

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ В ТЕРМИНАХ ГЛАВНЫХ УДЛИНЕНИЙ

А.И. Голованов

*Казанский государственный университет, Казань, 420008, Россия*

Предлагается вычислительная технология расчета гиперупругих тел при конечных деформациях. В качестве рабочего базиса выбираются главные оси левого тензора искажения. В терминах главных удлинений построены все соотношения, необходимые для постановки задачи и ее решения методом конечных элементов. Приводятся числовые примеры.

## FINITE ELEMENT ANALYSIS OF LARGE DEFORMATIONS OF HYPERELASTIC SOLIDS IN PRINCIPAL AXES

A.I. Golovanov

*Kazan State University, Kazan, 420008, Russia*

The computing technology of analysis of hyperelastic solids in the finite strain regime is offered. As a working basis, the principal axes of the left stretch tensor are chosen. All relations necessary for finite–element formulation of the problem and its solution are constructed in terms of the principal stretches. Numerical examples are presented.

### 1. Введение

Развитие нелинейной механики деформируемого твердого тела и создание численных методик решения соответствующих задач представляет одно из актуальных направлений современной механики. Важным звеном в этом направлении является адекватное моделирование конечных деформаций трехмерных тел в условиях термосилового воздействия. В настоящее время имеется большое количество вычислительных стратегий решения таких задач для нелинейно-упругих, упругопластических, вязкоупругих и других сред, отличающихся между собой выбором в качестве «рабочих инструментов» тех или иных тензоров, описывающих кинематику процесса. Используются тензоры деформаций (Коши–Грина и Альманси), меры деформаций (Коши–Грина, Фингера, Альманси), тензоры искажения, логарифмические меры деформаций и так далее.

Особое место занимают методики, основанные на явных вычислениях главных значений и главных направлений тензоров искажения. К достоинствам таких подходов можно отнести следующее: во-первых, появляется возможность с единых позиций определить все тензоры конечных деформаций; во-вторых, достаточно легко строить сопряженные тензоры напряжений; в-третьих, определяющие уравнения, полученные из уравнений термодинамики, имеют скалярный вид; в-четвертых, значения истинных удлинений позволяют точно судить о степени нелинейности процесса деформирования. К сожалению, следует признать, что чаще всего представление тензоров деформаций и

напряжений в разложении по главным материальным и пространственным базисам используются при теоретических исследованиях. Вычислительных технологий решения задач практически нет.

В настоящей работе предлагается вариант постановки и решения трехмерных задач о больших деформациях гиперупругих тел в терминах главных удлинений. Во втором разделе дается краткая информация о кинематике конечных деформаций и произвольных течений. Приводятся выражения основных тензоров и их производных по времени (включая объективные производные) в различных базисах, в том числе и в главных базисах правого и левого тензоров искажения. Третий раздел посвящен описанию техники построения сопряженных по мощности тензоров напряжений при материальном и пространственном их представлении. Из уравнений термодинамики для изотермического процесса получены определяющие соотношения при задании свободной энергии в виде функции от главных удлинений. В четвертом разделе строится линеаризованное вариационное уравнение принципа виртуальных мощностей, которое является базовым при реализации метода последовательных нагружений и организации итерационного процесса Ньютона на шаге нагружения. Пятый раздел содержит основные соотношения, необходимые при конечно-элементной реализации решения сформулированной задачи с использованием изопараметрических аппроксимаций. Прописываются выражения основных подынтегральных слагаемых через узловые скорости и их вариации. В шестом разделе приводятся два числовых примера, иллюстрирующих работоспособность предложенного подхода при решении задач о деформировании высокоэластичных тел.

## 2. Кинематика конечных деформаций

Воспользуемся тензорной формой изложения, принятой в работах [1–5]. Пусть в исходной конфигурации имеем радиус-вектор материальной точки в виде  $\mathbf{R} = X^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i$ , где  $\mathbf{e}_i$  — орты декартовой системы координат, относительно которой исследуется процесс деформирования,  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  — криволинейные лагранжевы координаты. В этой конфигурации определим основной и сопряженный базисы

$\mathbf{R}_k = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{R}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i} \mathbf{e}_i$  и метрический тензор

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j = G^{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j = \mathbf{R}^i \mathbf{R}_i = \widehat{G}^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (1)$$

где  $G_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j$ ,  $G^{ij} = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j$ ,  $\widehat{G}^{ij} = G^{mn} \frac{\partial X^i}{\partial \xi^m} \frac{\partial X^j}{\partial \xi^n}$ .

Отметим справедливость зависимости

$$\frac{\partial}{\partial X^i} = \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \epsilon_{mni} \epsilon^{jlk} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^n}{\partial \xi^l} \frac{\partial}{\partial \xi^k}.$$

Здесь  $\epsilon_{imn}, \epsilon^{jlr}$  — символы Леви–Чивита,  $G = \det |G_{ij}|$ .

Подобным же образом в актуальном состоянии установим радиус-вектор материальной точки  $\mathbf{r} = x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i$ ; вектор скорости движения (приращения

перемещений) этой материальной точки  $\mathbf{v} = \dot{x}^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i = v^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i$ ; основной и сопряженный базисы  $\mathbf{r}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{r}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \mathbf{e}_i$ ; метрический тензор

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = g^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \hat{g}^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (2)$$

где  $g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$ ,  $g^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j$ ,  $\hat{g}^{ij} = g^{mn} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^m} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^n}$ .

Также справедливо

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon_{mni} \epsilon^{jlk} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^l} \frac{\partial}{\partial \xi^k}.$$

Введем тензор градиента деформации

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_i \mathbf{R}^i = g_{ki} \mathbf{r}^k \mathbf{R}^i = G^{ki} \mathbf{r}_i \mathbf{R}_k = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (3)$$

который характеризует изменение элементарного отрезка при деформации и с помощью которого можно вычислить производные по актуальному состоянию через производные по исходной конфигурации, то есть

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \det^{-1} \left| \frac{\partial x^t}{\partial X^s} \right| \epsilon_{imn} \epsilon_{jkl} \frac{\partial x^m}{\partial X^k} \frac{\partial x^n}{\partial X^l} \frac{\partial}{\partial X^j},$$

где  $\det \left| \frac{\partial x^t}{\partial X^s} \right| = \sqrt{\frac{g}{G}}$ .

Полярное разложение тензора (3) определяет правый и левый тензоры искажения

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad (4)$$

при этом  $\mathbf{R}$  — ортогональный тензор, характеризующий вращение элементарного объема как твердого целого. Справедливо представление этих тензоров в виде разложений по главным направлениям [1, 2, 5]:

$$\mathbf{U} = \sum_i U_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i, \quad \mathbf{V} = \sum_i V_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i, \quad (5)$$

где  $V_i = U_i = \lambda_i$ ,  $\mathbf{b}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}_i$ ,  $\lambda_i$  есть относительные удлинения материальных волокон, ориентированных вдоль главных направлений  $\mathbf{c}_i$ ,  $\mathbf{b}_i$ .

Широкое распространение получило представление тензоров деформации с помощью операторов проецирования [6–17]

$$\mathbf{P}_i^L = \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i = \frac{(g_{mn} - \lambda_j^2 G_{mn}) G^{nl} (g_{lt} - \lambda_k^2 G_{lt})}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} \mathbf{R}^m \mathbf{R}^t, \quad i \neq j \neq k, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_i^E = \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i = \frac{(G^{mn} - \lambda_j^2 g^{mn}) g_{nl} (G^{lt} - \lambda_k^2 g^{lt})}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} \mathbf{r}_m \mathbf{r}_t, \quad i \neq j \neq k, \quad (7)$$

которые связаны между собой соотношением

$$\mathbf{P}_i^E = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_i^L \cdot \mathbf{R}^T.$$

На их основе вводится группа инвариантных тензоров, которые называют материальными (лагранжевыми) тензорами деформаций

$$\mathbf{E}^f = \sum_i f(\lambda_i) \mathbf{P}_i^L = E_{ij}^f \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j = E_f^{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j, \quad (8)$$

и группа индифферентных тензоров, которые называют пространственными (эйлеровыми)

$$\mathbf{A}^f = \sum_i f(\lambda_i) \mathbf{P}_i^E = A_{ij}^f \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = A_f^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j. \quad (9)$$

В зависимости от вида скалярной функции  $f(\lambda_i)$  соответствующий тензор совпадает с тем или иным известным тензором, используемым для описания конечных деформаций сплошной среды. Например:

- при  $f(\lambda_i) = \lambda_i$  имеем  $\mathbf{E}^f = \mathbf{U}$  и  $\mathbf{A}^f = \mathbf{V}$ , то есть тензоры (8), (9) есть правый и левый тензоры искажения (4), (5);
- при  $f(\lambda_i) = \lambda_i^2$  получается тензор  $\mathbf{E}^f = \mathbf{C}$ , называемый правым тензором Коши–Грина (мера деформации Коши–Грина), для которого справедливо представление

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = g_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j = \sum_m \frac{\partial x^m}{\partial X^i} \frac{\partial x^m}{\partial X^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (10)$$

и тензор  $\mathbf{A}^f = \mathbf{B}$ , называемый левым тензором Коши–Грина (мера деформации Фингера), для которого справедливы выражения

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = G^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = \sum_m \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \frac{\partial x^j}{\partial X^m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j; \quad (11)$$

- при  $f(\lambda_i) = \ln \lambda_i$  из (8), (9) следует, что  $\mathbf{E}^f = \ln \mathbf{U}$  и  $\mathbf{A}^f = \ln \mathbf{V}$ ; эти тензоры называют правым и левым тензорами логарифмических деформаций.

Базовым тензором, характеризующим скорость течения среды, является тензор пространственного градиента скорости

$$\mathbf{h} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{v}_i \mathbf{r}^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (12)$$

где  $\mathbf{v}_k = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i$ .

Обычно используется его симметричная часть  $\mathbf{d}$  (тензор деформации скорости)

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} + \mathbf{h}^T] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right] \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_{i,j} d_{ij} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j \quad (13)$$

и антисимметричная —  $\boldsymbol{\omega}$  (тензор скорости вращения). Если ввести направляющие косинусы главных направлений  $\mathbf{b}_i = \sum_k b_{ik} \mathbf{e}_k$ , то получится:

$$d_{mn} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right] b_{mi} b_{nj} = \mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{b}_n \mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}. \quad (14)$$

Производные по времени от инвариантных материальных тензоров являются тензорами материальными и инвариантными. Наиболее просто они определяются в исходном базисе или в декартовой системе координат, то есть в виде

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{g}_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j = \sum_m \left[ \frac{\partial v^m}{\partial X^i} \frac{\partial x^m}{\partial X^j} + \frac{\partial x^m}{\partial X^i} \frac{\partial v^m}{\partial X^j} \right] \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

При использовании представления в виде (8) выражение для производной получается следующим:

$$\dot{\mathbf{E}}^f = \sum_i f'_\lambda \dot{\lambda}_i \mathbf{P}_i^L + \boldsymbol{\Omega}^U \cdot \mathbf{E}^f - \mathbf{E}^f \cdot \boldsymbol{\Omega}^U. \quad (15)$$

Сюда введен кососимметричный тензор скоростей вращения главных направлений лагранжевых тензоров [13]:

$$\boldsymbol{\Omega}^U = \sum_k \dot{\mathbf{c}}_k \mathbf{c}_k = \sum_{i \neq k} \frac{2\lambda_i \lambda_k}{\lambda_k^2 - \lambda_i^2} [\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{b}_k] \mathbf{c}_i \mathbf{c}_k = \mathbf{R}^T \cdot \left[ \sum_{i \neq k} \frac{2\lambda_i \lambda_k}{\lambda_k^2 - \lambda_i^2} \mathbf{P}_i^E \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{P}_k^E \right] \cdot \mathbf{R}.$$

Дифференцирование по времени пространственных тензоров — процедура более сложная. Главная причина этого заключается в том, что тензоры, получающиеся непосредственным дифференцированием по времени, являются тензорами необъективными. Поэтому вводятся обобщенные (объективные, коротационные) производные, которые уже являются тензорами индифферентными.

Приведем основные типы таких производных [6–9, 13, 14, 16, 19–21]:

- производная Яуманна

$$\mathfrak{R}^J \mathbf{A}^f = \dot{\mathbf{A}}^f - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}^f + \mathbf{A}^f \cdot \boldsymbol{\omega}; \quad (16)$$

- производная Грина–Нагди

$$\mathfrak{R}^G \mathbf{A}^f = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{E}}^f \cdot \mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{A}}^f - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}^f + \mathbf{A}^f \cdot \boldsymbol{\Omega},$$

где появляется кососимметричный тензор спина

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j + \lambda_i} \mathbf{P}_i^E \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{P}_j^E;$$

- логарифмическая производная

$$\mathfrak{R}^{\ln} \mathbf{A}^f = \dot{\mathbf{A}}^f - \boldsymbol{\Omega}^{\ln} \cdot \mathbf{A}^f + \mathbf{A}^f \cdot \boldsymbol{\Omega}^{\ln},$$

где появляется кососимметричный тензор

$$\boldsymbol{\Omega}^{\ln} = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i \neq j} \left[ \frac{\lambda_j^2 + \lambda_i^2}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} + \frac{1}{\ln \lambda_i - \ln \lambda_j} \right] \mathbf{P}_i^E \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{P}_j^E.$$

Эта производная вызывает интерес в связи со справедливостью соотношения:

$$\mathbf{d} = \mathfrak{R}^{\ln} \ln \mathbf{V},$$

то есть логарифмическая производная пространственного тензора деформаций Генки определяет тензор деформации скорости. Отсюда следует, что

$$\frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = \frac{d}{dt} \ln \lambda_i = d_{ii}; \quad (17)$$

- пространственная производная

$$\mathfrak{R}^V \mathbf{A}^f = \dot{\mathbf{A}}^f - \boldsymbol{\Omega}^V \cdot \mathbf{A}^f + \mathbf{A}^f \cdot \boldsymbol{\Omega}^V,$$

где фигурирует кососимметричный тензор скорости вращения ортов эйлеровых тензоров [13]

$$\boldsymbol{\Omega}^V = \sum_i \dot{\mathbf{b}}_i \mathbf{b}_i = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j^2 + \lambda_i^2}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} \mathbf{P}_i^E \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{P}_j^E. \quad (18)$$

В этом случае справедливо равенство

$$\mathfrak{R}^V \mathbf{A}^f = \sum_i f'_\lambda \dot{\lambda}_i \mathbf{P}_i^E,$$

то есть эта производная в собственном базисе имеет простейший вид.

### 3. Сопряженные тензоры напряжений, определяющие соотношения

Введем в рассмотрение удельную мощность внутренних сил, которую удобно использовать в двух формах. Первая предполагает отнесение ее к исходной конфигурации

$$\dot{W}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{S}^f \cdot \dot{\mathbf{E}}^f, \quad (19)$$

вторая — к актуальному состоянию

$$\dot{W} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma}^f \cdot \dot{\mathbf{A}}^f. \quad (20)$$

Здесь  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор истинных напряжений Коши–Эйлера,  $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$  — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа,  $J$  — относительное изменение объема.

Рассмотрим технологию построения сопряженных тензоров напряжений для скоростей деформаций в форме, представленной в предыдущем разделе. В разной степени общности этот вопрос рассмотрен в работах [13, 16–25].

Тензоры напряжений также представим в виде разложения по главным базисам материальных и пространственных тензоров деформаций, то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sum_{i,j} S_{ij} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_j, & \mathbf{S}^f &= \sum_{i,j} S_{ij}^f \mathbf{c}_i \mathbf{c}_j, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j, & \boldsymbol{\sigma}^f &= \sum_{i,j} \sigma_{ij}^f \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, из (19) следует

$$\begin{aligned} \dot{W}_0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{S}) \cdot (\dot{\mathbf{C}}) = \sum_{i,j} S_{ij} \left\{ \delta_{ij} \lambda_i \dot{\lambda}_i + \frac{1}{2} [\lambda_j^2 - \lambda_i^2] \Omega_{ij}^U \right\} = \\ &= \sum_i S_{ii} \lambda_i \frac{f'(\lambda_i)}{f'(\lambda_i)} \dot{\lambda}_i + \sum_{i \neq j} S_{ij} \left\{ \frac{1}{2} [\lambda_j^2 - \lambda_i^2] \frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)}{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)} \Omega_{ij}^U \right\} = \\ &= \sum_{i,j} S_{ij}^f \left\{ \delta_{ij} f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i + [f(\lambda_j) - f(\lambda_i)] \Omega_{ij}^U \right\} = \mathbf{S}^f \cdot \dot{\mathbf{E}}^f, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\mathbf{S}^f = \sum_i \frac{\lambda_i}{f'(\lambda_i)} [\mathbf{P}_i^L \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_i^L] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)} [\mathbf{P}_i^L \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_j^L].$$

Теперь рассмотрим удельную мощность, выраженную через пространственные тензоры. Определим производную по времени:

$$\dot{\mathbf{A}}^f = \sum_{i,j} \dot{A}_{ij}^f \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j,$$

где

$$\dot{A}_{ij}^f = \delta_{ij} f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i + [f(\lambda_j) - f(\lambda_i)] \Omega_{ij}^V.$$

Можно построить тензоры напряжений, сопряженные этим производным. Из равенства (20) следует:

$$\begin{aligned} \dot{W} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \left\{ \delta_{ij} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{2\lambda_i \lambda_j} \Omega_{ij}^U \right\} = \\ &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \left\{ \delta_{ij} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{\lambda_j^2 + \lambda_i^2} [\Omega_{ij}^V - \omega_{ij}] \right\} = \\ &= \sum_i \sigma_{ii} \frac{f'(\lambda_i)}{f'(\lambda_i)} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \left\{ \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{\lambda_j^2 + \lambda_i^2} \frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)}{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)} [\Omega_{ij}^V - \omega_{ij}] \right\} = \\ &= \sum_{i,j} \sigma_{ij}^f \left\{ \delta_{ij} f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i + [f(\lambda_j) - f(\lambda_i)] [\Omega_{ij}^V - \omega_{ij}] \right\} = \boldsymbol{\sigma}^f \cdot \mathfrak{R}^J \mathbf{A}^f, \end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}^f = \sum_i \frac{1}{\lambda_i f'(\lambda_i)} [\mathbf{P}_i^E \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_i^E] + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{\lambda_j^2 + \lambda_i^2} \frac{[\mathbf{P}_i^E \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_j^E]}{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)}.$$

Полученные результаты позволяют строить новые пары сопряженных тензоров напряжений и деформаций. Например, тензор напряжений, сопряженный с производной Яуманна (16) тензора логарифмической меры деформаций, имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma}^{\ln} = \sum_i [\mathbf{P}_i^E \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_i^E] + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{\lambda_j^2 + \lambda_i^2} \frac{[\mathbf{P}_i^E \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_j^E]}{\ln(\lambda_j) - \ln(\lambda_i)}.$$

Рассмотрим технологию построения определяющих соотношений для упругого изотермического деформирования. В этом случае определяющие уравнения получим из уравнения второго закона термодинамики [26–28], которое допускает представление

$$\rho_0 \dot{\Psi} - \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad (23)$$

или

$$\rho \dot{\Psi} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} = 0,$$

где  $\Psi$  — удельная свободная энергия, отнесенная к единице массы.

В качестве аргументов в выражении скалярной функции  $\Psi$  могут выступать компоненты тензоров деформации, инвариантных по отношению к жесткому вращению текущей конфигурации.

Для начально изотропного материала допускается задание функции свободной энергии в виде функции главных удлинений  $\lambda_i$ , то есть

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (24)$$

Подставляем в (23) выражение (22)

$$\rho_0 \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} \dot{\lambda}_i - \sum_i \frac{\lambda_i}{f'(\lambda_i)} S_{ii} f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)} S_{ij} [f(\lambda_j) - f(\lambda_i)] \Omega_{ij}^U = 0.$$

Отсюда получаем

$$S_{ii} = \rho_0 \lambda_i^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}, \quad S_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

то есть второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа соосен с тензором правой меры деформаций (всем материальным тензорам деформаций).

Для тензора истинных напряжений Коши–Эйлера получаем хорошо известное соотношение [17, 21, 24, 29]:

$$\sigma_{ii} = J^{-1} \lambda_i^2 S_{ii} = J^{-1} \rho_0 \lambda_i \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_i}. \quad (25)$$

Теоретические и экспериментальные результаты, позволяющие выбирать или строить функции свободной энергии (функционал упругой энергии) приведены в многочисленных работах (см., например, [2, 29–39]).

#### 4. Разрешающее вариационное уравнение в скоростях

Современные методики решения существенно нелинейных задач механики деформируемых тел предполагают использование различных методик сведения нелинейной задачи к последовательности линеаризованных задач. Для статики — это методы последовательных нагружений или «движение по параметру нагружения». В динамике получили распространение методы пошагового интегрирования. Рассмотрим вариант метода последовательных нагружений, в котором разрешающие уравнения строятся путем дифференцирования вариационного уравнения принципа виртуальных мощностей [4, 5].

Итак, исходное уравнение записываем в виде

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^\sigma} \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{v} dS.$$

Линеаризованное уравнение формально строится путем дифференцирования этого уравнения. Подробности вычисления приведены в [5, 40], поэтому приведем здесь лишь окончательное уравнение:

$$\int_V \left\{ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\delta \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \cdot \delta \mathbf{h}^T] + \frac{\dot{J}}{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} \right\} dV - \\ - \int_V \frac{\dot{J}}{J} \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^\sigma} \left[ \mathbf{t}_n^* \cdot \mathbf{h}^T - \frac{\dot{J}}{J} \mathbf{t}_n^* \right] \cdot \delta \mathbf{v} dS = \int_V \dot{\mathbf{f}}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^\sigma} \dot{\mathbf{t}}_n^* \cdot \delta \mathbf{v} dS, \quad (26)$$

где  $\frac{\dot{J}}{J} = \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$ . Неизвестной функцией здесь является вектор скорости  $\mathbf{v}$ , который имеет смысл приращения текущего значения радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Подобное уравнение используется в работах [41–43].

Покажем, что построенное уравнение тождественно совпадает с разрешающим уравнением модернизированной лагранжевой постановки [4, 5, 44–47]. Действительно,

$$\int_V \left\{ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} + \frac{\dot{J}}{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\delta \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \cdot \delta \mathbf{h}^T] \right\} dV = \\ = \int_V \left\{ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} + \frac{\dot{J}}{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\delta \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \cdot \delta \mathbf{h}] - [\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}] \cdot \cdot \delta \mathbf{d} - [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}^T] \cdot \cdot \delta \mathbf{d} \right\} dV = \\ = \int_V \left\{ (\boldsymbol{\sigma}^{\text{Tr}}) \cdot \cdot \delta \mathbf{d} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\delta \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \cdot \delta \mathbf{h}] \right\} dV.$$

Здесь фигурирует обобщенная производная Трусделла

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{Tr}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}^T + \frac{\dot{J}}{J} \boldsymbol{\sigma}.$$

Теперь рассмотрим технологию определения «скорости» изменения тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . Дифференцируя выражение (21), получим

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i,j} \dot{\sigma}_{ij} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \dot{\mathbf{b}}_i \mathbf{b}_j + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \mathbf{b}_i \dot{\mathbf{b}}_j = \sum_{i,j} \dot{\sigma}_{ij} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j + \boldsymbol{\Omega}^V \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}^V.$$

Из выражения для кососимметричного тензора скорости вращения ортов эйлеровых тензоров (18) следует справедливость выражения

$$\boldsymbol{\Omega}^V = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Lambda}^V \cdot \cdot \mathbf{d},$$

где обозначено

$$\boldsymbol{\Lambda}^V = \sum_{i \neq k} \frac{\lambda_k^2 + \lambda_i^2}{\lambda_k^2 - \lambda_i^2} [\mathbf{P}_k^E \mathbf{P}_i^E].$$

В работах [5, 40] показано, что

$$[\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}] \cdot \cdot \delta \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\delta \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \cdot \delta \mathbf{h}^T] = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \left\{ \frac{1}{2} \delta [\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{h}] - \delta [\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}] \right\}. \quad (27)$$

Также справедливо представление

$$\left\{ \left[ \Lambda^V \cdot \cdot \mathbf{d} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \cdot \delta \mathbf{d} - \left\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[ \Lambda^V \cdot \cdot \mathbf{d} \right] \right\} \cdot \delta \mathbf{d} = \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} - \delta \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \Lambda^V \cdot \cdot \mathbf{d}. \quad (28)$$

Для вычисления производных  $\dot{\sigma}_{ij}$  продифференцируем соотношения (25). С учетом выражений (7), (14), (17) получим:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ii} &= \left[ \dot{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_i} + \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ln \lambda_i \partial \ln \lambda_j} \frac{d}{dt} \ln \lambda_j \right] = \left[ \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ln \lambda_i \partial \ln \lambda_j} d_{jj} - \rho \frac{j}{J} \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_i} \right] = \\ &= \rho \sum_j \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ln \lambda_i \partial \ln \lambda_j} - \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_i} \right] \mathbf{P}_j^E \cdot \cdot \mathbf{d}. \end{aligned}$$

В результате будет справедливо выражение

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} = \rho \sum_{i,j} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ln \lambda_i \partial \ln \lambda_j} - \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_i} \right] \left\{ \mathbf{P}_j^E \cdot \cdot \mathbf{d} \right\} \left\{ \mathbf{P}_i^E \cdot \cdot \delta \mathbf{d} \right\}. \quad (29)$$

Общая стратегия вычислений представляет собой сочетание метода последовательных нагружений и итерационного процесса на шаге нагружения методом Ньютона. В каждой из этих методик необходимо строить линейризованный оператор. Поэтому вычисления по приведенным соотношениям производятся на каждом шаге нагружения и каждой итерации.

Пусть  $k$  — номер шага нагружения,  $l$  — номер итерации. Разрешающее уравнение, следующее из (26), можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\int_{^k V} \left\{ \Delta_l^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta_l^k \mathbf{d}_R + \left[ \mathbf{I} \cdot \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R \right]_l^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta_l^k \mathbf{d}_R - \frac{1}{2} {}^k_l \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \left[ \delta_l^k \mathbf{h}_R \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R + \Delta_l^k \mathbf{h}_R^T \cdot \delta_l^k \mathbf{h}_R^T \right] \right\} dV - \\ &- \int_{^k V} \left[ \mathbf{I} \cdot \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R \right]_l^k \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{^k S^\sigma} \left[ {}^k_l \mathbf{t}_n^* \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R^T - \left[ \mathbf{I} \cdot \cdot \Delta_l^k \mathbf{h}_R \right]_l^k \mathbf{t}_n^* \right] \cdot \delta \mathbf{v} dS = \\ &= \int_{^k V} {}^k_l \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{^k S^\sigma} {}^k_l \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_{^k V} {}^k_l \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta_l^k \mathbf{d}_R dV, \end{aligned}$$

куда введены аналоги тензоров (12), (13) с заменой вектора скорости на приращение радиус-вектора текущей конфигурации, то есть

$$\begin{aligned} \Delta_l^k \mathbf{h}_R &= \frac{\partial \Delta_l^k u^i}{\partial {}^k_l x^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, & \delta_l^k \mathbf{h}_R &= \frac{\partial \delta_l^k u^i}{\partial {}^k_l x^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \\ {}^k_{l+1} \mathbf{r} &= {}^k_{l+1} x^i \mathbf{e}_i = \left( {}^k_l x^i + \Delta_l^k u^i \right) \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Уравнение для определения приращений перемещений содержит векторы внешних нагрузок  ${}^k_l \mathbf{f}^*$ ,  ${}^k_l \mathbf{t}_n^*$ , которые зависят от номера итерации, что обусловлено наличием неконсервативных нагрузок. В случае консервативных внешних сил, значения и направления действия которых не зависят от текущей конфигурации, следует использовать  ${}^k \mathbf{f}^*$ ,  ${}^k \mathbf{t}_n^*$ .

По достижению необходимой точности, например, при  $l = L$ , считается, что  ${}^{k+1}_1 \mathbf{r} = {}^k_L \mathbf{r}$ , и продолжается процесс вычислений для следующего уровня значений внешних сил.

## 5. Конечно-элементная дискретизация

В соответствии с работой [40] введем внутри конечного элемента (КЭ) локальную систему координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , которая, по сути, является лагранжевой системой, введенной во втором разделе настоящей статьи. Поэтому воспользуемся полученными выше соотношениями для вычислений необходимых массивов в конечно-элементном алгоритме. Далее будем считать эти координаты безразмерными и удовлетворяющими внутри каждого КЭ выражению  $-1 \leq \xi^k \leq +1$ .

Введем изопараметрические аппроксимации геометрии в исходном и деформированном состояниях

$$\mathbf{R}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_k \mathbf{R}_{(k)} H_{(k)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

$$\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_k \mathbf{r}_{(k)} H_{(k)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

и неизвестного вектора скорости (приращения перемещений)

$$\mathbf{v}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_k \mathbf{v}_{(k)} H_{(k)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

Последовательно вычислим все необходимые тензоры в базисе декартовой системы  $\mathbf{e}_i$ : Базисные векторы, метрические тензоры (1), (2) примут вид:

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i = \sum_t X^i_{(t)} \frac{\partial H_{(t)}}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i = R^i_k \mathbf{e}_i,$$

$$G_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = \sum_m R^m_i R^m_j,$$

$$\mathbf{R}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i} \mathbf{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{G}} \epsilon_{mni} \epsilon^{jlk} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^n}{\partial \xi^l} \mathbf{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{G}} \epsilon_{mni} \epsilon^{jlk} R^m_j R^n_l \mathbf{e}_i = R^{ki} \mathbf{e}_i,$$

$$G^{ij} = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j = \sum_m R^{im} R^{jm}, \quad \hat{G}^{ij} = G^{mn} R^i_m R^j_n,$$

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i = \sum_t x^i_{(t)} \frac{\partial H_{(t)}}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i = r^i_k \mathbf{e}_i,$$

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \sum_m r^m_i r^m_j,$$

$$\mathbf{r}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \mathbf{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon_{mni} \epsilon^{jlk} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^l} \mathbf{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon_{mni} \epsilon^{jlk} r^m_j r^n_l \mathbf{e}_i = r^{ki} \mathbf{e}_i,$$

$$g^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j = \sum_m r^{im} r^{jm}, \quad \hat{g}^{ij} = g^{mn} r^i_m r^j_n;$$

Правый и левый тензоры Коши–Грина (10), (11) запишутся

$$\mathbf{C} = g_{ij} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j = g_{ij} R^{im} R^{jn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = C^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \quad (30)$$

$$\mathbf{B} = G^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = G^{ij} r_i^m r_j^n \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = B^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n. \quad (31)$$

Составим характеристическое уравнение

$$-\beta^3 + I_{1C} \beta^2 - I_{2C} \beta + I_{3C} = 0, \quad (32)$$

где используем инварианты либо тензора (30), либо (31). Как известно, они равны между собой. Решение уравнения (32) дает значения квадратов главных удлинений  $\beta_k = \lambda_k^2$

Построим операторы проецирования (6), (7)

$$\mathbf{P}_i^L = \frac{\sum_l (C^{ml} - \lambda_j^2 \delta^{ml})(C^{ln} - \lambda_k^2 \delta^{ln})}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = P_i^{L,mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \quad i \neq j \neq k,$$

$$\mathbf{P}_i^E = \frac{\sum_l (B^{ml} - \lambda_j^2 \delta^{ml})(B^{ln} - \lambda_k^2 \delta^{ln})}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = P_i^{E,mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \quad i \neq j \neq k.$$

Определим тензоры искажения (5)

$$\mathbf{U} = \sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i^L = U^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{V} = \sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i^E = V^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n,$$

правый и левый тензоры логарифмических деформаций

$$\ln \mathbf{U} = \sum_i \ln \lambda_i \mathbf{P}_i^L = H_U^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \quad \ln \mathbf{V} = \sum_i \ln \lambda_i \mathbf{P}_i^E = H_V^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n,$$

тензор напряжений (25)

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_i} \mathbf{P}_i^E = \tau^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n.$$

Для построения линеаризованного оператора введем в рассмотрение: тензор пространственного градиента скорости (12)

$$\mathbf{h} = \mathbf{v}_m \mathbf{r}^m = \sum_t \mathbf{v}_{(t)}^i \frac{\partial H_{(t)}}{\partial \xi^m} r^{mj} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_t H_{(t)}^j \mathbf{v}_{(t)}^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j;$$

тензор деформации скорости (13)

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} + \mathbf{h}^T] = \frac{1}{2} \sum_t [H_{(t)}^j \mathbf{v}_{(t)}^i + H_{(t)}^i \mathbf{v}_{(t)}^j] \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j;$$

тензор скорости поворота

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} - \mathbf{h}^T] = \frac{1}{2} \sum_t [H_{(t)}^j \mathbf{v}_{(t)}^i - H_{(t)}^i \mathbf{v}_{(t)}^j] \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

Затем определим свертки (учитывается симметрия тензора напряжений):

вариацию мощности

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} = \sum_t \left[ \sum_{i,j} \tau^{ij} H_{(t)}^j \delta \mathbf{v}_{(t)}^i \right];$$

выражение (27)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \delta [\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{h}] - \delta [\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}] \right\} = \\ = \sum_{k,m,n} \sum_{r,t} \tau^{mn} \left\{ \delta \mathbf{v}_{(t)}^k H_{(t)}^n H_{(r)}^m \mathbf{v}_{(r)}^k - \frac{1}{2} [\delta \mathbf{v}_{(t)}^k H_{(t)}^n + \delta \mathbf{v}_{(t)}^n H_{(t)}^k] [\mathbf{v}_{(r)}^k H_{(r)}^m + \mathbf{v}_{(r)}^m H_{(r)}^k] \right\}; \end{aligned}$$

выражение (28)

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} - \delta \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}] \cdot \boldsymbol{\Lambda}^V \cdot \mathbf{d} = \\ = \frac{1}{4} \sum_{k,l,n,p} \left\{ \sum_{i \neq j} \left[ \frac{\lambda_j^2 + \lambda_i^2}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} (P_i^{E,kp} P_j^{E,ns} \tau^{sl} - P_i^{E,ks} P_j^{E,nl} \tau^{sp}) \right] \right\} \times; \\ \times \sum_t [\mathbf{v}_{(t)}^k H_{(t)}^n + \mathbf{v}_{(t)}^n H_{(t)}^k] \times \sum_r [\delta \mathbf{v}_{(r)}^l H_{(r)}^p + \delta \mathbf{v}_{(r)}^p H_{(r)}^l] \end{aligned}$$

выражение (29)

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ln \lambda_i \partial \ln \lambda_j} d_{jj} - \frac{j}{J} \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_i} \right] \delta d_{ii} = \\ = \rho \sum_{m,n,i,j} \sum_{t,r} \delta \mathbf{v}_{(t)}^m H_{(t)}^n P_i^{E,mm} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ln \lambda_m \partial \ln \lambda_n} - \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_m} \right] P_j^{E,mm} H_{(r)}^n \mathbf{v}_{(r)}^n \right\}; \end{aligned}$$

третье слагаемое в левой части уравнения (26)

$$\frac{j}{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} = \sum_t \left[ \sum_{i,j} \tau^{ij} H_{(t)}^j \delta \mathbf{v}_{(t)}^i \right] \sum_{r,m} H_{(r)}^m \mathbf{v}_{(r)}^m.$$

Соответствующие интегралы по объему и поверхности вычисляются по квадратурным формулам Гаусса–Лежандра соответствующего порядка (для полилинейной аппроксимации достаточно использовать по две квадратурные точки в каждом направлении). Так как все вычисления проводятся в локальной безразмерной системе координат, то переход от интегрирования по реальному объему к интегрированию по «стандартной» безразмерной области производится с помощью соотношения  $dV = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ .

Отметим, что после сведения вариационной задачи к алгебраической, самостоятельно определяемой для каждой итерации каждого шага нагружения, получаем систему линейных уравнений с несимметричной матрицей. Степень разреженности этой матрицы и структура заполнения ненулевыми коэффициентами полностью соответствует матрицам, получающимся при применении метода конечных элементов. Эти обстоятельства необходимо учитывать при организации решения алгебраических уравнений.

## 6. Числовые примеры

Рассмотрим тестовую задачу об однородном растяжении квадратной пластины. В этом случае получаем одноосное напряженное состояние, которое с одинаковой точностью воспроизводится любым количеством конечных элементов. Примем модель материала, согласно которой потенциал упругой энергии и его производные по логарифмам главных удлинений имеют вид [20, 21, 25]:

$$\rho\Psi = \rho\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mu [\ln^2 \lambda_1 + \ln^2 \lambda_2 + \ln^2 \lambda_3] + \frac{\lambda}{2} [\ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3]^2, \quad (33)$$

$$\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_i} = 2\mu \ln \lambda_i + \lambda \sum_j \ln \lambda_j, \quad (34)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ляме, связанные с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  стандартным образом:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Отметим, что соотношение (34), определяющее значение напряжения (25), структурно совпадает с законом Гука для изотропных материалов.

Известно аналитическое решение этой задачи [20]. При  $\nu = 0$  суммарное усилие  $P$  с главным удлинением (пусть это будет  $\lambda_1$ ) связано соотношением

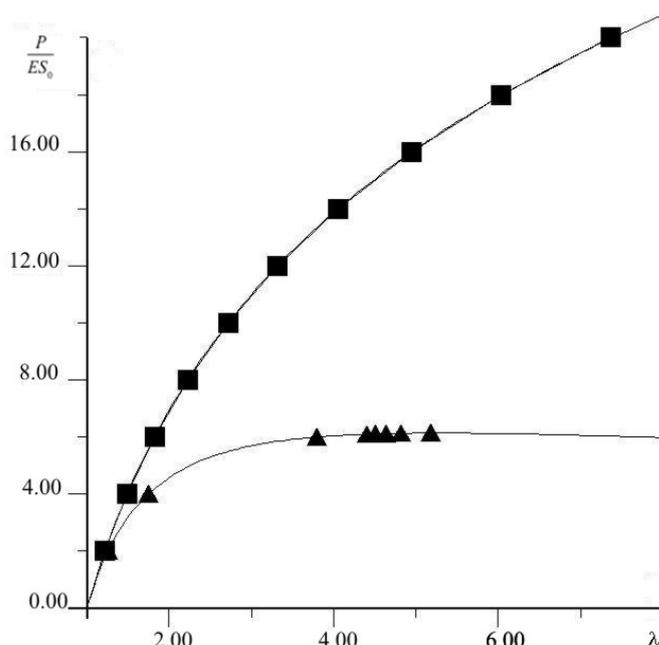
$$\frac{P}{ES_0} = \ln \lambda_1, \quad (35)$$

где  $S_0$  — площадь поперечного сечения в недеформированном состоянии. При ненулевом коэффициенте Пуассона решение имеет более сложный вид, а именно:

$$\frac{P}{ES_0} = \lambda_1^{-2\nu} \ln \lambda_1. \quad (36)$$

В этом случае решение имеет максимум по нагрузке. Например, при  $\nu = 0,3$  он наблюдается в точке с координатами  $\lambda_1 = 5,29$  и  $\frac{P}{ES_0} = 6,13$ .

На рисунке 1 представлены результаты численных экспериментов для двух значений коэффициента Пуассона, полученные при использовании четырех КЭ,



**Рис. 1.** Диаграммы деформирования растягиваемой пластины при нулевом коэффициенте Пуассона (■) и при  $\nu=0,3$  (▲); сплошные линии — соответствующие аналитические решения

построенных на основе 8-узловой полилинейной изопараметрической аппроксимации. Для сравнения представлены и соответствующие аналитические решения — кривые (35) и (36). Отметим, что точность решения не зависит от размеров сетки КЭ, так как напряженное состояние равномерно по всему объему. Один КЭ дает точно такой же результат.

Более сложной задачей было исследование цилиндрического изгиба шарнирно-опертой полосы под действием нормального к поверхности давления. Модель материала соответствует потенциалу (33), (34). Для экономии времени в расчете участвовала лишь половина полосы с наложением условий симметрии в срединном сечении. На правом краю задаются условия отсутствия вертикального смещения правого верхнего ребра. Для обеспечения плоско-напряженного состояния фиксируются смещения на одной из фронтальных граней. Также на правой плоскости задаются условия, что ее вертикальные смещения не превосходят по величине исходной толщины полосы. Расчетная область имеет размеры  $10 \times 2 \times 1$ , модуль упругости составляет  $E = 10^4$ , коэффициент Пуассона —  $\nu = 0,3$ . Давление прикладывается шагами  $\Delta q = 4$ . Расчеты проведены на двух сетках:  $10 \times 2 \times 1$  (КЭ) и  $80 \times 16 \times 1$  (с наложением условий плоской деформации).

На рисунке 2 изображено исходное состояние и четыре деформированных конфигурации, которые реализуются при значениях нагрузки  $q = 12, 40, 460, 880$ . Для сравнения точности расчетов в зависимости от числа КЭ на рисунке 3 для двух видов сетки изображены диаграммы величины внешнего давления как функции вертикального смещения нижней грани плоскости симметрии.

В качестве характеристики последней задачи отметим, что линейной она является лишь при нагрузках  $q \leq 1$ , то есть в самом начале деформирования. Далее начинает проявляться сначала геометрическая нелинейность, и затем физическая. При этом прогиб «бурно» нарастает на начальном этапе, когда наблюдается преимущественно изгибная

деформация. Затем «в работу вступает» деформация растяжения, и темп роста деформаций заметно уменьшается. Это наблюдается до того момента, пока полоса не превращается в сегмент круга с разверткой в  $180^\circ$  (для всей полосы). Далее происходит «раздувание» сегмента: увеличивается радиус и уменьшается толщина. После этого вновь наблюдается увеличение «скорости» роста перемещений за счет расширения площади действия давления и уменьшения жесткости. Ситуация становится аналогичной первой рассмотренной задаче с ненулевым коэффициентом Пуассона, то есть дополнительную нагрузку деформируемая система не воспринимает, и расчет методом последовательных нагружений становится невозможным.

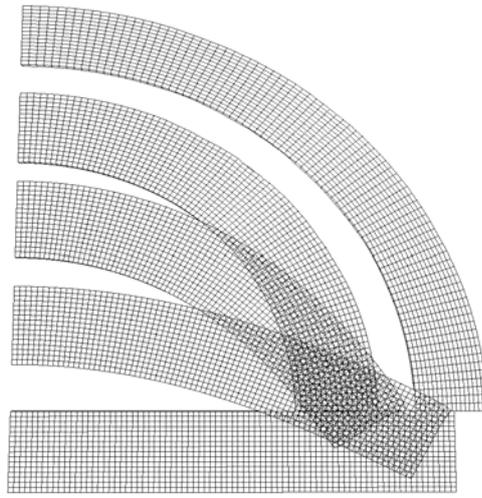


Рис. 2. Характерные конфигурации изгибаемой полосы (половина области)

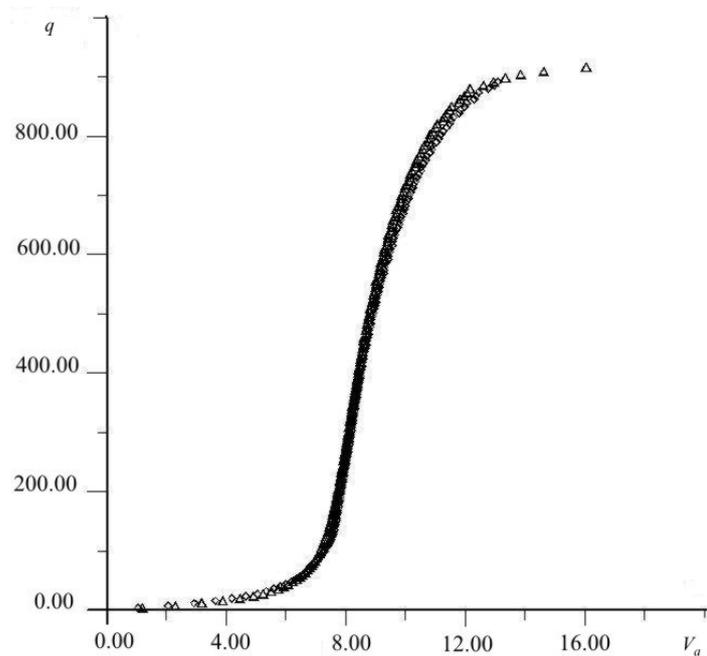


Рис. 3. Диаграммы деформирования изгибаемой полосы для различных сеток КЭ:  
 ( $\Delta$ ) –  $80 \times 16 \times 1$ , ( $\diamond$ ) –  $10 \times 2 \times 1$

## 7. Заключение

Предложенная методика решения задачи о конечных деформациях гиперупругих тел является работоспособной, дает хорошую точность на достаточно «грубых» сетках и может служить основой для создания соответствующей информационной системы. Некоторым недостатком можно считать повышенную трудоемкость формирования матриц жесткости конечных элементов, что, однако, компенсируется постоянным ростом мощности современной вычислительной техники.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00546).

## Литература

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512с.
2. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
3. Елисеев В.В. Механика упругих тел. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 341с.
4. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262с.
5. Голованов А.И., Султанов Л.У. Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Изд-во КГУ, 2008. – 165с.
6. Meyers A., Schiebe P., Bruhns O.T. Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates. // Acta Mech. – 2000. – V. 139. – P. 91-103.
7. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate. // Acta Mech. – 1997. – V. 124. – P. 89-105.
8. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. On objective corotational rates and their defining spin tensors. // Int. J. Solids Struct. – 1998. – V. 35. – P. 4001-4014.
9. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Strain rates and material spins. // J. Elasticity. – 1998. – V. 52. – P. 1-41.
10. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. A natural generalization of hypoelasticity and Eulerian rate type formulation of hyperelasticity. // J. Elasticity. – 1999. – V. 56. – P. 59-93.
11. Asghari M., Naghdabadi R., Sohrabpour S. Stresses conjugate to the Jaumann rate of Eulerian strain measures. // Acta. Mech. – 2007. – V. 190. – P. 45-56.
12. Asghari M., Naghdabadi R. On the objective corotational rates of Eulerian strain measures. // J. Elasticity. – 2008. – V. 90. – P. 175-207.
13. Lin R.C. Numerical study of consistency of rate constitutive equations with elasticity at finite deformation. // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2002. – V. 55. – P. 1053-1077.
14. Dui G.-S., Ren Q.-W., Shen Z. Time rates of Hill's strain tensors. // J. Elasticity. – 1999. – V. 54. – P. 129-140.
15. Dui G.-S., Ren Q.-W., Shen Z. Conjugate stress to Seth's strain class. // Mech. Res. Commun. – 2000. – V. 27. – P. 539-542.
16. Dui G.-S. Some based-free formulae for the time rate and conjugate stress of logarithmic strain tensor. // J. Elasticity. – 2006. – V. 83. – P. 113-151.
17. Fitzgerald J.E. A tensorial Henky measure of strain and strain rate for finite deformations. // J. Appl. Phys. – 1980. – V. 51. – P. 5111-5115.
18. Nicholson D.W. On stresses conjugate to Eulerian strains. // Acta Mech. – 2003. – V. 165. – P. 87-98.
19. Farahani K., Naghdabadi R. Basic free relations for the conjugate stress of the strains based on the right stretch tensor. // Int. J. Solids Struct. – 2003. – V. 40. – P. 5887-5900.
20. Farahani K., Bahai H. Hyper-elastic constitutive equations of conjugate stresses and strain tensors for the Seth-Hill strain measures. // Int. J. Eng. Science. – 2004. – V. 42. – P. 29-41.
21. Korobeynikov S.N. Objective tensor rates and applications in formulation of hyperelastic relations. // J. Elasticity. – 2008. – V. 93. – P. 105-140.
22. Dmitrienko Y.I. Novel viscoelastic models for elastomers under finites strains // Europ. J. Mech. A / Solids. – 2002. – V. 21. – P. 133-150.
23. Lehmann T., Guo Z.-H., Liang H. The conjugacy between Cauchy stress and logarithm of left stretch tensor. // Europ. J. Mech. A / Solids. – 1991. – V. 10. – P. 395-404.
24. Simo J.C., Taylor R.L. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum based and numerical algorithms. // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1991. – V. 85. – P. 273-310.

25. *Xiao H., Chen L.-S.* Hencky's logarithmic strain and dual stress-strain and strain-stress relations in isotropic finite hyperelasticity. // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – V. 40. – P. 1455-1463.
26. *Корнев С.А.* Термодинамически согласованные уравнения состояния нелинейной теории упругости. // *Изв. РАН. МТТ.* – 2003. – № 2. – С. 71-82.
27. *Мальков В.М.* Нелинейный закон упругости для тензора условных напряжений и градиента деформации. // *Изв. РАН. МТТ.* – 1998. – № 1. – С. 91-98.
28. *Bernstein B., Rajagopal K.* Thermodynamics of hypoelasticity. // *Z. Angew. Math. Phys.* – 2008. – V. 59. – P. 537-553.
29. *Criscone J.C., Humphrey J.D., Douglas A.S., Hunter W.C.* An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity. // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2000. – V. 48. – P. 2445-2465.
30. *Sharda S.C., Tschoegl N.W.* A strain energy density functions for compressible rubber-like materials. // *Trans. Soc. Rheol.* – 1976. – V. 20. – P. 361-372.
31. *Чернышов А.Д.* Простые определяющие уравнения для упругой среды при конечных деформациях // *Изв. РАН. МТТ.* – 1993. – № 1. – С. 75-81.
32. *Кузнецова В.Г., Роговой А.А.* Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // *Изв. РАН. МТТ.* – 1999. – № 4. – С. 64-76.
33. *Rogovoy A.* Effect of elastomer slight compressibility. // *Europ. J. Mech. A/Solids.* – 2001. – V.20. – P. 757-775.
34. *Murphy J.G., Rogerson G.A.* A method to model simple tension experiment using finite elasticity theory with an application to some polyurethane foams. // *Int. J. Eng. Scien.* – 2002. – V. 40. – P. 499-510.
35. *Hartmann S., Neff P.* Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – V. 40. – P. 2767-2791.
36. *Attard M.M., Hunt G.W.* Hyperelastic constitutive modeling under finite strain. // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – V. 41. – P. 5327-5350.
37. *Beda T.* Modeling hyperelastic behavior of rubber: A novel invariant-based and a review of constitutive models. // *J. Polym. Scien.:Part B: Polym. Phys.* – 2007. – V.45. – P. 1713-1732.
38. *Guo Z., Shyus L.J.* Constitutive modeling of hyperelastic rubber-like materials. // *HERON*– 2008. – V. 53. – P. 109-132.
39. *Sasso M., Palmieri G., Ghiappini G., Amodio D.* Characterization of hyperelastic rubber-like materials by biaxial and uniaxial stretching tests based on optical methods. // *Polym. Testing.* – 2008. – V. 27. – P. 995-1004.
40. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. – Казань: Изд-во «ДАС», 2001. – 301с.
41. *Nactegaal J. C., Rebelo N.* On the development of a general purpose finite element program for analysis of forming processes // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1988. – V. 25. – P. 113-131.
42. *Taylor L.M., Becher E.B.* Some computational aspect of large deformation, rate-dependent plasticity problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1983. – V. 41. – P. 251-277.
43. *Yamada Y.* Nonlinear matrices, their implication and applications in inelastic large deformation analysis // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1982. – V. 33. – P. 417-437.
44. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
45. *Kanok-Nukulchai W., Wong W.K.* Element-based Lagrangian formulation for large-deformation analysis. // *Comput. Struct.* – 1988. – V. 30. – P. 967-974.
46. *Kojic M., Bathe K.J.* Studies of finite element procedures – stress solution at a closed elastic strain path with stretching and shearing using updated Lagrangian Jaumann formulation. // *Comput. Struct.* – 1987. – V. 26. – P. 175-179.
47. *Peterson A., Peterson H.* On finite element analysis of geometrically nonlinear problems. // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1985. – V. 51. – P. 277-286.