

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Б.Е. Победря, А.С. Кравчук, П.А. Аризпе

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 119123, Россия*

Предложен метод идентификации теплофизических характеристик неоднородного материала и разработан алгоритм его численной реализации. В рамках этого подхода определяется пространственное распределение внутренних параметров (теплопроводности, теплоемкости) по известному тепловому потоку на границе области, занятой исследуемым материалом. Эффективность метода и алгоритма продемонстрированы на тестовой задаче.

## IDENTIFICATION OF THE COEFFICIENTS IN A NON-STATIONARY HEAT CONDUCTIVITY EQUATION

B.E. Pobedria, A.S. Kravchuk and P.A. Arizpe

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119123, Russia*

Method and numerical algorithm for identification of thermophysical properties of inhomogeneous material are proposed. In the context of the proposed approach, the space distribution of internal parameters (heat conduction, heat capacity) is defined from heat flux measurements at the domain boundary. The efficiency of the method and algorithm is illustrated by solving the test problem.

### 1. Введение

Термин «идентификация» в настоящей работе означает, что речь идет о решении задачи определения значений внутренних параметров неоднородного материала по результатам измерений на границе  $\Sigma$  области  $\Omega$ , занятой исследуемым материалом, при этом под внутренними параметрами подразумеваются теплофизические характеристики — теплопроводность и теплоемкость.

Существенной особенностью задач идентификации является то, что определяемые параметры являются функциями координат. Класс задач, в которых имеется зависимость идентифицируемых параметров от координат, а испытания относятся к неразрушающим, известны как задачи томографии [1]. Математическими моделями задач идентификации являются обратные задачи [2, 3]. Особенность обратных задач — их некорректность, которая проявляется, в частности, в сильной зависимости решения от входных данных. Для решения некорректных задач разработаны специальные методы, известные как методы регуляризации [2–5] и др., позволяющие с приемлемой для практики точностью построить единственное решение.

Обратные задачи, в которых имеет место зависимость идентифицируемых параметров от координат, то есть задачи томографии, возникают также в механике деформируемого твердого тела, в биомедицинской диагностике [6], разведке полезных ископаемых [7], гидрометеорологии, спектроскопии материалов сложного состава и других областях науки и техники.

Классические постановки обратных задач и их строгая математическая теория приведены в работах [2–5]. Обзор результатов, полученных на основе данной теории, дан в монографии [8].

## 2. Задачи идентификации для нестационарного уравнения теплопроводности. Математическая модель

Используется стандартное обозначение для температуры  $T = T(\vec{x}, t)$ , где  $\vec{x}$  — пространственная переменная,  $t$  — время. Вводится в рассмотрение плотность тепловой энергии  $e_T = e_T(\vec{x}, t)$  в точке  $\vec{x}$  в момент времени  $t$ . Принимается гипотеза о том, что

$$e_T = k(T - T_0), \quad (1)$$

где  $k$  — удельная теплоемкость,  $T_0 = \text{const}$  — температура приведения, например, стандартная комнатная  $20^\circ\text{C}$ .

Из условия равенства скорости изменения полной тепловой энергии

$$E_T = \int_{\Omega} e_T d\Omega = \int_{\Omega} k(T - T_0) d\Omega \quad (2)$$

потоку теплоты через поверхность  $\Sigma$ , получается уравнение нестационарной теплопроводности

$$k \frac{dT}{dt} = \text{div}(\gamma \text{grad } T), \quad (3)$$

где  $\gamma = \gamma(\vec{x})$  — коэффициент теплопроводности в законе Фурье. Величина

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } T \quad (4)$$

представляет собой полную производную по времени — полную скорость изменения температуры, равную сумме локальной  $\partial T / \partial t$  и конвективной  $\vec{v} \cdot \text{grad } T$  скоростей, где  $\vec{v}$  — скорость движения материальной частицы. Ниже конвективная составляющая скорости не принимается во внимание, так что уравнение (4) становится линейным относительно температуры.

Для постановки и решения обратных задач теплопроводности необходимо знать (измерять) температуру и тепловой поток на поверхности (ниже используются обозначения:  $\vec{\nabla}$  — оператор Гамильтона и  $\vec{n}$  — вектор единичной внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ ):

$$T|_{\Sigma} = T_{\Sigma}(\vec{x}, t), \quad (5)$$

$$\gamma(\vec{\nabla} T \cdot \vec{n})|_{\Sigma} = q_{\Sigma_n}(\vec{x}, t), \quad (6)$$

а также распределение температуры в некоторый начальный момент времени  $t = t_0$ :

$$T(\vec{x}, t)|_{t=0} = \tilde{T}_\Omega(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \Omega. \quad (7)$$

Рассматриваемая обратная задача заключается в нахождении функций  $\gamma = \gamma(\vec{x})$  и  $k = k(\vec{x})$  по заданным на границе функциям  $T_\Sigma(\vec{x}, t)$ ,  $q_{\Sigma_n}(\vec{x}, t)$ . Для упрощения предполагается, что коэффициент  $k = k(\vec{x})$  — известная величина; для определенности полагается  $k = k_0 = \text{const}$ . Тогда обратная коэффициентная задача сводится к определению одной неизвестной функции  $\gamma = \gamma(\vec{x})$ .

Принципиальная разрешимость поставленной задачи вытекает из следующих эвристических соображений. Пусть формальное решение задачи (3), (5), (7) построено в аналитической форме:

$$T(\vec{x}, t) = T(T_\Sigma(\vec{x}, t), \tilde{T}_\Omega(\vec{x}, t), \gamma(\vec{x})). \quad (8)$$

Подстановка этого решения в условие (6) приводит к функциональному уравнению для коэффициента  $\gamma = \gamma(\vec{x})$ :

$$\left( \vec{\nabla} T(T_\Sigma(\vec{x}, t), \tilde{T}_\Omega(\vec{x}, t), \gamma(\vec{x})) \right) \cdot \vec{n}|_\Sigma = q_{\Sigma_n}(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \Sigma. \quad (9)$$

В данном уравнении искомая функция  $\gamma = \gamma(\vec{x})$  и известные из эксперимента функции зависят от трех пространственных переменных, что позволяет рассчитывать на возможность решения поставленной обратной задачи и на теоретическое обоснование этой возможности.

В качестве тестовой рассматривается одномерная обратная задача определения функции распределения теплопроводности  $\gamma(x)$  в неоднородном стержне при известных значениях температуры и теплового потока на его концах. Для ее решения используется итерационный алгоритм, предложенный ранее в работе [1], основные шаги которого заключаются в следующем.

Полагается, что  $\vec{x} = x \in [0, L]$ ,  $t \in [0, t^*]$ . Задается нулевое приближение идентифицируемой функции  $\gamma(x) = \gamma^{(0)}(x)$  и находится соответствующее распределение  $T = T^{(0)}(x, t)$  как решение следующей начально-краевой задачи:

$$k_0 \frac{\partial T^{(0)}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma^{(0)}(x) \frac{\partial T^{(0)}(x, t)}{\partial x} \right], \quad (10)$$

$$T^{(0)}(0, t) = \tilde{T}_0(t), \quad T^{(0)}(L, t) = \tilde{T}_L(t), \quad t \in [0, t^*], \quad (11)$$

$$T^{(0)}(x, 0) = \tilde{T}_{0L}(x), \quad x \in [0, L]. \quad (12)$$

Существование и единственность решения данной задачи следуют из положительности коэффициентов  $k_0$  и  $\gamma(x) = \gamma^{(0)}(x)$ .

По известному распределению температуры  $T = T^{(0)}(x, t)$  вычисляется левая часть в условии Неймана (6) или тепловые потоки  $q_0^c(0, t)$  и  $q_L^c(L, t)$ , проходящие через левый и правый концы стержня:

$$-\left[ \gamma^{(0)}(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0} = q_0^c(0, t), \quad \left[ \gamma^{(0)}(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=L} = q_L^c(L, t). \quad (13)$$

При выводе формулы (13) используются равенства:

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x=0} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x=L} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Для сравнения вычисленных потоков  $q_0^c$  и  $q_L^c$  с экспериментально измеренными потоками  $\tilde{q}_0^{ex}$  и  $\tilde{q}_L^{ex}$ , выбирается некоторая норма невязки соответствующих разностей. Удобной для вычислений является норма:

$$J(\gamma^{(0)}) = \int_0^{T'} \left[ \left( q_0^c(t) - \tilde{q}_0^{ex}(t) \right)^2 + \left( q_L^c(t) - \tilde{q}_L^{ex}(t) \right)^2 \right] dt. \quad (14)$$

В ситуациях, когда фигурирующие в интеграле (14) функции времени имеют большие выбросы («скачки») на небольших временных промежутках, целесообразным является использование следующей оценки (нормы в пространстве непрерывных функций):

$$J(\gamma^{(0)}) = \max_t \left[ \left| q_0^c(t) - \tilde{q}_0^{ex}(t) \right| + \left| q_L^c(t) - \tilde{q}_L^{ex}(t) \right| \right]. \quad (15)$$

Если величина  $J(\gamma^{(0)})$  не превосходит заданной точности решения задачи, то  $\gamma^{(0)}$  является решением. В противном случае необходимо перейти к очередному приближению:

$$\gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \Delta\gamma. \quad (16)$$

Пусть коэффициенту  $\gamma^{(1)}(x)$  соответствует распределение температуры  $T^{(1)}(x, t) = T^{(0)}(x, t) + \Delta T(x, t)$ . После подстановки этого выражения и величины  $\gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \Delta\gamma$  в уравнение (10) и линеаризации по  $\Delta\gamma$  и  $\Delta T$  получается:

$$\begin{aligned} k_0 \frac{\partial(T^{(0)} + \Delta T)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\gamma^{(0)} + \Delta\gamma) \frac{\partial(T^{(0)} + \Delta T)}{\partial x} \right] &\approx \\ \approx k_0 \frac{\partial(T^{(0)})}{\partial t} + k_0 \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\gamma^{(0)}) \frac{\partial(T^{(0)})}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\Delta\gamma) \frac{\partial(T^{(0)})}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\gamma^{(0)}) \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

(независимые переменные для сокращения записи опущены) или с учетом уравнения(10)

$$k_0 \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\Delta\gamma) \frac{\partial(T^{(0)})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\gamma^{(0)}) \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x} \right]. \quad (18)$$

К уравнению (18) добавляются краевые условия:

$$\Delta T|_{x=0} = 0, \quad \Delta T|_{x=L} = 0, \quad \Delta T|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Уравнения для приращений в континуальной форме используются для теоретического исследования итерационного процесса [10]. Поскольку основной целью работы является численное решение обратной задачи, проводится дискретизация — переход к конечномерной формулировке.

Рассматривается конечно-разностная аппроксимация уравнения (18), имеющая второй порядок точности по координате  $x$  и первый порядок по времени. При использовании для аппроксимации производной по времени разность «назад», получается неявная разностная схема:

$$\begin{aligned} -2h^2 \frac{k_0}{\tau} [\Delta T_{i,j} - \Delta T_{i,j-1}] = & -[\gamma_i^{(0)} + \gamma_{i-1}^{(0)}] \Delta T_{i-1,j} + [\gamma_{i-1}^{(0)} + 2\gamma_i^{(0)} + \gamma_{i+1}^{(0)}] \Delta T_{i,j} - \\ & -[\gamma_i^{(0)} + \gamma_{i+1}^{(0)}] \Delta T_{i+1,j} - [\Delta \gamma_i + \Delta \gamma_{i-1}] T_{i-1,j}^{(0)} + \\ & + [\Delta \gamma_{i-1}^{(0)} + 2\Delta \gamma_i^{(0)} + \Delta \gamma_{i+1}^{(0)}] T_{i-1,j}^{(0)} - [\Delta \gamma_i + \Delta \gamma_{i+1}] T_{i-1,j}^{(0)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $i$  — номер точки в разбиении по координате;  $j$  — номер временного слоя;  $\tau$  — шаг по времени.

Вводятся векторы-столбцы неизвестных  $\Delta \vec{T}_j^{tr}, \vec{\gamma}$ :

$$\Delta \vec{T}_j^{tr} = [\Delta T_{2,j}, \Delta T_{3,j}, \Delta T_{4,j}, \dots, \Delta T_{N_x-1,j}], \quad \Delta \vec{\gamma}^{tr} = [\Delta \gamma_2, \Delta \gamma_3, \Delta \gamma_4, \dots, \Delta \gamma_{N_x-1}]. \quad (21)$$

Здесь индекс « $tr$ » обозначает операцию транспонирования. Необходимо отметить, что компоненты вектора  $\Delta \vec{T}_j^{tr}$ , соответствующие граничным узлам  $i=1, i=N_x$ , равны нулю, так как по постановке задачи температура на границе известна. Кроме того,  $\Delta \vec{T}_j^{tr} = 0$  для  $j=0$ , то есть для узлов, соответствующих начальному состоянию. Для упрощения (для приведения в соответствие размерностей вводимых ниже матриц) предполагается, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_{N_x}$  — известные величины, а значит  $\Delta \gamma_1 = \Delta \gamma_{N_x} = 0$ .

С учетом конечномерных записей полного вектора проводимостей  $\Delta \vec{\gamma}^{tr} = [\Delta \gamma_1, \Delta \gamma_2, \Delta \gamma_3, \Delta \gamma_4, \dots, \Delta \gamma_{N_x}]$  и полного вектора распределения температуры на  $j$ -ом временном слое  $\vec{T}_j^{tr} = [T_{1,j}, T_{2,j}, T_{3,j}, T_{4,j}, \dots, T_{N_x,j}]$  разностная схема (20) записывается в матричной форме:

$$[\Gamma(\vec{T}_j^{(0)})] \Delta \vec{\gamma}^j + [A(\vec{\gamma}^{(0)})] \Delta \vec{T} = \vec{B}_j, \quad (22)$$

где в квадратных скобках — строки матриц:

$$\begin{aligned} [A(\vec{\gamma}^{(0)})]_{1,i} &= \left[ -(\gamma_1^{(0)} + 2\gamma_2^{(0)} + \gamma_3^{(0)}) - 2h^2 \frac{k_0}{\tau}; (\gamma_2^{(0)} + \gamma_3^{(0)}); 0, \dots, 0 \right], \\ [A(\vec{\gamma}^{(0)})]_{2,i} &= \left[ -(\gamma_2^{(0)} + \gamma_3^{(0)}); -(\gamma_2^{(0)} + 2\gamma_3^{(0)} + \gamma_4^{(0)}) - 2h^2 \frac{k_0}{\tau}; (\gamma_3^{(0)} + \gamma_4^{(0)}); 0, \dots, 0 \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [\Gamma(\bar{T}_j^{(0)})]_{1,i} &= [(T_{1,j}^{(0)} - 2T_{2,j}^{(0)} + T_{3,j}^{(0)}); (-T_{2,j}^{(0)} + T_{3,j}^{(0)}); 0, \dots, 0], \\ [\Gamma(\bar{T}_j^{(0)})]_{2,i} &= [(T_{2,j}^{(0)} - T_{3,j}^{(0)}); (T_{2,j}^{(0)} - 2T_{3,j}^{(0)} + T_{4,j}^{(0)}); (-T_{3,j}^{(0)} + T_{4,j}^{(0)}); 0, \dots, 0]. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом того, что индекс « $j$ » означает номер временного слоя, система (20) переписывается в матричной форме иного вида:

$$2h^2 \frac{k_0}{\tau} [\Delta \bar{T}_j - \Delta \bar{T}_{j-1}] = [A(\bar{\gamma}^{(0)})] \cdot \Delta \bar{T}_j + [A(\Delta \bar{\gamma})] \cdot \bar{T}_j^0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N_t), \quad (25)$$

где слагаемое  $2h^2 \frac{k_0}{\tau} \Delta \bar{T}_j$  является известной величиной.

В соответствии с используемым алгоритмом процедура построения обратной матрицы реализуется на каждом временном слое. Таким образом, дополнительной переменной, необходимой для идентификации, каковой в стационарных задачах является номер эксперимента [1], здесь служит время.

Определяются матрицы  $[A(\bar{T}_j^0)]$  и  $[A_j^{-1}]$  по формулам

$$[A(\Delta \bar{\gamma})] \cdot \bar{T}_j^0 = [A(\bar{T}_j^0)] \cdot \Delta \bar{\gamma} \quad (26)$$

$$\left[ A(\bar{T}_j^0) - 2h^2 \frac{k_0}{\tau} [E] \right]^{-1} = [\bar{A}_j]^{-1}, \quad (27)$$

где  $[E]$  — единичная матрица, и приращения  $\Delta \bar{T}_j$  на каждом временном слое  $j$  выражаются через приращения  $\Delta \bar{\gamma}$ :

$$\Delta \bar{T}_j = -[\bar{A}_j]^{-1} \cdot \left( [A(\bar{T}_j^0)] \cdot \Delta \bar{\gamma} + 2h^2 \frac{k_0}{\tau} \Delta \bar{T}_{j-1} \right). \quad (28)$$

Выражение (28) подставляется в линейризованное граничное условие Неймана, что дает разрешающую систему уравнений для приращений  $\Delta \bar{\gamma}$ .

Вначале записывается условие Неймана на левой границе исследуемой области. Для рассматриваемой одномерной задачи из формулы (6) следует, что

$$\left( \gamma \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = q_0^{ex}(t), \quad (29)$$

где  $q_0^{ex}(t)$  — известная из эксперимента функция.

Условия (29) аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{1}{2h} (\gamma_1 + \gamma_2) (T_2^j - T_1^j) = \tilde{q}_0^{ex}(t) \quad (j = 2, 3, \dots), \quad (30)$$

где нижний индекс означает номер точки в разбиении по координате.

При условии, что в (30)

$$\gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \Delta\gamma; \quad T = T^{(1)} = T^{(0)} + \Delta T, \quad (31)$$

после линеаризации по  $\Delta\gamma$ ,  $\Delta T$ , получается уравнение:

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(T_{2,j}^{(0)} - T_{1,j}^{(0)}) + \Delta\gamma_2(T_{2,j}^{(0)} - T_{1,j}^{(0)}) + \Delta T_{2,j}(\gamma_1^{(0)} + \gamma_2^{(0)}) = -2h\tilde{q}_0^{ex}(t_j). \quad (32)$$

Аналогичные выкладки для правой границы (точка  $x = L$ ) приводят к уравнению:

$$(\gamma_{N_x} + \gamma_{N_x-1})(T_{N_x,j}^{(0)} - T_{N_x-1,j}^{(0)}) + \Delta\gamma_{N_x-1}(T_{N_x,j}^{(0)} - T_{N_x-1,j}^{(0)}) + \Delta T_{N_x-1,j}(\gamma_{N_x}^{(0)} + \gamma_{N_x-1}^{(0)}) = 2h\tilde{q}_L^{ex}(t_j). \quad (33)$$

После исключения отсюда приращений температуры при помощи соотношения (28), получается система уравнений для приращений теплопроводности во всех узлах:

$$[P] \cdot \Delta\vec{\gamma} = \vec{D}. \quad (34)$$

Эта система в общем случае является переопределенной. Для ее решения используется метод наименьших квадратов, в соответствии с которым она преобразуется к виду:

$$([P]^T [P]) \cdot \Delta\vec{\gamma} = [P]^T \vec{D}. \quad (35)$$

Далее в решении используется алгоритм Гаусса.

Необходимо отметить, что некорректность рассматриваемой обратной задачи проявляется в плохой обусловленности матрицы  $([P]^T [P])$ . Регуляризация последней производится по Тихонову; параметр регуляризации подбирается экспериментально.

Как выяснилось в численных экспериментах, описанный процесс является настолько медленно сходящимся, что для решения практических задач он непригоден. Причина данного эффекта — чрезмерно большое количество идентифицируемых параметров [11]. Поэтому предлагается модификация, направленная на уменьшение их числа и заключающаяся в том, что распределение коэффициента теплопроводности разыскивается в виде разложения

$$\vec{\gamma}(x) = p_0 + \sum_{r=1}^{N_r} p_r \psi_r(x), \quad (36)$$

в котором  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{N_r}$  — новые неизвестные коэффициенты,  $\psi_r(x)$  — заданные функции координат, такие что  $\psi_r(0) = \psi_r(L) = 0$ ,  $p_0$  — некоторая известная величина. Замена (36) имеет смысл, если  $N_r \ll N_x$ .

### 3. Решение обратной коэффициентной задачи теплопроводности

Решается обратная коэффициентная задача теплопроводности при двух видах распределения коэффициента теплопроводности на границе: параболическом и кусочно-постоянном. Для реализации решения используется программа MATLAB [12].

### 3.1. Параболическое распределение коэффициента теплопроводности

С помощью описанного в пункте 2 алгоритма ищется распределение теплопроводности в неоднородном стержне длиной  $L = 1$ . На концах стержня заданы тепловые потоки и температура:

$$q_0(t) = 1; \quad q_L(t) = 1 + 2t; \quad T_0(t) = 1; \quad T_L(t) = 1. \quad (37)$$

Известное точное распределение коэффициента теплопроводности  $\gamma(x)$  определяется соотношением:

$$\gamma^{toch}(x) = 1 + x(L-x) + (x(L-x))^2. \quad (38)$$

В качестве нулевого приближения распределения коэффициента теплопроводности используется выражение  $\gamma_0(x) = 1$ . Также приняты следующие входные данные для итерационной процедуры:  $N_x, N_t$  — количество разбиений по координате и времени ( $N_x = 10, N_t = 10$ );  $N_{it}$  — номер итерации ( $N_{it} = 100$ ),  $\rho_T$  — параметр регуляризации Тихонова ( $\rho_T = 0,01$ ).

Согласно алгоритму, решение заключается в идентификации параметров  $p_r$  в разложении (36).

На первой итерации сравниваются значения вычисленных и заданных потоков. Ошибка «*err*» оценивается с помощью формулы (14). Если величина  $J(\gamma^{(0)})$  не превосходит наперед заданной точности решения задачи, то  $\gamma_0$  является решением. В противном случае находится очередное приближение:  $\gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \Delta\gamma$  и  $T^{(1)} = T^{(0)} + \Delta T$ . После этого предложенным выше методом получают значения коэффициентов  $p_1, p_2$  и коэффициента теплопроводности.

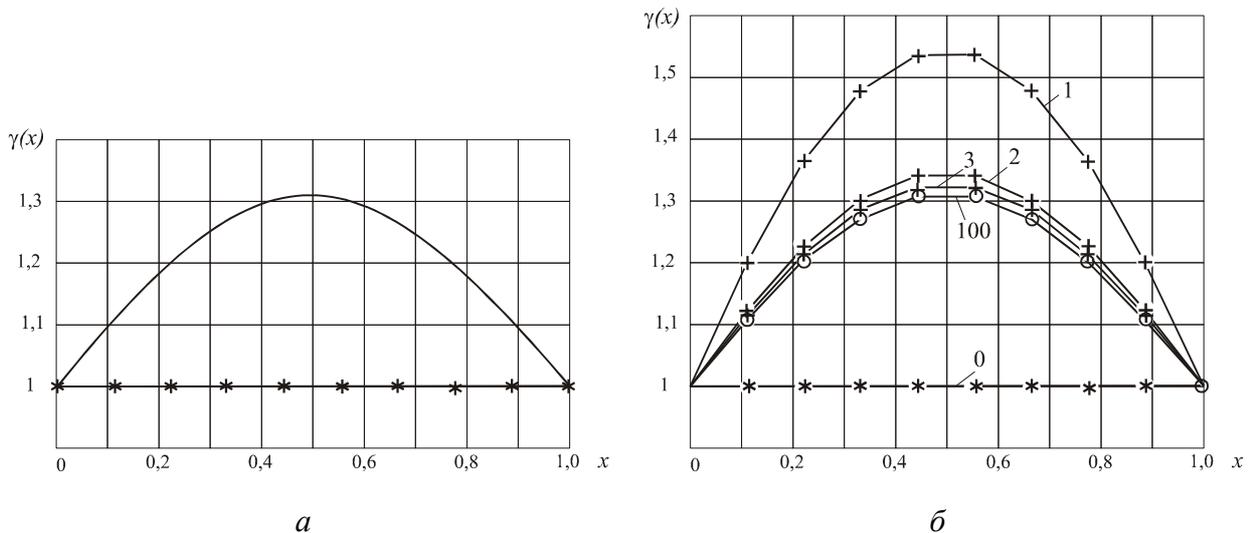
В таблице 1 и на рисунке 1 приведены результаты вычислений для случая, когда заданное точное распределение коэффициента теплопроводности имеет параболический характер.

Таблица 1. Процесс вычисления идентифицируемых параметров  
( $p_1$  и  $p_2$  – параболическое распределение)

Номер итерации $N_{it}$	Идентифицируемые параметры		Невязка <i>err</i>
	$p_1$ ,	$p_2$	
1	1,95295995989519	0,91884105308296	$1,10 \cdot 10^{-2}$
2	1,15830539800090	0,91996602063788	$2,63 \cdot 10^{-4}$
3	1,07845489045725	0,94899328486994	$6,08 \cdot 10^{-5}$
50	1,00787952280272	0,95950480952851	$9,45 \cdot 10^{-11}$
100	1,00774401799784	0,96004876941645	$7,42 \cdot 10^{-11}$

### 3.2. Кусочно-линейное распределение коэффициента теплопроводности

Здесь также ищется распределение теплопроводности в неоднородном стержне длиной  $L = 1$ . На концах стержня заданы тепловые потоки и температура:  $q_0(t) = 1$ ;



**Рис. 1.** Параболическое распределение коэффициента теплопроводности  $\gamma(x)$ : *a* – заданное точное распределение (сплошная линия) и нулевое приближение (звездочки); *б* – итерационные приближения (номер кривой соответствует номеру итерации)

$q_L(t) = 1 + 2t$ ;  $t^* = 1$ ;  $T_0(t) = 1$ ;  $T_L(t) = 1$ . Точное распределение коэффициента теплопроводности  $\gamma^{toch}(x)$  на участках  $0,23 \leq x \leq 0,33$  и  $0,67 \leq x \leq 0,77$  изменяется по линейному закону, в прочих точках определяется соотношениями:

$$\gamma^{toch} = \begin{cases} p_0 = 5 & 0 \leq x \leq 0,23 \\ p_{01} = 1 & 0,33 \leq x \leq 0,67, \\ p_0 = 5 & 0,77 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Начальное приближение распределения коэффициента теплопроводности  $\gamma_0$  имеет вид  $\gamma_0(x) = 0,5$ . Дополнительные входные данные:  $N_x = 10$ ;  $N_t = 10$ ;  $N_{it} = 500$ ;  $\rho_T = 0,25$ .

Для идентификации параметров  $p_r$  в разложении (36) используется процедура, аналогичная предыдущей. Результаты вычислений для кусочно-линейного распределения коэффициента теплопроводности приведены в таблице 2 и на рисунке 2.

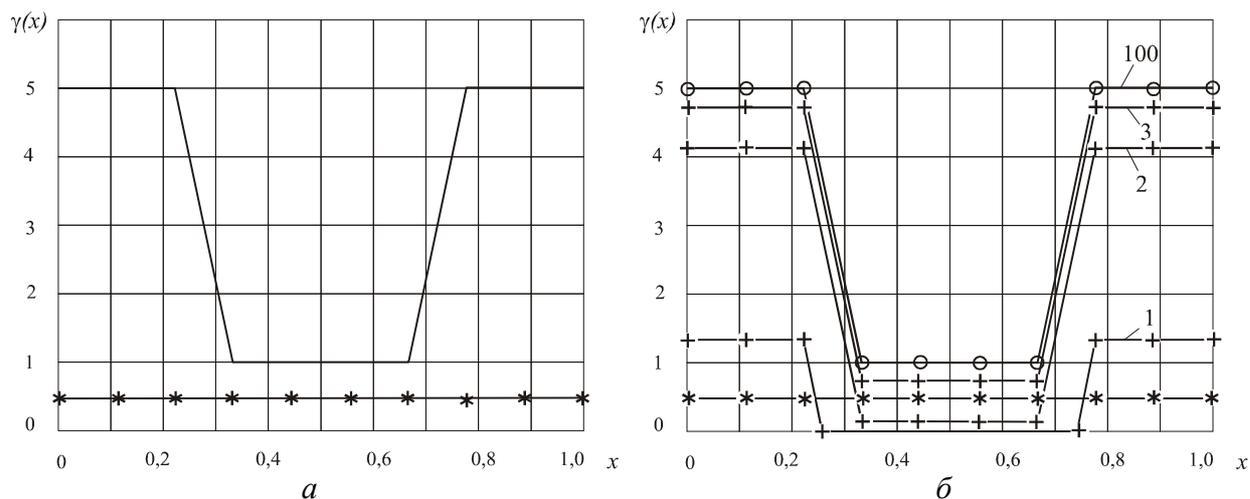
Из таблицы 2 видно, что с ростом числа итераций невязка уменьшается и численное решение колеблется около точного решения. Численные эксперименты также показали, что использование большего значения параметра регуляризации ( $\rho_T = 0,5$ ) замедляет итерационный процесс на первых шагах, но приводит к желаемому результату за меньшее число шагов. Например, на сотом шаге итерации невязка составляет  $2,20 \cdot 10^{-18}$  при  $\rho_T = 0,25$  и  $2,17 \cdot 10^{-29}$  при  $\rho_T = 0,5$ .

### 3. Заключение

Таким образом, в работе установлено, что метод минимизации невязки решения задачи идентификации распределения коэффициента теплопроводности в области по результатам измерений температуры и теплового потока на границе области является сходящимся. Попутно изучено влияние количества идентифицируемых параметров и

Таблица 2. Процесс вычисления идентифицируемых постоянных параметров ( $p_0$  и  $p_{01}$  – кусочно-линейное распределение)

Номер итерации $N_{it}$	Параметр регуляризации $\rho_T$	Идентифицируемые параметры		Невязка $err$
		$p_0$	$p_{01}$	
1	0,25	1,32131417284638	-2,67868582715362	$1,72 \cdot 10^1$
10	0,25	5,04892695400219	1,04892695400219	$1,07 \cdot 10^{-3}$
50	0,25	5,00002629885409	1,00002629885409	$3,15 \cdot 10^{-10}$
100	0,25	5,0000000219890	1,0000000219892	$2,20 \cdot 10^{-18}$
500	0,25	5,00000000000000	1,00000000000000	$1,25 \cdot 10^{-29}$



**Рис. 2.** Кусочно-постоянное распределение коэффициента теплопроводности  $\gamma(x)$ :  $a$  – заданное распределение (сплошная линия) и нулевое приближение (звездочки);  $b$  – итерационные приближения (номер кривой соответствует номеру итерации)

выбора параметра регуляризации на скорость сходимости. Предложенный новый метод идентификации теплофизических коэффициентов может использоваться при конструировании приборов и систем томографической термодиагностики.

## Литература

1. Кравчук А.С. Основы компьютерной томографии. – М.: Дрофа, 2001. – 340с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. – М.: Наука, 1987. – 158с.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 206с.
5. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука. – 286с.
6. Физика визуализации изображений в медицине / Под ред. С.Уэбба. – М.: Мир, 1991. – Т. 1 – 407с; Т. 2 – 406с.
7. Нолет Г., Чепмен Л. и др. Сейсмическая томография с приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике. – М.: Мир, 1990. – 450с.
8. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 222с.
9. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 468с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.
11. Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. Избранные задачи интегральной геометрии. – М.: Добросвет, 2000. – 208с.
12. Nakamura Sh. Analisis numerico y visualizacion grafica con MATLAB. – Madrid: Pearson Education, 1997. – 476 p.