

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ РЕЗКО РАЗЛИЧНЫХ ПО ПРОТЯЖЕННОСТИ МАСШТАБОВ ШЕРОХОВАТОСТИ ИХ ГРАНИЦ

А.Н. Мохель¹, Р.Л. Салганик¹, А.А. Федотов²

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*

² *ГОУ ВПО «МАТИ» — Российский государственный технологический университет
им. К.Э. Циолковского, Москва, 121552, Россия*

Методом последовательных приближений решается задача моделирования контактного взаимодействия прижимаемых друг к другу полубесконечных упругих шероховатых тел, характеризующихся двумя резко различными типичными масштабами протяженности шероховатости: Λ и $\lambda \ll \Lambda$. В нулевом приближении принимается во внимание только крупномасштабная (масштаба Λ) шероховатость, так что контакт между телами считается полным, и поэтому толщина некоторого эквивалентного слоя, определяемого собственно мелкомасштабной шероховатостью, также не учитывается. При этом рассматривается один крупномасштабный элемент шероховатости, который имеет вид вытянутой в одном направлении впадины, моделирующей дефект, и используется решение, полученное авторами ранее. Эффекты от мелкомасштабной шероховатости учитываются в первом приближении. Мелкомасштабная шероховатость описывается моделью Гринвуда–Вильямсона. Исследуются условия применимости рассмотренного приближения. Приводятся примеры расчёта.

CONTACT INTERACTION OF ROUGH ELASTIC SOLIDS IN THE PRESENCE OF TWO HIGHLY DIFFERENT SCALES OF ROUGHNESS EXTENT

A.N. Mokhel¹, R.L. Salganik¹ and A.A. Fedotov²

¹ *A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia*

² *«MATI» — Russian State University of Aviation Technology, Moscow, 121552, Russia*

Using the method of successive approximations (iterations), the problem of contact interactions of squeezed semi-infinite elastic solids with rough surfaces characterized by two highly different scales of roughness extent, Λ and $\lambda \ll \Lambda$, is considered. In zero approximation, only the coarse-scale roughness (i.e., of scale Λ of its extent) is taken into account, so that the contact between the solids may be considered as full. The effects of fine-scale roughness are studied only in first approximation. The consideration in zero approximation is performed in the case when there is a single coarse-scale element in the form of a socket simulating a defect elongated in a certain direction. The solution of the corresponding problem obtained earlier by the authors is applied. The fine-scale roughness effects are considered by means of the Greenwood-Williamsom model. The conditions for application of the proposed approximate treatment are investigated. Examples of calculations are presented.

1. Введение

При контакте прижимаемых друг к другу твёрдых деформируемых тел с шероховатыми границами между ними возникает взаимодействие, на которое влияет шероховатость. Решение задач о таком взаимодействии важно для ряда приложений, связанных с проблемами трения и изнашивания, герметизации, проводимости, в том числе, электрической. Задача контактного взаимодействия решается методом последовательных приближений при условии двухмасштабной шероховатости, то есть

когда шероховатость границ взаимодействующих тел характеризуется двумя сильно различающимися между собой типичными масштабами протяжённости: Λ и λ ($\lambda \ll \Lambda$). Взаимодействующие поверхности считаются плоскими.

В нулевом приближении принимается во внимание только крупномасштабная (масштаба Λ) шероховатость и предполагается, что эффектами от мелкомасштабной шероховатости (масштаба λ) можно пренебречь, так что контакт между телами считается полным. Это допущение означает и пренебрежение толщиной некоторого эквивалентного слоя, определяемого собственно мелкомасштабной шероховатостью. Эффекты от мелкомасштабной шероховатости рассматриваются в следующем, первом приближении.

Здесь рассматривается случай, когда в абсолютно жёстком теле имеется один крупномасштабный элемент шероховатости, который представляет собой вытянутую в одном направлении впадину (выемку), моделирующую дефект в теле. Полагается, что в окрестности такого дефекта, в сечениях, нормальных к направлению его вытянутости и не близких к концам, реализуются условия плоской деформации. Допущение о пренебрежимо малой толщине эквивалентного слоя позволяет пренебречь наличием самого этого слоя и воспользоваться решением соответствующей задачи [1, 2], где рассмотрены условия, при которых в пределах дефекта возникает площадка неконтакта, показанная на рисунке 1.

Мелкомасштабная шероховатость, рассматриваемая только в первом приближении, описывается в рамках модели Гринвуда–Вильямсона [3]. Параметры модели берутся с учётом решения, полученного в нулевом приближении (о развитии модели и успешном ее применении к анализу экспериментальных данных см. в работах [4–6]).

Известно [3], что контактное взаимодействие определяется только формой зазора между контактирующими телами (их сдвиговое взаимодействие во внимание не принимается ввиду предполагаемой его малости). Тогда, без ограничения общности, можно считать шероховатой границу только одного из контактирующих тел, если при этом обеспечить соответствие профиля шероховатости зазору между недеформированными поверхностями, то есть использовать профиль эквивалентной шероховатости и приведённый модуль упругости: $E_* = \left[(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2 \right]^{-1}$, где E_1 и E_2 — модули упругости, ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона контактирующих тел [3]. Тогда при контакте гладкой поверхности с шероховатой, но имеющей профиль эквивалентной шероховатости, площадь фактического контакта взаимодействующих тел зависит от степени их сближения, как в случае взаимодействия тел с первоначально заданными шероховатыми границами.

Основная цель проводимого здесь исследования состоит в оценке влияния возмущения напряжённого состояния, вызванного впадиной, на изменение параметров мелкомасштабной шероховатости [3]. При этом обратное влияние указанного изменения на напряженное состояние впадины считается пренебрежимо малым, что допустимо вследствие предположения $\lambda \ll \Lambda$.

Наибольший интерес представляет изменение параметров мелкомасштабной шероховатости на продолжении дефекта, где известно (из полученного в [1] решения соответствующей задачи о дефекте в виде выбоины) распределение контактного давления. Предположение $\lambda \ll \Lambda$ позволяет считать какое-либо локальное значение давления на продолжении дефекта равным постоянному значению фигурирующего в модели Гринвуда–Вильямсона давления, которое получается отнесением действующего на контактирующие тела усилия к номинальной площади их контакта. Протяжённость

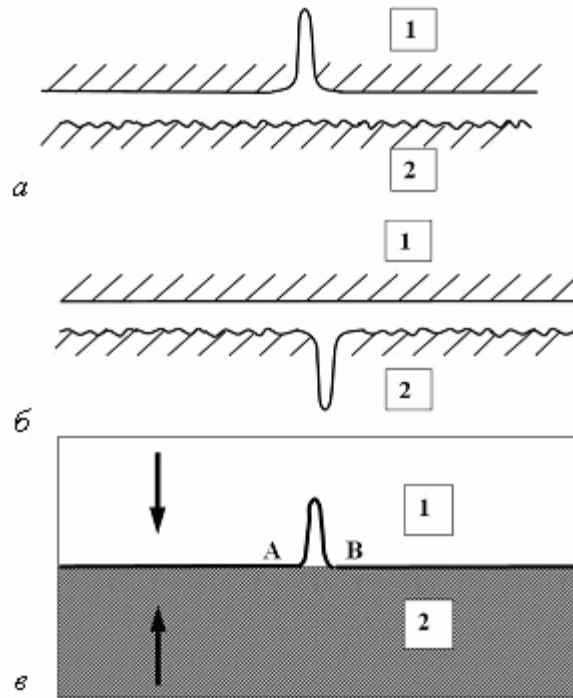


Рис. 1. Возможные схемы (а) и (б) двухмасштабной шероховатости тел с номинально плоскими границами, приводящие к появлению площадки неконтакта АВ при упругом сжатии двух тел (в): а – «жесткое» тело 1 с относительно крупной впадиной и упругое тело 2 с мелкомасштабной шероховатостью (схема рассмотрена в [1]); б – «жесткое» тело 1 и упругое тело 2 с двухмасштабной шероховатостью (схема рассмотрена в [3, 4, 7]), в – площадка неконтакта АВ при неполном проникновении упругого тела 2 в крупную впадину в жёстком теле 1

границы контакта полагается бесконечной, и все условия вдоль неё — неизменными. Задаваемым параметром внешнего воздействия в модели Гринвуда–Вильямсона является сближение между контактирующими телами, а усилие (или соответствующее давление), которое прижимает их друг к другу, находится в результате вычислений. В рассматриваемой постановке возникает обратная задача, а именно — задача отыскания сближения между контактирующими телами, которое соответствует заданной величине прижимающего их друг к другу давления. Последнее равняется локальному давлению, возникающему в задаче о дефекте в рассматриваемой точке на его продолжении. Таким образом, сначала требуется решить указанную обратную задачу, а затем при помощи её решения найти распределение сближения между контактирующими телами и распределение реальной площади контакта (осуществляемого через микроплощадки масштаба λ) на продолжении дефекта. Это те величины, по которым судят о влиянии рассматриваемого контакта на его трибологическое, электрическое или иное поведение.

2. Задача о протяженной впадине (дефекте)

Рассматривается задача о напряжённом состоянии полубесконечного упругого тела, возникающем при его прижатии к жёсткому телу равномерно распределённым на «бесконечности» давлением p . В жёстком теле имеется протяженная впадина (дефект), вне которой граница жесткого тела является плоской. Упругое тело считается занимающим полуплоскость $y > 0$. Толщина эквивалентного слоя, определяемого шероховатостью, по соображениям, изложенным во введении, не учитывается.

Искомое решение представляется в виде суммы решений двух задач: задача 1 решается при условии, что контакт имеет место всюду; в задаче 2 предполагается, что

имеется площадка неконтакта, которая моделируется математическим разрезом и находится в области, где, согласно решению задачи 1, действуют в основном растягивающие напряжения. Считается, что математический разрез находится в бесконечном однородном упругом теле, в котором напряжения на бесконечности стремятся к нулю. На противоположные берега разреза действуют напряжения, равные по величине и противоположные по знаку тем, которые получаются в соответствующих местах согласно решению задачи 1. Координаты концов разреза находятся из условия непрерывности напряжений в них. В результате сложения решений обеих задач получается решение, являющееся искомым, так как оно удовлетворяет следующим условиям:

- берега разреза свободны от напряжений;
- касательные напряжения на продолжении разреза в бесконечном упругом теле равны нулю вследствие очевидной нечётности их распределения относительно координаты, нормальной к плоскости, содержащей границу контакта, что соответствует исходному предположению об отсутствии сдвигового взаимодействия между рассматриваемыми телами;
- напряжения в концах разреза непрерывны;
- на «бесконечности» (вдали от площадки неконтакта) напряжённое состояние в упругом теле переходит в пределе в напряжённое состояние, определяемое заданным изначально постоянным давлением p .

В качестве примера рассматривается впадина в жестком теле, которая имеет вид: $\zeta = -\zeta_0 l^2 / (x^2 + l^2)$, где ζ_0 и l — параметры размерности длины, причем $\zeta_0 \ll l$. Решение этой задачи, удовлетворяющее условиям непрерывности напряжений в концах площадки неконтакта в области впадины, получено в работе [1], где распределение давления на продолжении площадки неконтакта, то есть контактное давление, p_c и полуширина площадки неконтакта a определяются по формулам:

$$p_c = p \frac{x\sqrt{x^2 - a^2} (3l^2 + 2a^2 + x^2)}{(x^2 + l^2)^2}, \quad (1)$$

$$a = l \left[\left(\frac{E\zeta_0}{2(1-\nu^2)lp} \right)^{2/3} - 1 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Для исследования поведения контактного давления и полуширины площадки неконтакта в зависимости от приложенного на бесконечности давления p здесь, как и в [1], осуществляется переход к безразмерным параметрам. При этом все величины с размерностью длины относятся к l , а величины с размерностью напряжения — к $p_{кр} = E\zeta_0 / 2(1-\nu^2)l$ — критическому давлению, при достижении которого во впадине отсутствует площадка неконтакта. При таком обезразмеривании координата x переходит в $\bar{x} = x/l$, полуширина площадки неконтакта a — в $\bar{a} = a/l$, а контактное давление p_c — в $\bar{p}_c = p_c/p_{кр}$. Соответствующий график, построенный по формуле (1) с учетом (2), приведен на рисунке 2. Построение подобных зависимостей позволяет найти диапазон изменения контактного давления p_c , для которого из уравнений модели Гринвуда–Вильямсона [3] определяются площадь микроплощадок контакта масштаба λ и безразмерное сближение контактирующих тел.

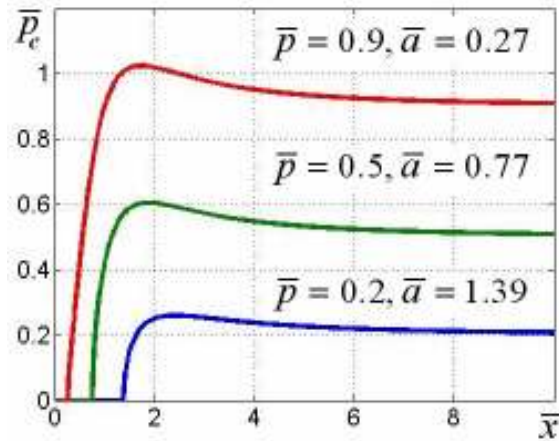


Рис. 2. Распределения контактного давления \bar{p}_c на продолжении площадки неконтакта при разных уровнях давления \bar{p} и при соответствующих значениях \bar{a}

3. Задача о распределении площади микроплощадок контакта и сближения на продолжении впадины

3.1. Основные зависимости для модели Гринвуда–Вильямсона

Шероховатость поверхности, согласно модели Гринвуда–Вильямсона [3], моделируется системой сферических сегментов одинакового радиуса β , а их высота считается случайной величиной, подчиняющейся некоторому закону распределения $\phi(z)$. Основные зависимости для модели Гринвуда–Вильямсона таковы [3, 8]:

$$F = \frac{4}{3} NE_* \beta^{1/2} \int_b^\infty (z - b)^{3/2} \phi(z) dz, \tag{3}$$

$$A_r = \pi N \beta \int_b^\infty (z - b) \phi(z) dz, \tag{4}$$

где F — суммарное усилие, действующее на площадку контакта, имеющую номинальную площадь A_{nom} ; N — число сферических сегментов на рассматриваемой площадке A_{nom} ; A_r — фактическая площадь контакта (суммарная площадь площадок контакта). Величины F и A_r зависят от сближения b контактирующих поверхностей.

В рассматриваемой задаче вместо зависимости F от заданного сближения b используется зависимость номинального давления $p = F / A_{nom}$ от b . Эта зависимость монотонна и, следовательно, существует обратная ей зависимость $b(p)$. Соответствующая безразмерная зависимость $\bar{b}(p) = b(p) / \sigma$ приведена на рисунке 3 (σ — среднеквадратичное отклонение высот мелкомасштабной шероховатости, подчиняющихся гауссовому распределению [3]). Для её вычисления взяты параметры из примера, рассмотренного в работе [3] (см. стр. 305: $\eta = N / A_{nom} = 300 \text{ мм}^{-2}$; $\beta \cdot \sigma = 10^{-4} \text{ мм}^2$; $E_*(\beta / \sigma) = 25 \text{ кГ/мм}^2$; $A_{nom} = 100 \text{ мм}^2$; $E_* = E / (1 - \nu^2)$), а также следующие значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона: $E = 22000 \text{ кГ/мм}^2$, $\nu = 0,3$.

3.2. Решение поставленной задачи

Решается задача о протяженной впадине в жёстком теле, контактирующем с полубесконечным упругим телом (см. раздел 2).

Согласно изложенному во введении подходу, значение p отождествляется со значением p_c , выражаемым формулой (1) с учётом формулы (2) при надлежащем выборе параметров в этих формулах, включая и те, которые задают впадину. В результате находятся зависимость сближения $b(x)$ и, с учётом формулы (4), зависимость $A_r(x)$.

Впадина, описываемая уравнением $\zeta = -\zeta_0 l^2 / (x^2 + l^2)$, имеет параметры: $\zeta_0 = 1$ мкм; $l = 100$ мкм, а для упругого тела используются следующие механические характеристики: $E = 22000$ кГ/мм²; $\nu = 0,3$. Расчеты проведены для двух значений давления, приложенного вдали от впадины (то есть на бесконечности): $p_1 = 0,12$ кГ/мм²; $p_2 = 0,3$ кГ/мм². Этим значениям давления отвечают длины площадки неконтакта $2a$, равные 2 мм и 1,5 мм соответственно. Полученные из решения распределения контактных давлений вблизи площадки неконтакта приведены на рисунке 4.

Из рисунка 4 видно, что при заданном давлении p , действующем вдали от впадины, в ближней к впадине области реализуется вся совокупность контактных давлений ниже p , а дальше начинается область контактных давлений, превышающих p .

Рассчитанные распределения безразмерного сближения $\bar{b} = b/\sigma$ и фактической площади контакта (суммарной площади площадок контакта) A_r на продолжении площадки неконтакта для двух распределений контактного давления (Рис. 4) приведены на рисунках 5 и 6. Построенные зависимости отвечают двум разным уровням давления, приложенного вдали от впадины. Видно, что кривые $\bar{b}(x)$ и $A_r(x)$ ведут себя достаточно плавно (приблизительно относительные изменения значений этих функций на расстояниях $\sim 0,1$ мм не превышают 10%) во всем рассматриваемом диапазоне изменения x (на продолжении площадки неконтакта), за исключением узких областей, непосредственно примыкающих к концу площадки неконтакта. Размер областей очень резкого изменения $\bar{b}(x)$ и $A_r(x)$ составляет $\sim 0,1 \div 0,2$ мм.

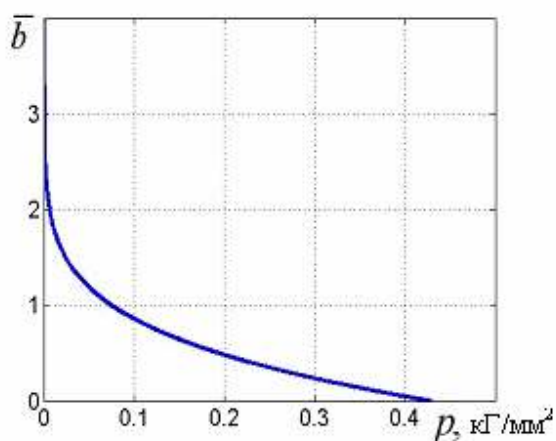


Рис. 3. Зависимость безразмерного сближения \bar{b} контактирующих поверхностей от номинального давления p

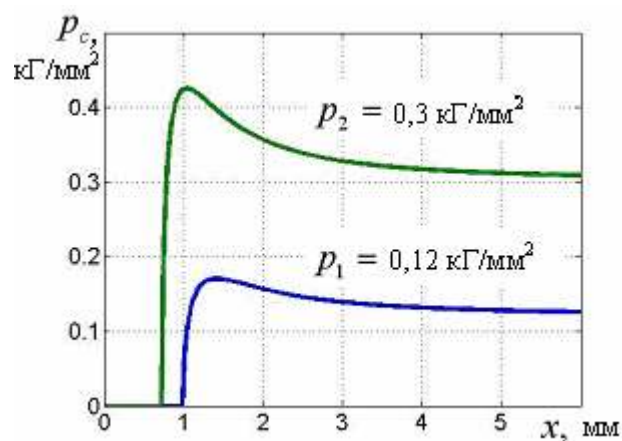


Рис. 4. Распределение контактных давлений p_c на продолжении площадки неконтакта при различных значениях номинального давления p

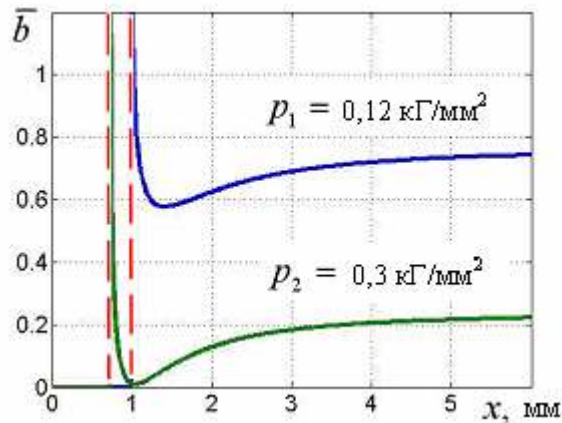


Рис. 5. Распределение безразмерного сближения \bar{b} на продолжении площадки неконтакта

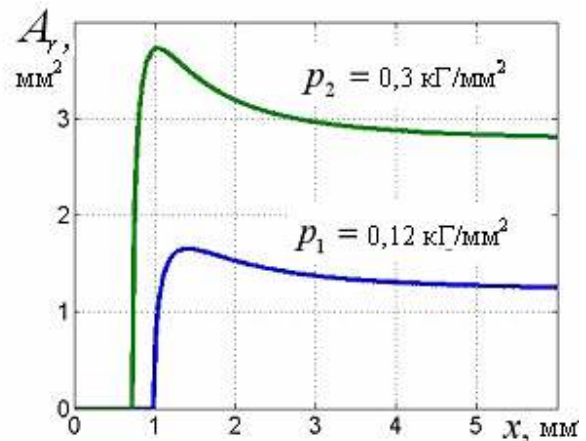


Рис. 6. Распределения фактической площади контакта A_y на продолжении площадки неконтакта

При постановке задачи принято допущение о возможности всюду пренебречь в нулевом приближении как эффектами, связанными с некоторым эквивалентным слоем, заменяющим шероховатость, так и наличием самого этого слоя. Связанная с эквивалентным слоем неоднородность напряженно-деформированного состояния и сам слой могут проявляться лишь в достаточной близости от конца площадки неконтакта. Согласно найденному решению, контактное давление в этой области мало. Поэтому сравнительно мал здесь и эффект от проявления указанной неоднородности, что служит основанием для пренебрежения ею.

4. Заключение

Значение полученного выше решения задачи состоит в следующем. В задаче имеется два макроскопически малых масштаба неоднородности Λ и λ . Масштаб Λ определяется протяженностью площадки неконтакта (связанной с характерной протяженностью впадины). Он намного меньше протяженности микроплощадок контакта (масштаб λ). В результате создаётся относительно плавная (в меру малости λ по сравнению с Λ) неоднородность напряженно-деформированных состояний материала. Неоднородные состояния рассматриваются как локально однородные, допускающие в первом приближении использование для их описания модели Гринвуда–Вильямсона, сформулированной для строго однородных условий. В итоге появляется возможность исследовать на основе этой модели трибологические и другие явления, имеющие существенно неоднородную природу, то есть значительно расширить границы применимости модели Гринвуда–Вильямсона.

В связи с тем, что совокупность геометрий дефектов шероховатости (типа впадин) реальных поверхностей широка, в [1, 2] дана схема расчета возмущения напряженного состояния в окрестности крупномасштабных дефектов и развит подход, позволяющий рассматривать осесимметричную впадину¹ и пространственные впадины более общего вида. При этом предложены способы рассмотрения впадин, геометрия которых не является гладкой, — что порождает концентрацию (в том числе бесконечную) напряжений в ближней окрестности участков неконтакта.

Полученное решение важно для ряда приложений, которые связаны с проблемами: трения и изнашивания; герметизации, когда необходимо обеспечить связность области контакта; проводимости, в частности, электрической, когда участки неконтакта

¹ В работе [1] для формулы (3.5) вместо ссылки [12] следует см.: *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – М: ИЛ, 1955. – 667с.

экранируют протекание по нормали к ним электрического тока. Кроме того, это решение важно при рассмотрении изнашивания жёсткого тела при его контактном взаимодействии с упругим телом, когда происходит вырывание из жёсткого тела частиц с образованием соответствующих впадин (дефектов). Тогда контактное взаимодействие продолжается уже в рассмотренных выше условиях проявления локальной неоднородности напряжено-деформированного состояния, порождённой присутствием этих впадин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-08-50269).

Литература

1. *Салганик Р.Л., Мохель А.Н., Федотов А.А.* Контактная задача теории упругости для полуограниченных тел с шероховатой границей при почти полном их контакте // Вестник МАИ. – 2007. – Т. 14, № 4. – С. 119-126.
2. *Салганик Р.Л., Марков В.Г., Мохель А.Н., Федотов А.А.* Применение методов теории трещин и преобразования Фурье к контактной задаче для тел с шероховатыми границами: Препр. / РАН. Ин-т проблем механики. – М., 2006. – 52с.
3. *Greenwood J.A., Williamson J.B.P.* Contact of nominally flat surfaces // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1966. – V. 295. – P. 300-319.
4. *Greenwood J.A., Wu J.J.* Surface Roughness and Contact: An Apology // Meccanica. – 2001. – V. 36. – P. 617–630.
5. *Siniawski M.T., Harris S.J., Wang Q.* Effects of contact on the abrasiveness of a thin boron carbide coating // Tribology Letters. – 2005. – V. 20, N. 1. – P. 21-30.
6. *Gao Y.-F., Bower A.F.* Rough Surface Plasticity and Adhesion across Length Scales// Nanomechanics of Materials and Structures / T.J. Chuang et al. (eds.) – Dodrecht: Springer. – 2006. – P. 277-287.
7. *Федотов А.А., Мохель А.Н., Салганик Р.Л.* Измерение, анализ и компьютерное моделирование шероховатости поверхности субстрата как этап решения задачи оценки качества покрытий // Научные труды МАТИ им. К.Э. Циолковского. – 2007. – № 12 – С. 25-29.
8. Основы трибологии (трение, износ, смазка): Учеб. для техн. вузов / Под ред. А.В. Чичинадзе. – М.: Машиностроение, 2001. – 664с.