

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ ТЕПЛОВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.А. Бочарова, И.В. Плаксина

*Дальневосточный государственный технический университет (ДВГУИТ им. В.В. Куйбышева),
Владивосток, 690950, Россия*

Рассматривается свободноконвективный поток около вертикальной поверхности в пористой среде, который определяется тепловыми граничными условиями третьего рода. Из анализа размерностей полных уравнений движения и энергии определяется порядок области применимости приближения пограничного слоя. Построены асимптотические разложения для температуры и функции тока, применимые в окрестности передней кромки и далеко вниз по потоку. Получено численное решение полных уравнений в приближении пограничного слоя.

FREE CONVECTION IN A POROUS MEDIUM WITH NEWTONIAN HEATING ON A VERTICAL SURFACE

A.A. Bocharova and I.V. Plaksina

Far East State Technical University, Vladivostok, 690950, Russia

The free convection flow along a vertical surface in a porous medium with Newtonian heating is studied under boundary conditions of the third kind. The order-of-magnitude analysis is worked out to determine the range of applicability of the boundary layer approximation for the system of governing equations. The temperature and stream function fields are described by applying asymptotic expansions valid near the leading edge and valid far downstream.

1. Введение

Задача о свободной конвекции, возникающая при условии, что скорость теплоотдачи от граничной поверхности, термически сопряженной конвективному потоку, пропорциональна локальной температуре поверхности, имеет приложения в более широком спектре инженерных проблем, чем задачи с заданной температурой поверхности или с заданным тепловым потоком. Сложность такой задачи состоит в том, что в случае тепловых граничных условий третьего рода уравнения пограничного слоя не допускают автомодельных решений. Известно только одно теоретическое исследование подобной задачи [1], в котором проведен безразмерный анализ уравнений пограничного слоя и получены решения для функции тока и температуры, верные в окрестности передней кромки пластины и далеко вниз по потоку для вязкого свободноконвективного потока.

Исследованию различных эффектов свободной конвекции в пористой среде посвящено большое число работ (см., например, книгу [2]), однако во всех из них рассматриваются граничные условия первого или второго рода.

Свободноконвективный пограничный слой в пористой среде при теплоотдаче по закону Ньютона на вертикальной поверхности рассмотрен в работе [3], однако только на основе закона Дарси без учета в уравнении сохранения количества движения вязких и инерционных членов.

В данной работе свободная конвекция на вертикальной поверхности с граничными условиями третьего рода в заполненной жидкостью пористой среде исследуется на основе полных уравнений вязкой жидкости. С помощью анализа размерностей впервые получена группа критериев, которые определяют характеристики потока и теплоотдачи, соответствующие граничным условиям третьего рода. Асимптотический анализ полных уравнений позволил определить область применимости приближения пограничного слоя, в рамках которого проведены предыдущие исследования этой задачи [1, 3].

Решение уравнений пограничного слоя построено на основе метода, предложенного в [1]. Получены асимптотические разложения, верные в окрестности передней кромки пластины и далеко вниз по потоку. Эти предельные решения затем объединены численным решением полных уравнений пограничного слоя в пористой среде. Численное решение построено с помощью конечно-разностной схемы в комбинации с методом непрерывных преобразований [4]. В отличие от результатов работы [3], показано существенное влияние параметров Дарси и Прандтля на процесс свободной конвекции при тепловых граничных условиях третьего рода.

2. Основные уравнения

Рассматривается свободная конвекция около полубесконечной вертикальной пластины, помещенной в заполненную жидкостью пористую среду, имеющую температуру T_∞ . Предполагается, что жидкость и пористая матрица находятся в термодинамическом равновесии и их свойства изотропны и постоянны, что эффект вязкой диссипации пренебрежимо мал, а тепловой поток на поверхности пропорционален локальной температуре поверхности. Таким образом,

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -h_s T \quad \text{при } \bar{y} = 0 \ (\bar{x} > 0), \quad (1)$$

где (\bar{x}, \bar{y}) — декартовы координаты, определяющие расстояние вдоль и по нормали к поверхности; T — температура; h_s — постоянный коэффициент теплоотдачи с поверхности.

Соответствующие уравнения движения и энергии для однородной пористости, полученные с помощью принципа усреднения по объему [5], записываются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0, \\ \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial \bar{x}} + \rho_f g \beta \Delta T - \frac{\mu_f}{K} \bar{u} + \mu' \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right), \\ \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial \bar{y}} - \frac{\mu_f}{K} \bar{v} + \mu' \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha \bar{V}^2 T. \quad (3)$$

Здесь \bar{V} — вектор скорости; \bar{u}, \bar{v} — компоненты скорости вдоль осей (\bar{x}, \bar{y}) ; g — ускорение силы тяжести; P — давление; K — проницаемость пористой среды; ε — пористость; β — коэффициент температурного расширения; α, μ_f — температуропроводность и динамическая вязкость жидкости; μ' — эффективная вязкость.

Видом граничных условий определяется следующий выбор безразмерных переменных [3]:

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad y = \bar{y} \cdot h_s, \quad u = \frac{\bar{u}}{U_0}, \quad v = \frac{\bar{v}h_s}{U_0}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}, \quad (4)$$

где $l = (gK\beta T_\infty) / (\alpha \nu h_s^2)$ — характерный размер и $U_0 = \alpha h_s^2$ — характерная скорость.

Вводится функция тока $\bar{u} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y}$, $\bar{v} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x}$, где $\bar{\Psi} = \Psi \cdot \Psi_0$ с соответствующим масштабом $\Psi_0 = U_0/h_s$. После подстановки преобразования (4) в (2) и (3) получаются следующие безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} + \alpha^2 l^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \right) &= \text{Pr}^* \varepsilon^2 \left(\frac{g\beta T_\infty l^2}{U_0 \nu_f} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \right. \\ &- \frac{1}{\text{Da}} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \alpha^2 l^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \left. \right) + \text{Pr}^* \varepsilon \left(\frac{1}{\alpha^2 l^2} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha^2 l^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} \right), \quad (5) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{\alpha^2 l^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Модифицированное число Рэлея, построенное на основе α^{-1} , определяется как произведение двух характерных размеров

$$\text{Ra} = \alpha \cdot l = \frac{gK\beta T_\infty \alpha^{-1}}{\nu_f a}, \quad (6)$$

а коэффициент при подъемной силе равняется $\text{Ra}^2/\text{Da} = (g\beta T_\infty l^2) / (U_0 \nu_f)$, где Da — число Дарси. В итоге получается четыре безразмерных комплекса: Pr^* , Da , ε , Ra .

Для уменьшения числа параметров вводится модифицированное число Прандтля Pr

$$\text{Pr}^* = \nu_f / \alpha, \quad \text{Pr} = \text{Pr}^* \cdot \varepsilon^2, \quad \text{Da} = Kh_s^2. \quad (7)$$

Тогда система уравнений (5) приводится к виду

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} \right) + \text{Ra}^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \right) \right) &= \frac{\text{Pr}^*}{\text{Da}} \left(\text{Ra}^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} - \right. \\ &= - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \text{Ra}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \left. \right) + \text{Pr}^* \left(\frac{1}{\text{Ra}^2} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \text{Ra}^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} \right), \quad (8) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Ra}^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Из уравнения (8) ясно, что при $\text{Ra} \gg 1$ приближение пограничного слоя верно в пристеночной области толщиной порядка единицы. Влияние конвективного переноса при

$Pr \gg 1$ не существенно, а при $Da \rightarrow 0$ получается режим течения Дарси, который исследован в [3].

Таким образом, при значениях $Ra \gg 1$ для анализа граничных и инерционных эффектов свободноконвективного течения в пристеночной области пористой среды по поперечной координате порядка единицы при тепловых граничных условиях третьего рода можно использовать уравнения в приближении пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{Pr^*}{Da} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + Pr^* \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -(1 + \theta) \quad &\text{при } y = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \quad &\text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Решение уравнений пограничного слоя

3.1. Решение для малых значений продольной координаты x

В окрестности передней кромки пластины свободноконвективное течение в нулевом приближении определяется постоянным тепловым потоком на поверхности, а приближения более высоких порядков являются возмущениями известного решения уравнений пограничного слоя при условии постоянного потока на поверхности пластины.

Согласно преобразованию подобия, соответствующему решению для постоянного потока на поверхности и верному в окрестности передней кромки [1]

$$\Psi = x^{4/5} F(x, \zeta), \quad \theta = x^{1/5} H(x, \zeta), \quad \zeta = \frac{y}{x^{1/5}}, \quad (11)$$

уравнения (9), (10) приводятся к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial \zeta^3} + \frac{1}{Pr} \left(\frac{4}{5} F \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - \frac{3}{5} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^2 \right) - \frac{1}{Da} \left(H - x^{2/5} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) &= x \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} \right), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} + \frac{4}{5} F \frac{\partial H}{\partial \zeta} - \frac{1}{5} H \frac{\partial F}{\partial \zeta} &= x \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

с граничными условиями:

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \zeta} = -1 - x^{1/5} H, \quad \zeta = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} \rightarrow 0, \quad H \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Граничные условия предполагают рассмотрение решения в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} F(x, \zeta) &= F_0(\zeta) + x^{1/5} F_1(\zeta) + x^{2/5} F_2(\zeta) + x^{3/5} F_3(\zeta) + \dots, \\ H(x, \zeta) &= H_0(\zeta) + x^{1/5} H_1(\zeta) + x^{2/5} H_2(\zeta) + x^{3/5} H_3(\zeta) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Система уравнений для нулевого приближения (F_0, H_0) получается при подстановке (14) в (12), (13) и соответствует известному решению для однородного теплового потока [6]. Влияние тепловых граничных условий третьего рода имеет место при значении продольной координаты $O(x^{1/5})$ через граничное условие $H'_1(0) = -H_0(0)$, где $H_0(0)$ известно из решения уравнений нулевого порядка

$$\begin{aligned} F_0''' + \frac{1}{\text{Da}} H_0 + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{4}{5} F_0 F_0'' - \frac{3}{5} (F_0')^2 \right) &= 0, \\ H_0'' + \frac{4}{5} F_0 H_0' - \frac{1}{5} F_0' H_0 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

с граничными условиями

$$F_0(0) = 0, \quad F_0'(0) = 0, \quad H_0'(0) = -1, \quad F_0'(\infty) = 0, \quad H_0(\infty) = 0. \quad (16)$$

Система уравнений (15), (16) является системой нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Для ее решения используется метод понижения порядка и линеаризация уравнений при помощи итерационной процедуры путем введения некоторых первоначальных профилей скоростей и температуры, удовлетворяющих граничным условиям [7]. В качестве критерия сходимости принимается норма разности значений сеточной функции на двух соседних итерациях.

На рисунках 1, 2 представлены зависимости функции тока и температуры, полученные из решения задачи (15), (16) при различных значениях определяющих параметров.

Решения системы уравнений для первого приближения (F_1, H_1) получаются аналогично решениям для нулевого приближения. Зависимость температуры на стенке и касательного напряжения представляются в виде следующих степенных рядов:

$$\begin{aligned} \theta_s &= x^{1/5} \left(H_0(0) + x^{1/5} H_1(0) + x^{2/5} H_2(0) + x^{3/5} H_3(0) + \dots \right), \\ \tau_w &= x^{2/5} \left(F_0'(0) + x^{1/5} F_1'(0) + x^{2/5} F_2'(0) + x^{3/5} F_3'(0) + \dots \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\tau_w = \partial u / \partial y$ при $y = 0$. Аналитические зависимости искомых характеристик для различных значений определяющих параметров представлены в таблице 1.

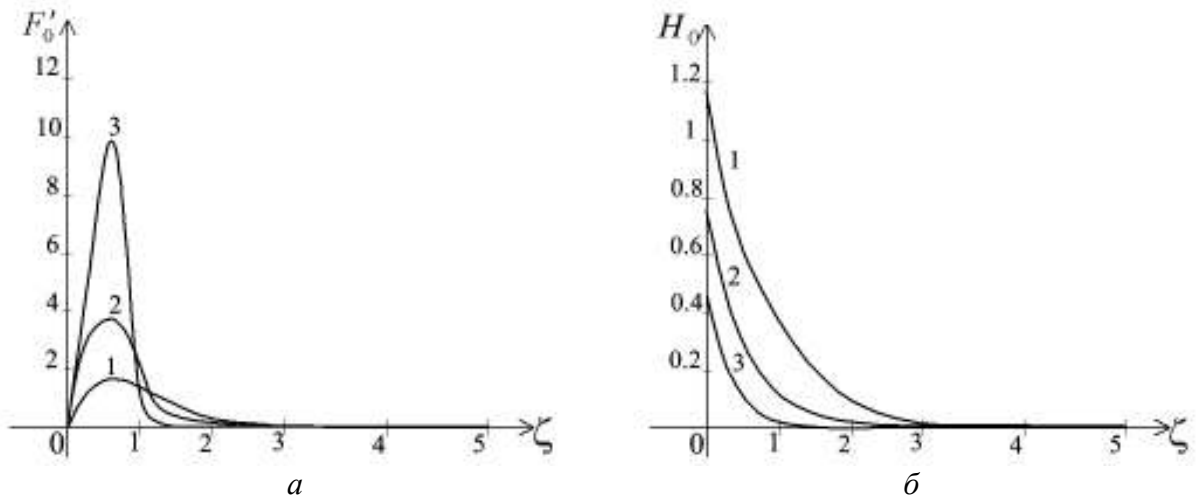


Рис. 1. Зависимости функции тока F'_0 (а) и температуры H_0 (б) от координаты ζ при $Pr = 1$ и различных значениях Da : 1 — 10^{-1} ; 2 — 10^{-2} ; 3 — 10^{-3}

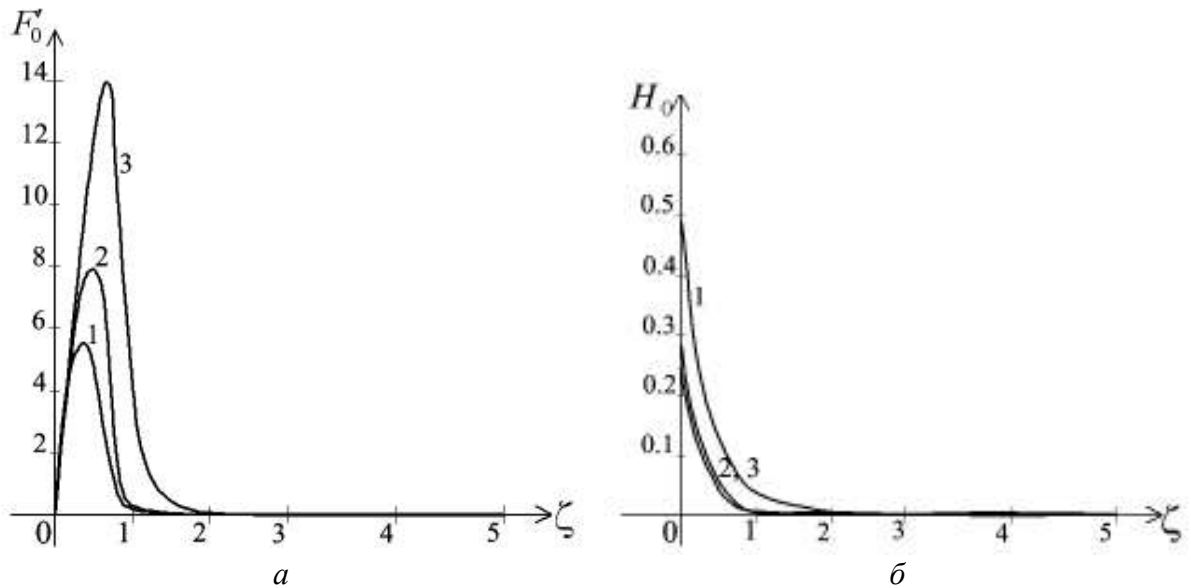


Рис. 2. Зависимости функции тока F'_0 (а) и температуры H_0 (б) от координаты ζ при $Da = 10^{-3}$ и различных значениях Pr : 1 — 0,1; 2 — 0,72; 3 — 10.

Таблица 1. Зависимость касательного напряжения и температуры на стенке от значений Da и Pr для малых x

Pr = 1			
	Da = 10^{-1}	Da = 10^{-2}	Da = 10^{-3}
τ_w	$x^{2/5} (4,887 + 1,610 x^{1/5} + \dots)$	$x^{2/5} (18,110 + 9,811 x^{1/5} + \dots)$	$x^{2/5} (63,933 + 65,887 x^{1/5} + \dots)$
θ_s	$x^{1/5} (1,180 + 1,251 x^{1/5} + \dots)$	$x^{1/5} (0,746 + 0,500 x^{1/5} + \dots)$	$x^{1/5} (0,472 + 0,199 x^{1/5} + \dots)$
Da = 10^{-3}			
	Pr = 0,1	Pr = 0,72	Pr = 10
τ_w	$x^{2/5} (48,517 + 14,906 x^{1/5} + \dots)$	$x^{2/5} (62,168 + 56,172 x^{1/5} + \dots)$	$x^{2/5} (74,385 + 56,684 x^{1/5} + \dots)$
θ_s	$x^{1/5} (0,603 + 0,321 x^{1/5} + \dots)$	$x^{1/5} (0,484 + 0,209 x^{1/5} + \dots)$	$x^{1/5} (0,422 + 0,210 x^{1/5} + \dots)$

3.2. Решения для больших значений продольной координаты x

При больших значениях продольной координаты x теплоотдача на поверхности определяется граничными условиями Ньютона. Тогда для описания течения далеко вниз по потоку используются преобразования вида [1]

$$\Psi = xf(x, y), \quad \theta = xh(x, y), \quad (18)$$

при которых координата y остается неизменной. В результате применения преобразования (18) к уравнениям (9), (10) получается новая система

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{1}{\text{Pr}} \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1}{\text{Da}} \left(h - \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + f \frac{\partial h}{\partial y} - h \frac{\partial f}{\partial y} &= x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -h - x^{-1}, \quad y = 0, \\ f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Из тепловых граничных условий видно, что решение следует представить в виде разложения по обратным степеням x , при этом система уравнений для нулевого приближения преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} f_0''' + \frac{1}{\text{Pr}} (f_0 f_0'' - (f_0')^2) + \frac{1}{\text{Da}} (h_0 - f_0') &= 0, \\ h_0'' + f_0 h_0' - f_0' h_0 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = 0, \quad h_0'(0) + h_0(0) = 0, \\ f_0'(\infty) = 0, \quad h_0(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку решение для больших x является асимптотическим, то достаточно удержать главные члены в разложениях $f(x, y) = f_0(y) + O(x^{-1})$, $h(x, y) = h_0(y) + O(x^{-1})$. Касательное напряжение и температура на стенке представляются в виде степенных рядов:

$$\tau_w = xf_0'(0) + \dots, \quad \theta_s = xh_0(0) + \dots \quad (23)$$

Полученные результаты представлены на рисунках 3–4 и в таблице 2 аналогично тому, как представлены искомые величины при малых значениях продольной координаты x .

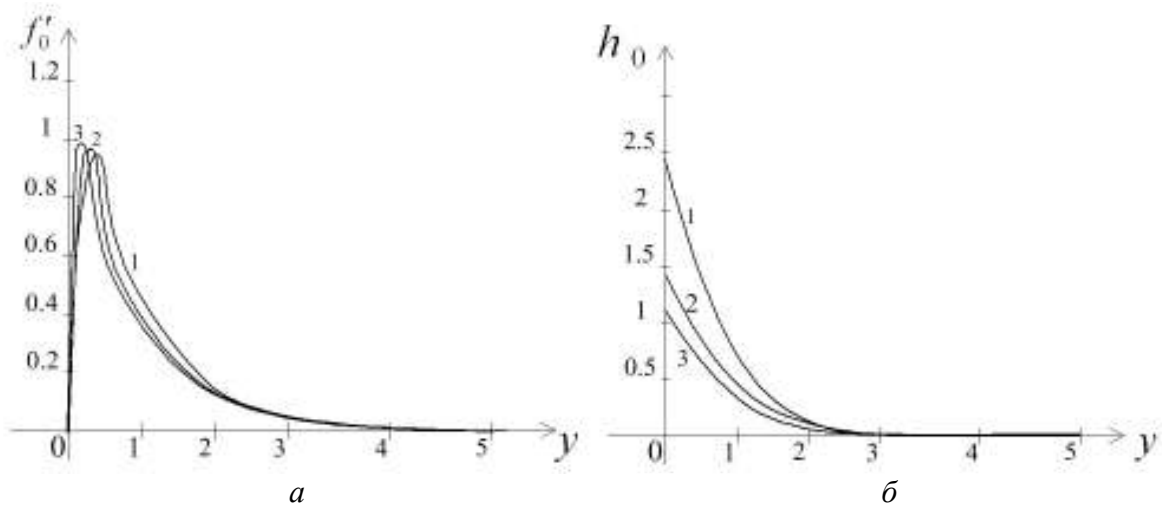


Рис. 3. Зависимости функции тока f'_0 (а) и температуры h_0 (б) от y при $Pr = 1$ и различных значениях Da : 1 — 10^{-1} ; 2 — 10^{-2} ; 3 — 10^{-3}

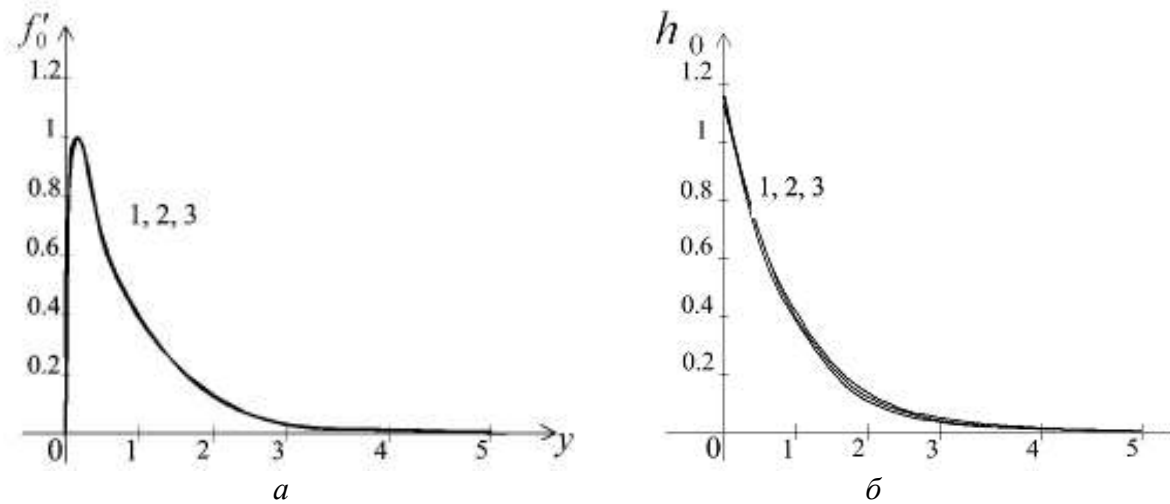


Рис. 4. Зависимости функции тока f'_0 (а) и температуры h_0 (б) от y при $Da = 10^{-3}$ и различных значениях Pr : 1 — 0,1; 2 — 0,72; 3 — 10

Таблица 2. Зависимость касательного напряжения и температуры на стенке от значений Da и Pr для больших x

Pr = 1			
	Da = 10^{-1}	Da = 10^{-2}	Da = 10^{-3}
τ_w	5,452 x + ...	11,351 x + ...	22,724 x + ...
θ_s	2,423 x + ...	1,359 x + ...	1,142 x + ...
Da = 10^{-3}			
	Pr = 0.1	Pr = 0.72	Pr = 10
τ_w	22,023 x + ...	22,815 x + ...	22,786 x + ...
θ_s	1,120 x + ...	1,134 x + ...	1,129 x + ...

3.3. Численное решение полных уравнений пограничного слоя

Численное решение уравнений (9), (10), справедливое для всех x , осуществляется методом непрерывных преобразований [4]. Этот метод использует составные преобразования переменных [1], отражающие особенности решения как для малых, так и для больших x :

$$\Psi = x^{4/5}(1+x)^{1/5} \bar{f}(x, \bar{\eta}), \quad \theta = x^{1/5}(1+x)^{4/5} \bar{h}(x, \bar{\eta}), \quad \bar{\eta} = \frac{y(1+x)^{1/5}}{x^{1/5}}, \quad (24)$$

которые при $x \rightarrow \infty$ принимают вид преобразования координат для течения далеко вниз по потоку (18), а при $x \rightarrow 0$ — преобразования координат для малых x (11).

С учетом (24) уравнения пограничного слоя записываются в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^3} + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5} x(1+x)^{-1} \right) \bar{f} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^2} - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} x(1+x)^{-1} \right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \right)^2 \right) + \frac{1}{\text{Da}} \left(\bar{h} - x^{2/5} (1+x)^{-2/5} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \right) = \\ & = x \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x \partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^2} \right), \\ & \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{\eta}^2} + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5} x(1+x)^{-1} \right) \bar{f} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}} - \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} x(1+x)^{-1} \bar{h} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \right) = x(1+x) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} & \bar{f} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}} = -(1+x) - x^{1/5} (1+x)^{-1/5} \bar{h} \quad \text{при } \bar{\eta} = 0, \\ & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \rightarrow 0, \quad \bar{h} \rightarrow 0 \quad \text{при } \bar{\eta} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (26)$$

Для исключения сингулярности решения при $x \rightarrow 0$ в производной по переменной x используется преобразование координат $\xi = x^{1/5}$. Тогда уравнения (25) и граничные условия (26) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^3} + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\left(\frac{4 + 5\xi^5}{5 + 5\xi^5} \right) \bar{f} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^2} - \left(\frac{3 + 5\xi^5}{5 + 5\xi^5} \right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \right)^2 \right) + \frac{1}{\text{Da}} \left(\bar{h} - \frac{\xi^2}{(1 + \xi^5)^{2/5}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \right) = \\ & = \frac{\xi}{5} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^2} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{\eta}^2} + \left(\frac{4 + 5\xi^5}{5 + 5\xi^5} \right) \bar{f} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}} - \left(\frac{1 + 5\xi^5}{5 + 5\xi^5} \right) \bar{h} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\xi}{5} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}} \right),$$

$$\bar{f}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}}(\xi, 0) + \xi(1 + \xi^5)^{-1/5} \bar{h}(\xi, 0) = -(1 + \xi^5)^{-1} \quad \text{при } \bar{\eta} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}}(\xi, \infty) \rightarrow 0, \quad \bar{h}(\xi, \infty) \rightarrow 0 \quad \text{при } \bar{\eta} \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Процедура численного решения, примененная к системе уравнений (27), (28), включает следующие шаги: понижение порядка с третьего до второго у первого уравнения системы; разбиение двумерной области $(\xi, \bar{\eta})$ равномерной сеткой с разными шагами по переменным ξ и $\bar{\eta}$; предельное значение поперечной координаты принимается равным 10. Частные производные, относящиеся к переменной $\bar{\eta}$, аппроксимируются центральными разностями, а производные, относящиеся к переменной ξ , — разностями назад, что позволяет свести полученную систему уравнений к четырехточечной краевой задаче. Для решения системы уравнений используются два итерационных процесса, основанные на последовательной замене вычисленных значений. В каждом внутреннем итерационном процессе (по переменной $\bar{\eta}$) переменная ξ фиксируется. Полученная система уравнений решается методом прогонки. Внутренние итерации проводятся до тех пор, пока критерий сходимости вычислений не станет меньше значения 10^{-4} для каждого фиксированного значения ξ . Устойчивость процесса зависит от шага по переменной ξ . Во внешнем итерационном процессе значения ξ меняются от 0 до 5, с каждым последующим итерационным шагом значения, зависящие от этой переменной, обновляются.

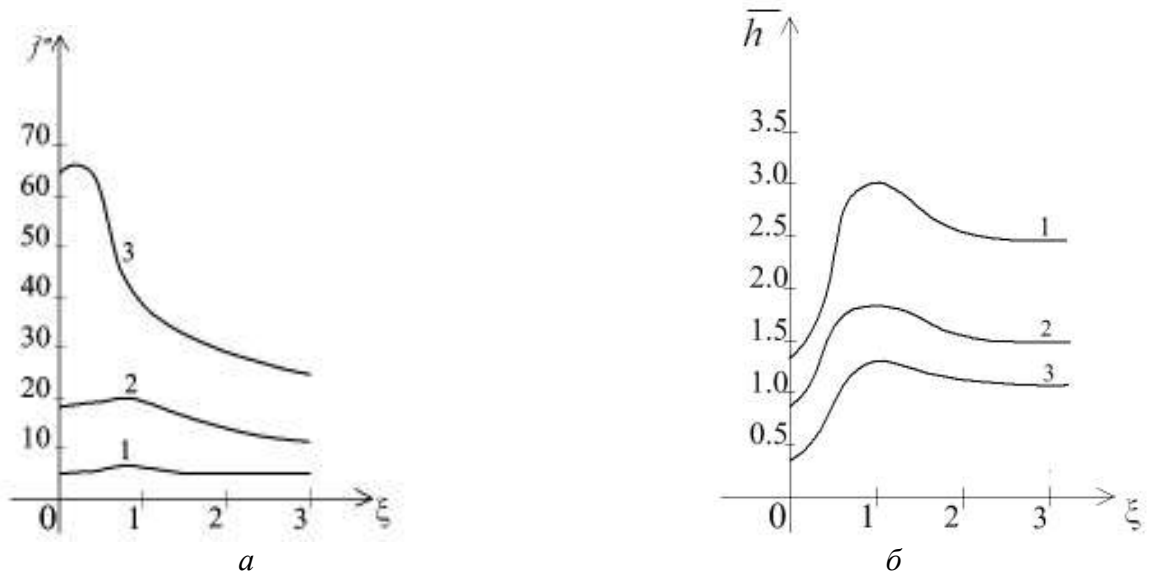


Рис. 5. Функции $\bar{f}''(\xi, 0)$ (а) и $\bar{h}(\xi, 0)$ (б), полученные из численного решения уравнений (27), (28) для $Pr = 1$ и Da : 1 — 10^{-1} ; 2 — 10^{-2} ; 3 — 10^{-3}

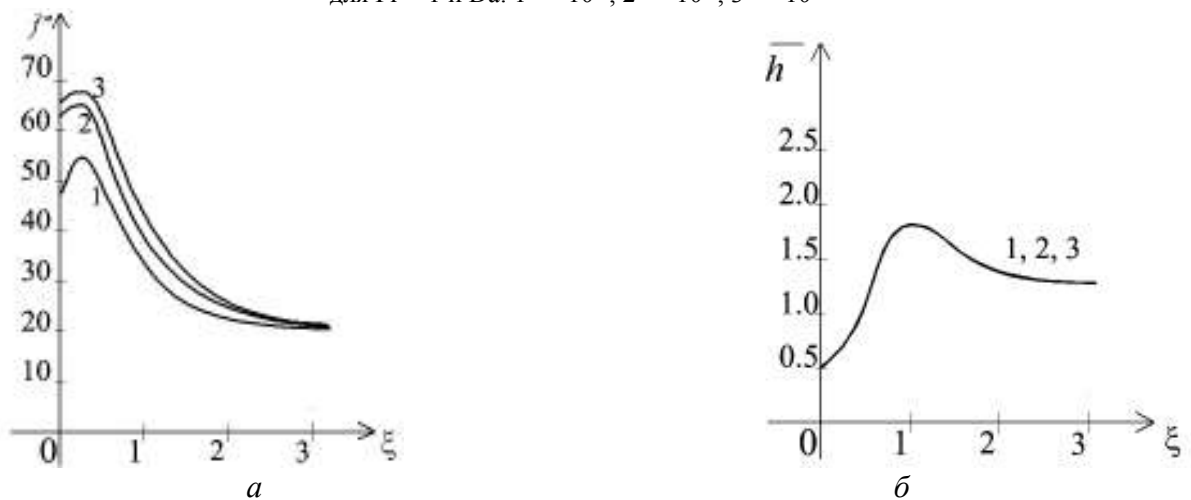


Рис. 6. Функции $\bar{f}''(\xi, 0)$ (а) и $\bar{h}(\xi, 0)$ (б), полученные из численного решения уравнений (27), (28) для $Da = 10^{-3}$ и Pr : 1 — 0,1; 2 — 0,72; 3 — 10

Анализ решений для передней кромки, решений в области больших x и численных решений полных уравнений позволяет говорить о хорошем согласовании результатов. Результаты, представленные на рисунках 5, 6, свидетельствуют о возможности построения гладкого решения, переходящего от одной асимптотической формы (для малых x) к другой (для больших значений продольной координаты)

4. Заключение

В работе проведен анализ полных уравнений вязкого течения жидкости в пористой среде при тепловых граничных условиях третьего рода на вертикальной поверхности. Впервые, для таких граничных условий, получены безразмерные комплексы, описывающие процесс свободноконвективного переноса, и определена область применимости уравнений пограничного слоя.

На основе приближения пограничного слоя исследовано влияние граничных и инерционных членов уравнения движения на характеристики свободноконвективного потока и теплоотдачу от поверхности. Показано существенное повышение теплоотдачи на поверхности по сравнению с моделью, предложенной в работе [3].

Литература

1. Merkin J.H. Natural-convection boundary-layer flow on a vertical surface with Newtonian heating // Int. J. Heat and Fluid Flow. – 1994. – N. 15 (5). – P. 392-398.
2. Nield D.A., Bejan A.. Convection in Porous Media. – Springer, 2006. – 640 p.
3. Lesnic D., Ingham D.B., Pop I. Free convection boundary-layer flow along a vertical surface in a porous medium with Newtonian heating // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1999. – N. 42. – P. 2621-2627.
4. Kim S.J., Vafai K. Analysis of natural convection about a vertical plate embedded in a porous medium // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1988. – N. 32(4). – P. 665-677.
5. Hong J.T., Yamada Y., Tien C.L. Effect of non-Darsian and nonuniform porosity on vertical plate natural convection in porous media // Heat Transfer. – 1988. – N. 1. – P. 76-83.
6. Sparrow E.M., Gregg J.L. Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux // Trans. ASME. – 1956. – N. 78. – P. 435-440.
7. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1982. – 296с.