотношения

$$\begin{gathered}K_{11}=\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1},\ \ K_{22}=\frac{\partial\beta_2}{\partial x_2},\ \ K_{12}=\frac{\partial\beta_2}{\partial x_1},\ \ K_{21}=\frac{\partial\beta_1}{\partial x_2},\\ \beta_1=-\gamma_1=\frac{\partial w}{\partial x_1},\ \ \beta_2=-\gamma_2=\frac{\partial w}{\partial x_2},\ \ \Gamma_{i3}=-\beta_i+(-1)^j\,\Omega_j\,;\end{gathered} \tag{27}$$

граничные условия

$$w\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0,\quad G_{11}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}}=0,\quad w\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0,\quad G_{22}\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=b}}=0\,. \tag{28}$$

Анализ общей системы уравнений и граничных условий (21)–(28) показывает, что в случае отсутствия «моментной» части задачи решение «силовой» части сводится к решению системы определяющих уравнений (25–28), где, вследствие того что $\Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv 0$, выражение для Γ_{i3} принимает вид:

$$\Gamma_{i3} = -\beta_i\,. \tag{29}$$

Полученная система уравнений (25)–(27) с учетом выражения (29) сводится к одному уравнению относительно перемещения w

$$D\Delta\Delta w - 8h\alpha\Delta w = q_3\,, \tag{30}$$

дополненному граничными условиями (28). Следует заметить, что из-за присутствия упругого коэффициента α это уравнение оказывается отличным от уравнения, получаемого в рамках классической теории изгиба пластин.

Из уравнения (30), моделирующего изгиб пластины в рамках теории микрополярной среды «с малой сдвиговой жесткостью», следует, что в пластинке возникают растягивающие усилия, которые повышают ее жесткость.

Решение уравнения (30) строится в виде:

$$w = A\,\sin\frac{\pi}{a}x_1\,\sin\frac{\pi}{b}x_2\,, \tag{31}$$

где $A = \dfrac{q_0}{\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{D\left[\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2\right]+8h\alpha}$.

Подстановка полученного w в выражения (25)–(27) и последующее использование формул [6] позволяет получить значения усилий и моментов $\left(N_{i3}, N_{3i}, G_{ii}, H_{ij}\right)$ и компонентов силового и моментного тензоров напряжений: $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \sigma_{33}$ в сечениях пластинки.

В таблице 3 приведены численные результаты расчета пластины, из которых видно, что, несмотря на принятое условие отсутствия «моментной» части задачи, прогиб пластинки оказывается вновь значительно меньшим, чем прогиб, рассчитанной по классической теории.

Таблица 3. Результаты численных расчетов квадратной пластинки по микрополярной теории «с малой сдвиговой жесткостью»

Физические параметры материала пластинки: α = 1,5 МПа, μ = 2,15 ГПа, λ = 3,23 ГПа, $\gamma = \varepsilon$ = 0,225 ГН			
Характерный размер	Полутолщина пластинки	Максимальное перемещение	
		микрополярная теория	классическая теория
a, м	h, м	$w_{\max}$, см	$w^*_{\max}$, см
0,3	0,0075	0,09709	0,12011
0,4	0,0100	0,12946	0,16015
0,5	0,0125	0,16182	0,20019

2. Изгиб упругой микрополярной круглой пластинки

Далее рассматриваются задачи об изгибае упругой круглой пластинки радиуса R, шарнирно опертой по контуру, под действием нормальной равномерно распределенной нагрузки q с учетом микрополярных свойств среды.

2.1 Модель среды со свободным вращением

Значения безразмерных физических параметров, характеризующих микрополярные свойства среды, определяются соотношениями (1). Изгиб упругой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки q с учетом микрополярных свойств среды описывается следующими соотношениями:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial r}+\frac{1}{r}N_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_{23}}{\partial\theta}=-q,\qquad \frac{\partial L_{11}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(L_{11}-L_{22}\right)+\frac{1}{r}\ \frac{\partial L_{21}}{\partial\theta}+N_{23}=0,$$
$$\frac{\partial L_{12}}{\partial r}+\ \frac{1}{r}\frac{\partial L_{22}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\left(L_{12}+L_{21}\right)-N_{13}=0, \tag{32}$$

(здесь и далее цифровые индексы соотносятся с обозначениями цилиндрических координат согласно выражениям: ($1\to r$, $2\to\theta$, $3\to z$));

физико-геометрические соотношения

$$L_{12}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\Omega_2\right)\right],\quad N_{13}=2h\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\Omega_2\right),$$
$$L_{21}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\Omega_2\right)+\left(\gamma-\varepsilon\right)\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}\right],\quad N_{23}=2h\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\Omega_1\right),$$
$$L_{11}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\gamma+\beta\right)}{2\gamma+\beta}\frac{\partial\Omega_1}{\partial r}+\frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\Omega_1\right)\right],$$
$$L_{22}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\gamma+\beta\right)}{2\gamma+\beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\Omega_1\right)+\frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}\frac{\partial\Omega_1}{\partial r}\right]; \tag{33}$$

граничные условия

$$w=0,\quad L_{12}=0,\quad \Omega_1=0\quad \text{при}\ r=R. \tag{34}$$

С учетом осевой симметрии система уравнений (32)–(33) сводится к следующей системе:

$$\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{d\Omega_2}{dr}+\frac{1}{r}\Omega_2=-\frac{1}{2h}\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}q, \tag{35}$$

$$\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}\left(\frac{d^2\Omega_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Omega_1}{dr}-\frac{1}{r^2}\Omega_1\right)-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_1=0, \tag{36}$$

$$-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{dw}{dr}+\Omega_2\right)+(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{d^2\Omega_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Omega_2}{dr}-\frac{1}{r^2}\Omega_2\right)=0. \qquad (37)$$

Уравнение (36) содержит одну независимую переменную — Ω_1 и может быть решено независимо. При этом ему соответствует и независимое граничное условие $\Omega_1 = 0$ при $r = R$.

Совместное решение уравнений (35) и (37) с учетом граничных условий (34) приводит к уравнению для искомого перемещения w

$$2h(\gamma+\varepsilon)\Delta\Delta w = q, \qquad (38)$$

где $2h(\gamma+\varepsilon)$ — жесткость пластинки в рамках микрополярной модели со свободным вращением.

Общее решение уравнения (38) представляется в виде:

$$w = \frac{qr^4}{64\cdot 2h(\gamma+\varepsilon)}+c_1+c_2\ln r+c_3r^2+c_4r^2\ln r. \qquad (39)$$

Из условия регулярности решения (39) константы $c_2 = c_4 = 0$, и решение принимает вид

$$w = \frac{qr^4}{64\cdot 2h(\gamma+\varepsilon)}+c_1+c_3r^2. \qquad (40)$$

Постоянные коэффициенты c_1, c_3 определяются из граничных условий (34).

Решение уравнений (35) и (37) относительно Ω_2 приводит к выражению:

$$\Omega_2 = -\frac{dw}{dr}-\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right). \qquad (41)$$

После подстановки прогиба w (выражение (40)) в (41) получается окончательно:

$$w = \left(R^2-r^2\right)\left[\frac{1}{2h}\cdot\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\cdot\frac{q}{4}+\frac{q}{64\cdot 2h(\gamma+\varepsilon)}\cdot\left(\frac{2\gamma+3\varepsilon}{\varepsilon}R^2-r^2\right)\right], \qquad (42)$$

$$\Omega_2 = \frac{qr}{16\cdot 2h(\gamma+\varepsilon)}\left[\frac{\gamma+2\varepsilon}{\varepsilon}R^2-r^2\right].$$

Остальные расчетные величины находятся из выражений (33) и формул, приведенных в работе [6].

В таблице 4 представлены численные результаты расчетов максимального смещения для круглой пластинки в рамках микрополярной теории со свободным вращением. Как и в случае прямоугольной пластинки, здесь также видно, что прогиб микрополярной пластинки значительно меньше, чем его классическое значение.

Таблица 4. Результаты численных расчетов круглой пластинки по микрополярной теории со свободным вращением

Физические параметры материала пластинки: α = 1,6 ГПа; μ = 2 ГПа; λ = 3 ГПа; $\gamma = \varepsilon$ = 1 кН			
Характерный размер	Полутолщина пластинки	Максимальное перемещение	
		микрополярная теория	классическая теория
R, мм	h, мм	$w_{\max}$ 10^{-3}, мм	$w^*_{\max}$, мм
0,5	0,0125	0,08008	0,05351
2,0	0,0500	0,90625	0,21404
5,0	0,1250	10,46875	0,53509

2.2 Модель среды со стесненным вращением

Значения безразмерных физических параметров, характеризующих микрополярные свойства среды со стесненным вращением, вводятся в виде (10).

Система уравнений, описывающая напряжено-деформированное состояние пластинки, включает:

уравнения равновесия

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_{13}}{\partial r}+\frac{1}{r}N_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_{23}}{\partial \theta}=-q;\\
&\frac{\partial\left(L_{11}-H_{12}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(L_{11}-H_{12}-L_{22}-H_{21}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(L_{21}-G_{22}\right)}{\partial\theta}+N_{23}=0;\\
&\frac{\partial\left(L_{12}+G_{11}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(L_{22}+H_{21}\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\left(L_{12}+G_{11}-G_{22}+L_{21}\right)-N_{13}=0;
\end{aligned}
\tag{43}
$$

физико-геометрические соотношения

$$
\begin{aligned}
&G_{11}=-\frac{2Eh^3}{3\left(1-v^2\right)}\left[\frac{\partial\beta_1}{\partial r}+v\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\beta_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\beta_1\right)\right],\\
&G_{22}=-\frac{2Eh^3}{3\left(1-v^2\right)}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\beta_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\beta_1\right)+v\frac{\partial\beta_1}{\partial r}\right],\\
&H_{12}=H_{21}=\frac{Eh^3}{3\left(1+v\right)}\left[\frac{\partial\beta_2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\beta_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\beta_2\right],\\
&L_{11}=4h\gamma\frac{\partial\Omega_1}{\partial r},\\
&L_{22}=4h\gamma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\Omega_1\right),\\
&L_{12}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\Omega_2\right)\right],\\
&L_{21}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\Omega_2\right)+\left(\gamma-\varepsilon\right)\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}\right],
\end{aligned}
\tag{44}
$$

где

$$
\Omega_1=-\beta_2=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta},\quad \Omega_2=\beta_1=-\frac{\partial w}{\partial r}. \tag{45}
$$

Система замыкается граничными условиями

$$w = 0, \quad G_{11} + L_{12} = 0 \quad \text{при } r = R. \tag{46}$$

Уравнения (43)–(45), записанные с учетом осевой симметрии, сводятся к уравнению для перемещения w

$$D^{*}\Delta\Delta w = q. \tag{47}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа в полярных координатах. Уравнение (47) дополняется граничными условиями для w:

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{при } r = R. \tag{48}$$

Решение краевой задачи (47), (48) имеет вид:

$$w = \frac{q\left(R^2 - r^2\right)}{64D^{*}}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}R^2 - r^2\right). \tag{49}$$

Отсюда следует выражение для Ω_2:

$$\Omega_2 = \frac{qr}{16D^{*}}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}R^2 - r^2\right). \tag{50}$$

В таблице 5 приведены численные результаты расчета максимального перемещения для круглой пластинки в рамках микрополярной теории со стесненным вращением.

Таблица 5. Результаты численных расчетов круглой пластинки по микрополярной теории со стесненным вращением

Физические параметры материала пластинки: α = 1,6 ГПа; μ = 2 ГПа; λ = 3 ГПа; $\gamma = \varepsilon$ = 1 кН			
Характерный размер	Полутолщина пластинки	Максимальное перемещение	
		микрополярная теория	классическая теория
R, мм	h, мм	$w_{\max}$, мм	$w^{*}_{\max}$, мм
6	0,15	0,013471	0,642115
12	0,30	0,101387	1,284231
18	0,45	0,311445	1,926346

2.3. *Модель среды «с малой сдвиговой жесткостью»*

Значения безразмерных физических параметров, характеризующих микрополярные свойства среды «с малой сдвиговой жесткостью», описываются соотношениями (20):

Основные уравнения и граничные условия «моментной» части задачи изгиба упругой микрополярной круглой пластинки имеют вид [6]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(L_{11} - L_{22}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{21}}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{22}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(L_{12} + L_{21}\right) = 0; \tag{51}$$

физико-геометрические соотношения

$$
\begin{aligned}
&L_{11}=2h\left[\frac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\frac{d\Omega_1}{dr}+\frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}\frac{1}{r}\Omega_1\right],\\
&L_{22}=2h\left[\frac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\frac{1}{r}\Omega_1+\frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}\frac{d\Omega_1}{dr}\right],\\
&L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{d\Omega_2}{dr}+(\gamma-\varepsilon)\left(-\frac{1}{r}\Omega_2\right)\right],\\
&L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\left(-\frac{1}{r}\Omega_2\right)+(\gamma-\varepsilon)\frac{d\Omega_2}{dr}\right];
\end{aligned}
\tag{53}
$$

граничные условия

$L_{11}=0$, $L_{12}=0$, при $r=R$.

Основные уравнения и граничные условия «силовой» части задачи:

уравнения равновесия

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_{13}}{\partial r}+\frac{1}{r}N_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_{23}}{\partial\theta}=-q,\\
&N_{31}-\frac{\partial G_{11}}{\partial r}-\frac{1}{r}(G_{11}-G_{22})-\frac{1}{r}\ \frac{\partial H_{21}}{\partial\theta}=0,\\
&N_{32}-\frac{\partial H_{12}}{\partial r}-\frac{1}{r}(H_{12}+H_{21})-\frac{1}{r}\ \frac{\partial G_{22}}{\partial\theta}=0;
\end{aligned}
\tag{54}
$$

физические соотношения

$$
\begin{aligned}
&G_{11}=-\frac{2Eh^3}{3(1-v^2)}\left[\frac{\partial\beta_1}{\partial r}+v\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\beta_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\beta_1\right)\right],\\
&G_{22}=-\frac{2Eh^3}{3(1-v^2)}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\beta_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\beta_1\right)+v\frac{\partial\beta_1}{\partial r}\right],\\
&H_{12}=H_{21}=\frac{4\mu h^3}{3}\left[\frac{\partial\beta_2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\beta_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\beta_2\right],\\
&N_{13}=8h\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\Omega_2\right)+N_{31},\\
&N_{23}=8h\alpha\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\Omega_1\right)+N_{32};
\end{aligned}
\tag{55}
$$

граничные условия

$$w=0,\qquad G_{11}=0\quad \text{при}\quad r=R. \tag{56}$$

При отсутствии «моментных» напряжений «силовая» часть задачи сводится к одному уравнению относительно перемещения w:

$$D\Delta\Delta w - 8h\alpha\Delta w = q \tag{57}$$

с граничными условиями

$$w = 0, \qquad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{при } r = R. \tag{58}$$

Общее решение уравнения (57) имеет вид:

$$w = A_1 + A_2 I_0(\lambda r) + A_3 K_0(\lambda r) + A_4 \ln(\lambda r), \tag{59}$$

где $I_0(\lambda r)$, $K_0(\lambda r)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, в которых $\lambda = \sqrt{8\alpha h/D}$.

Из условия регулярности решения при $r = 0$, следует $A_3 = A_4 = 0$ Константы A_1 и A_2 определяются из граничного условия (58). Тогда решение принимает вид

$$w = \frac{q(1+\nu)}{2(8\alpha h)} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{I_0(\lambda r) - I_0(\lambda R)}{I_2(\lambda R) + \frac{1+\nu}{\lambda R} I_1(\lambda R)} - \frac{q\left(r^2 - R^2\right)}{4 \cdot 8\alpha h}. \tag{60}$$

Подстановка полученного решения в уравнения (54)–(55) и использование формул работы [6] позволяют вычислить выражения как для силовых и моментных напряжений, так и для интегральных величин усилий и моментов в пластинке.

В таблице 6 представлены численные результаты решения задачи для круглой упругой пластинки в рамках микрополярной среды «с малой сдвиговой жесткостью».

Таблица 6. Результаты численных расчетов круглой пластинки по микрополярной теории «с малой сдвиговой жесткостью»

Физические параметры материала пластинки: α = 1,5 МПа, μ = 2,15 ГПа, λ = 3,23 ГПа, $\gamma = \varepsilon$ = 0,225 ГН			
Радиус срединной плоскости пластинки	Полутолщина пластинки	Максимальное перемещение	
		микрополярная теория	классическая теория
R, м	h, м	$w_{\max}$, см	$w^*_{\max}$, см
0,3	0,0075	1,39521	2,98125
0,4	0,0100	1,86028	3,97500
0,5	0,0125	2,32535	4,96875

4. Заключение

В работе получены аналитические решения задач изгиба прямоугольных и круглых в плане пластин на основе различных моделей несимметричной теории упругости [6]. Результаты численного анализа жесткостей пластин, а также максимальных прогибов в сопоставлении с соответствующими значениями, полученными по классической теории, позволили сделать следующие выводы:

– микрополярная теория со свободным вращением предсказывает значения прогиба пластинки существенно меньшие, чем в классическом случае. При малых размерах пластинки классическая модель дает значения прогиба, в несколько раз превышающие толщину пластинки, что указывает на неприменимость этой модели для данного случая. При использовании микрополярной модели рассчитанные значения жесткости имеют конечную величину при заданном виде нагрузки, и прогибы пластинки оказываются на три порядка меньше ее толщины;

– в рамках теории со стесненным вращением расчетные значения жесткости пластинки превышают классическую изгибную жесткость в несколько раз, а прогибы оказываются в сотни раз меньше, чем прогибы, рассчитанные при классическом подходе;

– в случае изгиба пластины «с малой сдвиговой жесткостью» в материале возникают растягивающие усилия; в результате получаются прогибы значительно меньшие, чем в классическом случае.

Литература

1. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов // Под ред. В.Е.Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298с.
2. *Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н.* Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика – 2007. – Т. 10, № 5. – С. 77-90.
3. *Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. – 2006. – Т. 52, № 2. – С. 227-235.
4. *Корепанов В.В., Кулеш М.А., Шардаков И.Н.* Варианты экспериментов по регистрации моментных эффектов в упругих материалах // Тезисы докладов Международной конференции «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды (Саратов, 27 августа-1 сентября 2007 г.). – Саратов: Изд-во Саратовского университета. – 2007. – С. 62-63.
5. *Саркисян С.О.* Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11, № 5. – С. 41-54
6. *Саркисян С.О.* Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 1. – С. 129-147.
7. *Саркисян С.О.* Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады НАН Армении. – 2008. – Т 108, № 4. – С. 309-319.
8. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 328с.
9. *Anderson W.B. and Lakes R.S.* Size effects due to Cosserat Elasticity and surface damage in closed cell polymethacrylimide foam // J. Materials Sci. – 1994. – V. 29, №24. – P. 6413-6419.
10. *Gauther R.D., Jahsman W.E.* A quest for Micropolar Elastic Constants. P. 2 // Arch. Mech. – 1981. – V. 33, № 5. – P. 717-737.