О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА УПРУГИЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ

Д.П. Коузов

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Россия

Рассматривается влияние силы тяжести на упругие волновые процессы в идеальном газе. Для описания таких процессов используется простейшая линейная баротропная энергетически замкнутая модель. При этом в волновом уравнении присутствует линейный поправочный член, учитывающий как силу тяжести, так и обусловленное ею изменение плотности газа по высоте. На примере типовых волновых процессов (плоской гармонической, сферической гармонической и нестационарной сферической волн) показывается, какие изменения вносит эта поправка в аналитические представления таких процессов и как отражается на их характере.

ON THE INFLUENCE OF GRAVINY FORCE ON ELASTIC WAVE PROCESSES IN AN IDEAL GAS

D.P. Kouzov

Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Saint Petersburg, 199178, Russia

The influence of gravity force on elastic wave processes in an ideal gas is considered. The simplest linear barotropic energetically closed model is used to describe such processes. The wave equation acquires a linear correction term, which takes into account both the gravity force and the variation of gas density with height caused by it. Taking typical wave processes (plane harmonic, spherical harmonic and nonstationary spherical waves) as examples, it is shown what changes this correction introduces into the analytic representation of these processes and how this is reflected in their character.

1. Введение. Идеальный газ в однородном поле силы тяжести

Газ называется идеальным (или совершенным [1, 2]), если его уравнение состояния задаётся формулой Клапейрона. Полагаем, что такой газ помещён в однородное поле тяжести, ось аппликат z ориентируем в направлении силы тяжести, то есть вниз. Пусть газ находится в состоянии термического равновесия. Это даёт линейную связь между равновесной плотностью газа $\rho_0 = \rho_0(z)$ и равновесным давлением в газе $p_0 = p_0(z)$:

$$p_0(z) = c_0^2 \rho_0(z) . \tag{1}$$

Здесь c_0 — изотермическая (ньютонова) скорость звука, которая не зависит от высоты и является для выбранного газа константой.

Распределения давления и плотности газа в поле тяжести связаны соотношением:

$$p_0(z) = \int_{-\infty}^{z} \rho_0(\zeta) g d\zeta , \tag{2}$$

где g — ускорение свободного падения.

Если продифференцируем (2) по аппликате и воспользуемся равенством (1), легко придём к барометрической зависимости равновесной плотности (и, соответственно, равновесного давления) от высоты:

$$\frac{\rho_0(z)}{\rho_0(0)} = \frac{p_0(z)}{p_0(0)} = \exp\left(\frac{gz}{c_0^{\,2}}\right). \tag{3}$$

Назовём «акустическим» (в широком смысле слова, не ограничивая себя звуковым частотным диапазоном) всякий линейный механический волновой процесс в описанной модели, обусловленный упругостью среды. В качестве основной переменной выберем акустическое давление p. В полном давлении в среде $\tilde{p}$ акустическое давление представляет собой малую знакопеременную добавку к равновесному давлению:

$$\tilde{p} = p_0 + p\,. \tag{4}$$

Целью данной работы является выяснение вопроса, какие новые акустические явления может породить наличие однородного поля тяжести. Для этого ниже рассмотрена простейшая линейная баротропная энергетически замкнутая модель акустических движений идеального газа в постоянном поле тяжести и исследовано протекание в ней стационарных и нестационарных волновых процессов.

2. Гравитационные поправки в уравнениях линейной акустики

В исходном равновесном состоянии газ неподвижен, так что вектор скорости смещений $\mathbf{v}$ его частиц при линеаризации полагаем малой величиной. Малой того же порядка будем считать и знакопеременное отклонение текущей плотности газа ρ от равновесной. В этих предположениях, учитывая также отсутствие зависимости равновесной плотности от времени, уравнение неразрывности после линеаризации запишем в виде

$$\frac{\partial(\rho - \rho_0)}{\partial t} + \operatorname{div}\{\rho_0 \mathbf{v}\} = 0\,. \tag{5}$$

В баротропной среде имеется однозначная зависимость между отклонением плотности от равновесного состояния и акустическим давлением. С учётом малости этих величин такую зависимость можно рассматривать как линейную:

$$c^2(\rho - \rho_0) = p\,. \tag{6}$$

Здесь c — скорость распространения волн в среде. В акустическом диапазоне частот эта скорость с достаточной степенью точности обычно полагается адиабатической (лапласовой). Объединяя уравнение неразрывности (5) и уравнение состояния (6), получим

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\{\rho_0 \mathbf{v}\} = 0\,, \tag{7}$$

или в развёрнутом виде:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0\frac{g}{c_0^{\ 2}}v_z+\rho_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0\,. \tag{8}$$

В левой части равенства (8) второе слагаемое вызвано барометрическим изменением плотности с высотой. Оно играет роль гравитационной поправки. В гравитационной поправке нуждается также и линеаризованное уравнение Эйлера, поскольку его традиционный вывод в руководствах по акустике опирается на предположение о постоянстве равновесных величин давления и плотности. Поясним физический смысл рассматриваемого эффекта. Акустическая волна состоит в последовательной смене сжатий и расширений несущей среды. Очевидно, что при расширении среды и соответствующем уменьшении её плотности должна возникать результирующая выталкивающая сила, направленная против силы тяжести. Наоборот, акустическое сжатие должно порождать добавочную силу, направленную в сторону силы тяжести. Этот механизм затрагивает только вертикальную переменную и, таким образом, она оказывается выделенной по сравнению с двумя другими координатами.

В качестве исходной рассмотрим точную (нелинейную) запись общего уравнения Эйлера

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\mathrm{grad}\,\tilde{p}=\rho\tilde{\mathbf{f}}\,. \tag{9}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{f}}$ — внешняя сила, отнесённая к единице массы. Она включает как силу тяжести $\mathbf{f}_0$, так и стороннюю силу $\mathbf{f}$, которая служит источником акустического возмущения:

$$\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}_0+\mathbf{f}=g\mathbf{e}_z+\mathbf{f}\,.$$

Статическое гравитационное давление, очевидно, является фиксированным в любой заданной точке пространства и определяется на основании равновесной плотности ρ_0:

$$p_0=\int\limits_{-\infty}^{z}\rho_0 g dz\,.$$

В задании же силы тяжести, действующей на элемент среды, должна участвовать текущая плотность среды: $\rho\mathbf{f}_0=\rho g\mathbf{e}_z$. Подставив два последних выражения в уравнение Эйлера (9) и проведя линеаризацию полученного равенства, получим

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathrm{grad}\,p-\left(\rho-\rho_0\right)g\mathbf{e}_z=\rho_0\mathbf{f}\,. \tag{10}$$

С учётом равенства (6) окончательно имеем:

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathrm{grad}\,p-\frac{g}{c^2}p\mathbf{e}_z=\rho_0\mathbf{f}\,. \tag{11}$$

Третье слагаемое в левой части уравнения Эйлера (11) представляет собой искомую гравитационную поправку. Вообще говоря, указанные поправки (как для уравнения неразрывности, так и для уравнения Эйлера) не являются новыми. В частности, их (в этой же или эквивалентной записи) можно найти в компендиуме [2]. Однако в названной монографии они рассматриваются вне связи с законом сохранения энергии. Между тем, как показано ниже, отнюдь не всякая баротропная модель колебаний газа, учитывающая гравитационную стратификацию, энергетически замкнута. Иными словами, требование выполнения закона сохранения энергии накладывает на круг допустимых баротропных моделей существенные ограничения и выявляет определённую условность таких моделей.

3. Закон сохранения акустической энергии для гравитационно стратифицированного газа

Помножим скалярно левую и правую части равенства (11) на вектор скорости смещений $\mathbf{v}$ и проинтегрируем результат по некоторому выбранному объёму среды Ω и по времени от начала процесса $t=0$ до некоторого текущего момента времени t. До начала процесса ($t<0$) стороннюю силу будем предполагать отсутствующей ($\mathbf{f}=0$), а среду — неподвижной ($p=0$ и $\mathbf{v}=\mathbf{0}$):

$$\int_0^t dt\iiint_\Omega \rho_0(\mathbf{f},\mathbf{v})\,d\Omega=\int_0^t dt\iiint_\Omega \rho_0\left(\mathbf{v},\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)d\Omega+\int_0^t dt\iiint_\Omega(\mathbf{v},\operatorname{grad}p)\,d\Omega-\int_0^t dt\iiint_\Omega \frac{g}{c^2}pv_z\,d\Omega. \quad (12)$$

Левая часть уравнения (12) задаёт работу W сторонней акустической силы:

$$W=\int_0^t dt\iiint_\Omega \rho_0(\mathbf{f},\mathbf{v})\,d\Omega. \quad (13)$$

В выражении (12) первый интеграл справа равен кинетической энергии E_k, приобретённой рассматриваемым элементом среды:

$$E_k=\frac{1}{2}\iiint_\Omega \rho_0 v^2\,d\Omega. \quad (14)$$

Второй интеграл в правой части (12) преобразуем следующим образом:

$$\int_0^t dt\iiint_\Omega(\mathbf{v},\operatorname{grad}p)\,d\Omega=\int_0^t dt\iiint_\Omega \operatorname{div}\{p\mathbf{v}\}\,d\Omega-\int_0^t dt\iiint_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{v}\,d\Omega=$$
$$=\int_0^t dt\iint_{\partial\Omega} pv_n\,dS+\int_0^t dt\iiint_\Omega \frac{1}{K}p\frac{\partial p}{\partial t}\,d\Omega+\int_0^t dt\iiint_\Omega \frac{g}{c_0^2}pv_z\,d\Omega. \quad (15)$$

Здесь $K=\rho_0c^2$ — акустический модуль объёмного сжатия (если считать скорость c адиабатической, то и сам модуль должен предполагаться адиабатическим), $v_n=(\mathbf{v},\mathbf{n})$, где n — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω. Первый из интегралов в правой части этого равенства (обозначим его через Π) задаёт работу, произведённую выбранным элементом среды над внешними объектами:

$$\Pi = \int_0^t dt \iint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\pi}, \mathbf{n}) dS . \tag{16}$$

Здесь $\boldsymbol{\pi}$ — вектор плотности потока акустической энергии

$$\boldsymbol{\pi} = p\mathbf{v} . \tag{17}$$

Второй интеграл в правой части (15) равен потенциальной энергии E_p рассматриваемого элемента среды

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \frac{p^2}{K} d\Omega . \tag{18}$$

Таким образом, приходим к следующему виду закона сохранения энергии:

$$W = E_k + E_p + \Pi + \int_0^t dt \iiint_{\Omega} g \left(\frac{1}{c_0{}^2} - \frac{1}{c^2} \right) p v_z d\Omega .$$

Последний интеграл в правой части этого равенства не имеет физической интерпретации. В отличие от первых двух слагаемых, он не представляет собой функцию состояния, а зависит от предшествующего физического процесса. С другой стороны, он не может быть преобразован и в поверхностный интеграл общим для всех процессов способом (подобно третьему слагаемому) и поэтому не может быть истолкован как взаимодействие между элементом среды и внешними телами. Очевидно, что при наличии закона сохранения энергии его просто не должно быть. Выясним причину его возникновения. Она заключается в том, что от среды требуются два взаимно исключающих друг друга свойства: при описании равновесной статики среды полагаем её теплопроводной, а при описании акустических процессов в ней, наоборот, считаем среду абсолютно нетеплопроводной. Использование баротропной модели описания процессов в среде предполагает единообразный подход к свойству теплопроводности среды; в противном случае закон сохранения энергии не может иметь место. Таким образом, для получения энергетически замкнутой баротропной модели колебаний газа следует сделать однозначный выбор его теплопроводных свойств.

Разберём две основные возможности. Газ полностью нетеплопроводен, все процессы в нём являются адиабатическими. В этом случае следует отказаться от барометрической формулы для равновесных плотности и давления (3). Однако заменяющая формула не будет традиционной экспоненциальной (например, в предположении, что до сжатия гравитационной силой газ имел постоянную температуру), а превратится в мало правдоподобную степенную. Поэтому названная возможность представляется неудачной.

Во втором случае считаем, что газ полностью теплопроводен, все процессы в нём носят изотермический характер, то есть имеет место стандартное барометрическое распределение плотности и давления по высоте. Однако (по крайней мере, в звуковом частотном диапазоне) скорость распространения волн примерно на 20% меньше реальной. Но именно эта модель, при всей её условности, даёт качественно более правдоподобную картину волновых процессов в среде и может быть использована для простейшего описания возникающих волновых ситуаций. Такое рассмотрение является полезным предварительным этапом полного изучения волновых явлений в газе. При этом адекватное описание волновых процессов в газе, находящемся в поле тяжести, может быть получено только путём привлечения бароклинной модели. Иными словами, необходимо ввести в качестве дополнительной неизвестной локальную температуру процесса.

Итак, примем, что скорость распространения волн является изотермической. С учётом этого соглашения приходим к стандартной форме закона сохранения энергии

$$W = E_k + E_p + \Pi , \tag{19}$$

так что работа, совершённая сторонней силой, равна сумме энергии, приобретённой элементом среды, и работы, произведённой элементом среды над внешними объектами.

Приведём также дифференциальную форму закона сохранения энергии. Она может быть получена дифференцированием по времени равенства (19) и последующим приравниванием подынтегральных выражений результата:

$$\rho_0 \left(\mathbf{f}, \mathbf{v}\right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\pi} . \tag{20}$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_p$, где $\varepsilon_k = \frac{1}{2}\rho_0 v^2$ — плотность кинетической, а $\varepsilon_p = \frac{1}{2K} p^2$ — плотность потенциальной энергии.

В дальнейшем опустим индекс «0» у ньютоновой скорости c, поскольку адиабатическая скорость больше не будет использоваться. Соответственно и модуль объёмного сжатия K будем впредь предполагать изотермическим. В этих обозначениях волновое уравнение для акустического давления (оно получается исключением вектора скорости из уравнений (7) и (11)) приобретает вид:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta p - \frac{g}{c^2}\frac{\partial p}{\partial z} = \operatorname{div}\left\{\rho_0 \mathbf{f}\right\} . \tag{21}$$

Третье слагаемое слева в этой формуле представляет собой гравитационную поправку. Таким образом, гравитационная поправка в волновом уравнении необходима для того, чтобы выполнялся закон сохранения энергии (19). Коэффициент $\frac{c^2}{g}$ играет роль характерной длины, для которой (в направлении параллельном силе тяжести) действие поправки даёт заметный эффект [2]. Для воздуха эта высота равна приблизительно десяти километрам.

4. Гармонические процессы. Принцип взаимности

Обратимся к рассмотрению гармонических процессов. Комплексные аналоги вещественных величин $p, \mathbf{v}, \mathbf{f}$, задающих акустическое поле, обозначим соответствующими большими буквами $P, \mathbf{V}, \mathbf{F}$. Имеем $p = \operatorname{Re}\left\{P e^{-i\omega t}\right\}$, $\mathbf{v} = \operatorname{Re}\{\mathbf{V} e^{-i\omega t}\}$, $\mathbf{f} = \operatorname{Re}\{\mathbf{F} e^{-i\omega t}\}$. Уравнения (8), (11) и (21) соответственно примут вид:

$$-i\omega P + \rho_0 g V_z + K \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 , \tag{22}$$

$$-i\omega\rho_0 \mathbf{V} + \operatorname{grad} P - \frac{g}{c^2} P \mathbf{e}_z = \rho_0 \mathbf{F} , \tag{23}$$

$$\Delta P - \frac{g}{c^2}\frac{\partial P}{\partial z} + k^2 P = \operatorname{div}\{\rho_0 \mathbf{F}\}. \tag{24}$$

Здесь $k = \dfrac{\omega}{c}$ волновое число.

Для энергетических характеристик поля при гармоническом процессе обычно используются их средние значения за период:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{4}\rho_0 \|\mathbf{V}\|^2, \qquad \langle \varepsilon_p \rangle = \frac{1}{4K}|P|^2, \qquad \langle \boldsymbol{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re} P\bar{\mathbf{V}}.$$

Черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Закон сохранения средней энергии в дифференциальной форме имеет при этом вид:

$$\frac{\rho_0}{2}\operatorname{Re}\left(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{V}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\, \operatorname{div}\left\{P\bar{\mathbf{V}}\right\}. \tag{25}$$

В скалярном произведении знак комплексного сопряжения у второго вектора обычно не пишется, а подразумевается. Но здесь, в целях унификации записи, условимся его писать, поскольку при переходе к комплексным аналогам в выражениях для средних значений произведений любого векторного типа он также возникает (например, в правой части равенства (25)) и, следовательно, будет удобнее писать его всегда, не делая исключения для скалярного произведения.

В волновое уравнение (24) входит слагаемое, содержащее первую производную. В математике это традиционно воспринимается как признак отсутствия принципа взаимности. С другой стороны, физический принцип взаимности для своего выполнения предполагает наличие закона сохранения энергии. Убедимся, что в рассматриваемой модели он выполнен.

Введём в рассмотрение два состояния. Переменные, относящиеся к этим состояниям, будем отмечать нижними индексами «1» и «2». Умножим скалярно обе части уравнения Эйлера (23) для первого состояния на половину вектора скорости смещений второго состояния. Результат проинтегрируем по некоторому объёму Ω. После преобразований, аналогичных проведённым при выводе интегрального закона сохранения энергии, получим

$$\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left\{-i\,\omega\rho_0\left(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\right) + \operatorname{div}\{P_1\mathbf{V}_2\} - \frac{i\omega}{K}P_1P_2\right\}d\Omega = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\rho_0\left(\mathbf{F}_1, \mathbf{V}_2\right)d\Omega. \tag{26}$$

Поменяем в (26) состояния ролями и рассмотрим разность полученных уравнений:

$$\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\rho_0\left(\mathbf{F}_1, \mathbf{V}_2\right)d\Omega - \frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}P_1V_{2n}dS = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\rho_0\left(\mathbf{F}_2, \mathbf{V}_1\right)d\Omega - \frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}P_2V_{1n}dS \tag{27}$$

Вещественная часть полученного равенства выражает физический принцип взаимности: взаимные мощности, развиваемые силами одного состояния на сопряжённых перемещениях другого состояния, равны друг другу. Если поделить все члены уравнения (27) на $-i\omega$ и вычислить вещественную часть результата, то вновь полученное выражение можно интерпретировать как равенство взаимных работ. Однако и полное равенство (27) представляет интерес: его можно назвать принципом взаимности в комплексной форме.

5. Плоская гармоническая волна

Для того чтобы уяснить роль гравитационной поправки, полезно рассмотреть, как она проявляет себя при описании простейших волновых процессов. Начнём с плоской гармонической волны.

Положим стороннюю силу отсутствующей и рассмотрим вместо (24) соответствующее однородное уравнение:

$$\Delta P + k^2 P - \frac{g}{c^2}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{28}$$

Стандартной заменой

$$P = Q\exp\left(\frac{g}{2c^2}z\right) \tag{29}$$

приведём уравнение (28) к каноническому виду, освободившись в нём от первой производной. Это даст для величины Q уравнение Гельмгольца

$$\Delta Q + \left(k^2 - \frac{g^2}{4c^4}\right)Q = 0\,.$$

Рассмотрим решения типа плоской волны для этого уравнения: $Q = A\exp\left[i\left(\mathbf{k}_1,\mathbf{x}\right)\right]$, где $\mathbf{k}_1$ — волновой вектор, длина которого k_1 вычисляется по формуле

$$k_1^{\,2} = \left\|\mathbf{k}_1\right\|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{g^2}{4c^4}\,. \tag{30}$$

Для уравнения (28) соответствующее решение представляет собой плоскую волну, амплитуда которой экспоненциально растёт с глубиной:

$$P = A\exp\left[\frac{g}{2c^2}z + i\left(\mathbf{k}_1,\mathbf{x}\right)\right]. \tag{31}$$

При отсутствии гравитационной поправки, несмотря на барометрическую зависимость модуля объёмного сжатия и плотности от высоты, получим привычную запись для плоской гармонической волны вида:

$$P = A\exp\left\{i\left(\mathbf{k},\mathbf{x}\right)\right\}, \tag{32}$$

куда входит стандартный волновой вектор $\mathbf{k}$, направленный в сторону распространения плоской волны. Длина его равна волновому числу k : $\left\|\mathbf{k}\right\| = k$.

Представления (31) и (32) (а в соответствии с ними, и исходные модельные уравнения) существенно различны. Плоская волна (32) имеет в направлении своего распространения, задаваемом вектором $\mathbf{k}$, фазовую скорость, не зависящую от частоты и равную скорости звука c. Таким образом, несмотря на гравитационное уменьшение плотности с высотой, в данной модели отсутствует дисперсия. Решение (31) уравнения (28) изображает волну, фазовая скорость c_{ph} которой в направлении её распространения (оно задаётся соответственно вектором $\mathbf{k}_1$) зависит от частоты:

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{4c^2\omega^2}}}. \tag{33}$$

При этом учёт гравитационной поправки приводит к образованию в среде частоты отсечки $\omega_0 = \frac{g}{2c}$, ниже которой распространение волн невозможно, так как волна из распространяющейся превращается в локализованную. Для воздуха этой частоте соответствует период колебания $T \approx 7$ мин. Второй особенностью решения (31) является экспоненциальный рост давления с глубиной, или, условно говоря, плоская волна становится неоднородной. Для вектора скорости смещений имеет место обратное свойство — его длина экспоненциально убывает с глубиной:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{i\omega\rho_0}\left(\operatorname{grad} P - \frac{g}{c^2}P\mathbf{e}_z\right) = \frac{A}{\rho_0(0)\omega}\left(\mathbf{k}_1 + \frac{ig}{2c^2}\mathbf{e}_z\right)\exp\left\{-\frac{gz}{2c^2} + i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x})\right\}. \tag{34}$$

Такое «встречное» изменение амплитуд давления и скорости с высотой отличает эту волну от обычных неоднородных волн, которые известны при отсутствии гравитационной анизотропии. В неоднородных волнах для изотропной среды нарастания амплитуд давления и скорости происходят в одном направлении.

Согласно формуле (34), вектор скорости смещений имеет две составляющих. Одна из них направлена по вектору $\mathbf{k}_1$, другая является вертикальной. При учёте сдвига по фазе между движениями в этих направлениях траектории частиц среды представляют собой, вообще говоря, эллипсы. По отрезкам прямых частицы среды движутся лишь при вертикальном направлении распространения волны.

Теперь рассмотрим энергетические свойства плоских волн в среде с гравитационной анизотропией. Вычислим среднее значение вектора плотности потока энергии

$$\langle \boldsymbol{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re} P\bar{\mathbf{V}} = \frac{|A|^2}{2\omega\rho_0(0)}\mathbf{k}_1.$$

Перенос энергии, как это и следовало ожидать, направлен по вектору $\mathbf{k}_1$. При этом величина потока энергии не зависит от вертикальной координаты. Последнее утверждение основано на том, что рост акустического давления с глубиной сопровождается соответственным убыванием скорости смещений среды. Средние плотности кинетической и потенциальной энергий в плоской волне также не меняются с глубиной и равны друг другу по величине:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{4}\rho\|\mathbf{V}\|^2 = \frac{|A|^2}{4\rho_0(0)c^2}, \qquad \langle \varepsilon_p \rangle = \frac{|P|^2}{4K} = \frac{|A|^2}{4\rho_0(0)c^2}.$$

На основании трёх последних выражений для средних энергетических характеристик найдём вектор скорости переноса энергии $\mathbf{c}_\varepsilon$:

$$\mathbf{c}_\varepsilon = \frac{\langle \boldsymbol{\pi} \rangle}{\langle \varepsilon_k \rangle + \langle \varepsilon_p \rangle} = c\frac{\mathbf{k}_1}{k} = c\mathbf{e}_{k_1}\sqrt{1-\frac{g^2}{4c^2\omega^2}} ,$$

где $\mathbf{e}_{k_1}$ — единичный вектор, имеющий направление волнового вектора $\mathbf{k}_1$

Скорость переноса энергии в направлении распространения плоской волны совпадет с групповой скоростью:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_1} = c\sqrt{1-\frac{g^2}{4c^2\omega^2}} .$$

Волновое сопротивление Z плоской волны в направлении её распространения комплексно

$$Z = \frac{P}{\left(\mathbf{V}, \mathbf{e}_{k_1}\right)} = \frac{\omega\rho(0)}{k_1 + \dfrac{ig}{2c^2}\left(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{k_1}\right)} \exp\left(\frac{gz}{c^2}\right)$$

и по модулю экспоненциально нарастает с глубиной. Поэтому звучащий объект лучше слышим для наблюдателя, находящегося под ним, чем для наблюдателя, расположенного сверху.

6. Сферическая гармоническая волна

Рассмотрим теперь поле сосредоточенного гармонического источника в описанной простейшей модели. Имеем неоднородное уравнение:

$$\Delta P - \frac{g}{c^2}\frac{\partial P}{\partial z} + k^2 P = -A\delta(x)\delta(y)\delta(z) . \qquad (35)$$

После использованной выше замены (29) оно сводится к неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta Q + \left(k^2 - \frac{g^2}{4c^4}\right)Q = -A\delta(x)\delta(y)\delta(z) ,$$

фундаментальное решение которого имеет вид:

$$Q = \frac{A}{4\pi r}\exp\left(ir\sqrt{k^2 - \frac{g^2}{4c^4}}\right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В результате для сферической волны в гравитационно стратифицированном газе получаем следующее выражение:

$$P=\frac{A}{4\pi r}\exp\left(\frac{g}{2c^2}z+ir\sqrt{k^2-\frac{g^2}{4c^4}}\right). \tag{36}$$

Как и в случае плоской волны, поле давлений экспоненциально нарастает с глубиной, а скорость смещений — в обратном направлении:

$$V_r=\frac{A}{4\pi\rho_0(0)cr}\left(k_1+\frac{i}{r}+\frac{ig(\mathbf{e}_z,\mathbf{e}_r)}{2c^2}\right)\exp\left(-\frac{gz}{2c^2}+ik_1r\right).$$

Теперь вычислим усреднённый полный поток энергии $\langle\Pi\rangle$ через сферу $\partial U_R(0,0,0)$ радиуса R, окружающую источник:

$$\langle\Pi\rangle=\iint\limits_{\partial U_R(0,0,0)}\langle\pi_r\rangle dS.$$

Для усреднённой (за период колебания) радиальной составляющей вектора плотности потока энергии $\langle\boldsymbol{\pi}\rangle$ имеем

$$\langle\pi_r\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{Re}P\overline{V}_r=|A|^2\frac{k_1}{32\pi^2\rho_0(0)cr^2}.$$

Несмотря на гравитационную анизотропию, эта величина не зависит ни от угловых координат, ни от высоты. Выполняя интегрирование, придём к окончательному результату

$$\langle\Pi\rangle=|A|^2\frac{k_1}{8\pi\omega\rho_0(0)}=\frac{|A|^2}{8\pi\omega\rho_0(0)}\sqrt{k^2-\frac{g^2}{4c^4}}=\frac{|A|^2}{8\pi\rho_0(0)c}\sqrt{1-\frac{g^2}{4\omega^2c^2}}. \tag{37}$$

Подобно тому, как это имело место для плоской волны, интенсивность среднего потока энергии для сферической волны (при заданной её амплитуде A) зависит от частоты и уменьшается при приближении к частоте отсечки. Для более низких частот излучение энергии отсутствует.

Формула (37) показывает, что усреднённый полный поток энергии, исходящий из сосредоточенного источника, не зависит от радиуса сферы, через которую он вычисляется. Этот факт является прямым следствием закона сохранения энергии. Формально, как и прежде, он связан с тем, что по мере экспоненциального роста акустического давления в направлении силы тяжести происходит подобное же уменьшение скорости движения среды. При вычислении переноса энергии оба явления компенсируют друг друга. Но заметим, что если использовать обычное уравнение Гельмгольца

$$\Delta P+k^2P=-A\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

и одновременно с этим полагать барометрическую зависимость плотности и модуля объёмного сжатия от высоты, то такая компенсация будет отсутствовать. Очевидной причиной этого является энергетическая незамкнутость традиционной модели при наличии силы тяжести.

Поскольку исходное уравнение (35) не содержит переменных коэффициентов, поле давления, создаваемое произвольно расположенным сосредоточенным источником, можно найти простым сдвигом декартовых координат

$$P(\mathbf{x},\mathbf{x}_1)=\frac{A}{4\pi r_1}\exp\left\{\frac{g(z-z_1)}{c^2}+ik_1r_1\right\},$$

где $r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$. Таким образом, $P(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\neq P(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)$ и функция Грина уравнения (35) несимметрична (это вызвано наличием первой производной в уравнении (35)). Однако в рассматриваемой модели имеет место физический принцип взаимности. Кажущееся противоречие вызвано тем, что в зависимости от аппликаты местоположения источника поля исходное уравнение

$$\Delta P-\frac{g}{c^2}\frac{\partial P}{\partial z}+k^2P=-A\delta(x-x_1)\delta(y-y_1)\delta(z-z_1)$$

задаёт различные по интенсивности источники. Если провести соответствующее нормирование источников так, чтобы их интенсивность стала одинаковой, выполнение физического принципа взаимности станет очевидным. Для этого последнему уравнению придадим вид

$$\Delta P-\frac{g}{c^2}\frac{\partial P}{\partial z}+k^2P=-A\rho_0(z)\delta(z-z_1)\delta(y-y_1)\delta(z-z_1).$$

7. Фундаментальное решение нестационарного волнового уравнения

Обратимся к случаю нестационарного возбуждения сферической волны. Будем искать решение неоднородного волнового уравнения (21) для мгновенного сосредоточенного возбуждения

$$\Delta p-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{g}{c^2}\frac{\partial p}{\partial z}=-A\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t). \tag{38}$$

До включения источника предположим, что поле отсутствует: $t<0\Rightarrow p=0$. Заменой (29) приведём уравнение (38) к каноническому виду

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+\Delta q-\frac{g^2}{4c^4}q=-A\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t).$$

Это — уравнение Клейна–Гордона. Его фундаментальное решение содержит два слагаемых [3]:

$$q=A\frac{c}{4\pi r}\delta(ct-r)-A\frac{g}{8\pi c\sqrt{c^2t^2-r^2}}J_1\left(\frac{g\sqrt{c^2t^2-r^2}}{2c^2}\right)\vartheta(ct-r),$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя, а $\vartheta(x)$ — функция Хэвисайда («включённая единица»). Для давления, возбуждённого мгновенным сосредоточенным источником, имеем следующее представление:

$$p = A\exp\left(\frac{gz}{2c^2}\right)\left\{\frac{c}{4\pi r}\delta(ct-r) - \frac{g}{8\pi c\sqrt{c^2t^2-r^2}}J_1\left(\frac{g}{2c^2}\sqrt{c^2t^2-r^2}\right)\vartheta(ct-r)\right\}. \qquad (39)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (39), если отвлечься от экспоненциального множителя, задающего зависимость поля от аппликаты, идентично фундаментальному решению волнового уравнения в изотропной среде. Оно представляет процесс, который в точке наблюдения мгновенно включается и выключается при приходе возмущения. Для воздействия, имеющего некоторую фиксированную длительность, он включался бы при приходе волны и отключался бы при её уходе. Второе слагаемое задаёт «послезвук», то есть процесс, который включается при приходе поля мгновенного источника, а потом постепенно затухает после его ухода.

Асимптотика представления (39) при фиксированном значении радиуса для больших величин времени имеет вид:

$$p \approx \frac{A}{4\pi ct}\sqrt{\frac{g}{\pi ct}}\exp\left(\frac{gz}{2c^2}\right)\cos\left(\frac{gt}{2c} - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Таким образом, амплитуда поля мгновенного сосредоточенного источника убывает с течением времени степенным образом, а сам процесс релаксации имеет колебательный характер. При этом частота колебаний равна частоте отсечки.

8. Заключение

На простейшей модели (изотермические движения идеального газа в постоянном поле тяжести) продемонстрированы эффекты, вызванные наличием силы тяжести. Назовём основные из них.

1. В плоской волне акустическое давление и скорость смещения среды при изменении высоты точки наблюдения меняются встречным образом.
2. В плоской волне траектории движения частиц среды являются эллиптическими.
3. Акустическая волна в такой среде обладает частотной дисперсией.
4. Существует частота отсечки, ниже которой гармонические процессы не могут распространяться.
5. В неограниченной среде после прохождения волны, возбуждённой источником конечной длительности, в точке наблюдения остаётся «послезвук», который затухает постепенно.

Очевидно, что избранная простейшая модель условна, поскольку в основном частотном диапазоне распространение звуковых волн не является изотермическим. Однако и другие баротропные модели также имеют, как показано выше, не меньшую условность, поскольку барометрическое распределение плотности и атмосферного давления с высотой предполагает, что газ в состоянии равновесия изотермичен. Поэтому наиболее оправданным был бы учёт как термоупругости, так и теплопроводности газа, однако это привело бы к существенному усложнению модели процесса. Одновременно следует учитывать вязкость газа, поскольку как теплопроводность, так и вязкость имеют для газов общие физические корни и одинаковый порядок значений. Можно, однако, ожидать, что основные явления, которые обнаружены в рассмотренной простейшей модели, тем или иным способом проявят себя и в других моделях, более сложных и адекватных.

Гравитационная поправка может быть опущена при наличии двух условий:

$$h \ll c^2 / g, \qquad \omega \gg g/c. \tag{40}$$

Первое из названных ограничений (геометрическое) указывает на то, что высота столба газа h должна быть такой, чтобы в пределах модели не происходило заметного гравитационного изменения плотности среды. Нарушения этого условия могут быть вызваны как протяжённостью модели в направлении силы тяжести, так и большим значением этой силы. Последняя может быть искусственного (быстро вращающаяся центрифуга) и естественного (космические объекты) происхождения. Это ограничение известно [2].

Второе ограничение накладывается на частотный интервал и, по-видимому, ранее не отмечалось. Оно устанавливает, что традиционные уравнения акустики можно использовать для описания процессов, частоты которых существенно больше гравитационной частоты отсечки. При описании процессов с большим периодом (например, суточным — для приливных волн в атмосфере) учёт гравитационной поправки для волнового уравнения является необходимым. В частности, отсутствие приливных резонансных явлений в атмосфере объясняется, по-видимому, именно наличием названной частоты отсечки.

Следует также обратить внимание на одно примечательное обстоятельство: несмотря на гравитационный рост плотности с глубиной, в рассмотренной модели не наблюдаются внутренние волны, которые известны, например, для слоистой несжимаемой жидкости в поле тяжести. По-видимому, этот факт имеет следующее объяснение. В нашем случае при квазистатическом вертикальном смещении одного элемента среды относительно другого не возникает сила, возвращающая первый элемент на прежнее место. Поднявшийся элемент среды расширяется, в результате чего система остаётся в равновесии. Можно предположить, что внутренние волны характерны лишь для сред, в которых увеличение плотности с глубиной не связано с гравитационным уплотнением среды, а имеет другое происхождение. Например, для морской воды — это изменения температуры или солёности.

Настоящая работа продолжает тему, рассмотрение которой начато в публикации автора [4].

Автор признателен Д.А. Индейцеву, П.А. Жилину и И.Н. Солдатову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 736с.
2. *Ерофеев В.И.*, *Солдатов И.Н.* Волны в жидкостях и газах: Краткий курс лекций. – Нижний Новгород: Интелсервис, 2001. – 84с.
3. *Владимиров В.И.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 528с.
4. *Коузов Д.П.* Gravitational correction to acoustical equations // Proceedings of the XXXIII summer School «Advanced problems in mechanics. APM'2005», (St. Petersburg, June 28 – July 5, 2005). – 2005. – P. 373-382.