

## СОПРЯЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМО СРЕДНИХ ПОЛЕЙ И КАСКАДНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПРОБЛЕМЕ ГАЛАКТИЧЕСКОГО ДИНАМО

Р.А. Степанов<sup>1</sup>, П.Г. Фрик<sup>1</sup>, Д.Д. Соколов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, 614013, Россия*

<sup>2</sup>*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 119899, Россия*

Предложена модель галактического динамо, включающая уравнения индукции крупномасштабного магнитного поля, записанное в приближении альфа-омега динамо, и каскадную модель магнитогидродинамической турбулентности, которая позволяет вычислять коэффициенты турбулентного переноса, входящие в уравнения средних полей. Как модель альфа-омега динамо, так и каскадная модель турбулентности изучены достаточно подробно, но их совместное использование ставит новые вопросы, связанные с корректным описанием взаимодействия крупномасштабных и мелкомасштабных полей. В данной работе сопряжение моделей выполнено исходя из строгого соблюдения всех законов сохранения идеальной магнитной гидродинамики. Даны примеры расчета динамики магнитного поля и показана роль отдельных механизмов взаимодействия крупномасштабного поля и турбулентности.

## COUPLING OF MEAN-FIELD EQUATION AND SHELL MODEL OF TURBULENCE IN THE CONTEXT OF GALACTIC DYNAMO PROBLEM

R. Stepanov<sup>1</sup>, P. Frick<sup>1</sup> and D. Sokoloff<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Continuous Media Mechanics RAS, Perm, 614013, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow State University, Moscow, 119899, Russia*

A model of the galactic dynamo has been proposed. It includes the equation of large-scale magnetic field induction written in terms of alpha-omega dynamo approximation and the shell model of magnetohydrodynamic turbulence, which allows evaluation of the turbulent transfer coefficients entering in the mean field equation. Although both models have been studied extensively, their simultaneous usage poses new questions concerning a correct description of the interaction between large-scale and small-scale fields. In this work coupling of the models has been made with the observance of all laws of conservation of the of the ideal magnetic hydrodynamics. As an example, several numerical simulations of the magnetic field dynamics have been carried out and the role of separate mechanisms of the large-scale field –turbulence interaction has been shown.

### 1. Введение

Эффект самовозбуждения магнитного поля является пороговым и возникает при достаточно больших значениях магнитного числа Рейнольдса  $Rm = UL/v_m \gg 1$  ( $L$  — характерный масштаб турбулентности;  $U$  — характерная скорость;  $v_m$  — магнитная вязкость). У большинства сред, в которых можно ожидать появления динамо, магнитная вязкость существенно превосходит кинематическую вязкость  $\nu$  (то есть жидкости

характеризуются малым магнитным числом Прандтля  $Pm = \nu/v_m \ll 1$ ). Это означает, что динамо может реализоваться только при очень больших гидродинамических числах Рейнольдса ( $Re = UL/\nu \gg 1$ ) и течение существенно турбулентно. Учет турбулентности при этом обязателен, так как она приводит к появлению дополнительных механизмов как

генерации, так и диссипации магнитного поля в движущейся проводящей жидкости. Несмотря на огромный прогресс компьютерной техники, полное прямое воспроизведение поведения турбулентных систем в режиме динамо остается далеко за пределами вычислительных возможностей. Однако в последнее время появился подход, который позволяет, как кажется, существенно изменить ситуацию к лучшему [1]. Конечно, по-прежнему речь не идет о воспроизведении явления во всей полноте. Идея подхода состоит в том, что из огромного числа степеней свободы, формально необходимых для описания мелкомасштабного поля, реальный интерес представляет лишь относительно небольшое число переменных, которые описывают поведение усредненных характеристик этого поля. Для их описания могут использоваться так называемые каскадные модели турбулентности, которые заменяют сложные уравнения в частных производных относительно простой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающей численные исследования при реальных значениях характерных чисел. Принципы построения этой системы основаны на выполнении каскадной моделью законов сохранения, справедливых для полных уравнений. Для описания крупномасштабных переменных предлагается сохранять обычные осредненные уравнения (уравнения среднего поля), а входящие в них турбулентные коэффициенты переноса определять по каскадным переменным.

Сам по себе аппарат каскадных моделей хорошо отработан [2], и по нему имеется большое число публикаций. Проблема же в том, что необходимо разработать процедуру сопряжения каскадных моделей и дифференциальных уравнений, описывающих крупномасштабные переменные. Сопряжение удается построить, исходя из тех же законов сохранения, на основе которых построены каскадные модели. Конечно, конкретная разработка искомого сопряжения зависит от специфики рассматриваемой задачи, однако ряд возникающих при этом проблем носит общий характер. До сих пор последовательное сопряжение уравнений среднего поля и каскадной модели удавалось выполнить только для сравнительно простых задач, в которых часть законов сохранения не играла существенной роли (напр. [3]). Цель данной работы — решение проблемы сопряжения в полной постановке. В качестве примера выбрана простейшая, но физически значимая, задача о генерации крупномасштабного магнитного поля в тонком дифференциально вращающемся диске хорошо проводящей жидкости со спиральной турбулентностью (так называемая локальная задача дискового динамо). Эта задача интересна не только в контексте изучения происхождения и эволюции крупномасштабных магнитных полей спиральных галактик [4], но и в контексте роли магнитной спиральности в процессах динамо [5].

## 2. $\alpha\Omega$ -динамо

Для описания эволюции среднего магнитного поля  $\mathbf{B}$  в турбулентной проводящей среде используются осредненные уравнения Максвелла в нерелятивистском приближении, предложенные Штеенбеком, Краузе и Рэдлером [6]:

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\alpha \mathbf{B}) - \beta \nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость;  $\alpha$  — коэффициент, определяемый свойствами мелкомасштабной турбулентности и отвечающий за генерацию магнитного поля турбулентностью;  $\beta$  — турбулентная магнитная диффузия.

Рассматривается тонкий турбулизованный диск полутолщиной  $h$ , вращающийся с угловой скоростью  $\Omega$ , направленной вдоль оси  $z$  цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ . Поскольку объектом исследования является осесимметричное магнитное поле,

условие  $\partial_\varphi = 0$  позволяет вместо полей  $B_r$ ,  $B_z$  ввести одну величину — азимутальную компоненту векторного потенциала  $\mathbf{A}$  (где  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ):

$$B_r = -\partial_z A_\varphi, \quad B_z = -r^{-1} \partial_r (r A_\varphi).$$

При обозначениях  $A_\varphi \equiv A(z)$ ,  $B_\varphi \equiv B(z)$  безразмерные уравнения среднего осесимметричного поля, записанные для заданной точки  $r$ , принимают вид:

$$\partial_t A = \alpha k_L B + \beta k_L^2 \partial_{zz}^2 A, \quad (2)$$

$$\partial_t B = -G \partial_z A + \beta k_L^2 \partial_{zz}^2 B. \quad (3)$$

Здесь время измеряется в единицах времени оборота вихрей энергонесущего масштаба  $L$ ,  $T = L/U$ , а  $U$  — типичная турбулентная скорость в этом масштабе. Типичное значение  $T = 10^7$  лет  $\approx 3 \cdot 10^{14}$  с. Магнитный потенциал измеряется в единицах  $hB$ , коэффициент  $\alpha$  — в единицах  $U$ , а  $\beta$  — в единицах  $UL$ . Координата  $z$  измеряется в единицах  $h$ , так что  $-1 \leq z \leq 1$ . Наличие в задаче двух характерных масштабов приводит к появлению дополнительного параметра  $k_L = L/h$ ; для спиральных галактик типичное значение  $k_L = 1/5$ . Безразмерная величина  $G = r \partial_r \Omega L/U$  является мерой дифференциальности вращения. Обычно  $G = 0,2$ ,  $r \partial_r \Omega = 20$  км·сек<sup>-1</sup>·кпс<sup>-1</sup>,  $L = 0,1$  кпс (килопарсек — астрономическая единица длины, 1 кпс  $\approx 3 \cdot 10^{19}$  м),  $U = 10$  км/сек. Здесь используется  $G$  вместо динамо-числа  $D = -r \partial_r \Omega \alpha h^3 / \beta^2 = 9 G k_L^{-3} (\alpha/U)$ , удобного в кинематической теории динамо. Для численных оценок принято  $\alpha/U = 0,04 \div 0,1$ , так что  $D = -(10 \div 25)$ . В этих единицах возраст Вселенной составляет  $10^{10}$  лет/ $T = 10^3$ . В уравнении (2) не учитывается слагаемое  $-\partial_z \beta \cdot \partial_r B_z$ , так как в тонком диске  $B_z \ll B_r$  и  $B_z \ll B_\varphi$ , а в уравнении (3) опущен член  $\partial_z (\alpha B_r)$ , то есть предполагается, что  $G \gg \alpha/h$ . Величина  $B_z$  находится из условия соленоидальности поля  $\mathbf{B}$ . Распределение спиральности по диску обычно принимается в виде  $\alpha(z) = \alpha_0 \sin \pi z$  [4].

К уравнениям генерации добавляются граничные условия

$$B(\pm 1) = 0, \quad \partial_z A(\pm 1) = 0, \quad (4)$$

которые следуют из вакуумного приближения за пределами галактического диска. Поскольку  $\alpha(z)$  — антисимметричная функция, решение уравнений (2)–(3) разлагается на четные (квадрупольные) и нечетные (дипольные) моды с тем, чтобы ограничиться рассмотрением половины диска  $0 \leq z \leq 1$ . Далее будут обсуждаться лишь квадрупольные решения, для которых справедливо граничное условие

$$\partial_z B(0) = 0, \quad A(0) = 0. \quad (5)$$

Система линейных дифференциальных уравнений (2)–(3) с граничными условиями (4), (5) и некоторыми начальными условиями определяет характер эволюции крупномасштабного магнитного поля.

### 3. Каскадные уравнения МГД-турбулентности

Для описания процессов генерации и переноса магнитного поля мелкомасштабной турбулентностью используется каскадная модель, предложенная в [7]. Основная идея каскадных моделей турбулентности состоит в построении цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы спектрального переноса энергии в развитой турбулентности. В случае МГД-турбулентности задача состоит в том, чтобы сохранить для каждого интервала волновых чисел  $k_n < |k| < k_{n+1}$ ,  $k_n = \lambda^n$  (далее  $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$  — золотое сечение) только пару комплексных переменных  $u_n$  и  $b_n$ , характеризующих пульсации скорости и магнитного поля в соответствующих масштабах, и записать для этих переменных систему, сохраняющую базовые свойства исходных уравнений магнитной гидродинамики, а именно тип нелинейности и законы сохранения, которым исходные уравнения удовлетворяют в пределе больших чисел Рейнольдса (как гидродинамического, так и магнитного).

Следует подчеркнуть, что каскадные модели, наряду с положительно определенными интегралами движения, такими как энергия или энтропия (последняя является интегралом при двумерном движении жидкости, и каскадные модели двумерной турбулентности обеспечивают сохранение ее интегрального аналога), могут сохранять и величины, знак которых заранее неизвестен. В гидродинамике такие интегралы движения обычно называются спиральностями. Термин появился с обнаружением факта, что при несжимаемом движении идеальной жидкости, наряду с энергией, сохраняющейся величиной является среднее скалярное произведение скорости на ее ротор. Это произведение и характеризует преобладание спиральных структур одного знака. В каскадной модели знак спиральности определяется преобладанием вклада четных либо нечетных ярусов в соответствующую величину. В реальную космическую турбулентность спиральность вносится внешней силой, например, силой Кориолиса, либо является начальным условием при формировании турбулентности.

Обезразмеренные уравнения используемой каскадной модели имеют вид

$$\left(d_t + \frac{k_n^2}{\text{Re}}\right)u_n = ik_n \left\{ u_{n+1}^* u_{n+2}^* - b_{n+1}^* b_{n+2}^* + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} (u_{n-1}^* u_{n+1}^* - b_{n-1}^* b_{n+1}^*) - \frac{1}{\lambda^3} (u_{n-2}^* u_{n-1}^* - b_{n-2}^* b_{n-1}^*) \right\} + F_n, \quad (6)$$

$$\left(d_t + \frac{k_n^2}{\text{Rm}}\right)b_n = \frac{ik_n}{\lambda(1+\lambda)} \left\{ u_{n+1}^* b_{n+2}^* - b_{n+1}^* u_{n+2}^* + u_{n-1}^* b_{n+1}^* - b_{n-1}^* u_{n+1}^* + u_{n-2}^* b_{n-1}^* - b_{n-2}^* u_{n-1}^* \right\} + G_n. \quad (7)$$

Уравнения записаны в безразмерной форме. Здесь  $\text{Re}$  — гидродинамическое число Рейнольдса;  $\text{Rm}$  — магнитное число Рейнольдса;  $d_t$  — производная по времени (за единицу времени снова принято характерное время оборота вихря на максимальном масштабе  $T = L/U$ ). Структура нелинейных слагаемых в уравнениях (6)–(7) такова, что в расчет принимаются только локальные взаимодействия (обмен энергией происходит между соседними масштабами), а в пределе ( $\text{Re}, \text{Rm} \rightarrow \infty$ ) уравнения сохраняют три квадратичные величины, соответствующие трем известным интегралам движения, входящим в уравнения магнитной гидродинамики: полной энергии  $E = E^u + E^b$  (где  $E^u = \sum |u_n|^2$ ,  $E^b = \sum |b_n|^2$ ); перекрестной спиральности  $H^c = \sum (u_n b_n^* + b_n u_n^*)$ ; магнитной

спиральности  $H^b = \sum (-1)^n |b_n|^2 / k_n$ .

Величины  $F_n$  и  $G_n$  описывают все воздействия на мелкомасштабные поля со стороны внешних сил и крупномасштабных полей

$$F_n = f_n^I + f_n^C + f_n^B, \tag{8}$$

$$G_n = g_n^I + g_n^B. \tag{9}$$

Слагаемые  $f_n^I$  и  $g_n^I$  отвечают за внешние источники энергии. Поскольку рассматривается задача о генерации магнитного поля течением, то в дальнейшем  $g_n^I \equiv 0$ , а  $f_n^I$  вносит энергию в наибольшие масштабы скорости (а именно, в ярусы  $n = 0$  и  $n = 1$ ), поддерживая турбулентное течение. Приток спиральности определяется силой

$$f_n^C = C(-1)^n \frac{|u_n|^2 + |u_{n+1}|^2}{|u_n|^2} u_n, \tag{10}$$

которая не меняет энергию системы ( $C$  — некоторый параметр).

Члены  $f_n^B$  и  $g_n^B$  описывают взаимодействие мелкомасштабных переменных с крупномасштабным магнитным полем и будут определены в следующем разделе.

#### 4. Сопряжение средних и турбулентных полей

Считается [8], что коэффициент  $\alpha$  представляет собой сумму двух составляющих. Первая составляющая в уравнениях среднего поля обычно оценивается с использованием спиральности мелкомасштабного поля следующим образом:

$$\alpha^u \approx -\frac{1}{3} \tau \langle \mathbf{u} \cdot \text{rot} \mathbf{u} \rangle. \tag{11}$$

Вторая компонента  $\alpha$  связана с токовой спиральностью, определяемой плотностью тока  $\mathbf{j}$ :

$$\alpha^b \approx \frac{1}{3} \tau \langle \mathbf{j} \cdot \text{rot} \mathbf{j} \rangle, \tag{12}$$

Оценки (11), (12) содержат множитель  $\tau$ , который имеет размерность времени. Если предположить, что  $\tau$  определяется временем оборота вихря соответствующего масштаба, то по характеристикам мелкомасштабной турбулентности можно вычислить  $\alpha$ :

$$\alpha^u = \sum_n \tau_n (-1)^n k_n |u_n|^2 = \sum_n (-1)^n |u_n|, \tag{13}$$

$$\alpha^b = \sum_n (-1)^n |b_n|. \tag{14}$$

Тогда полный  $\alpha$ -эффект определяется как

$$\alpha = (\alpha^u + \alpha^b) \sin(\pi z). \quad (15)$$

Диффузия крупномасштабного магнитного поля описывается коэффициентом  $\beta$ , который оценивается как

$$\beta \approx \frac{1}{3} \tau \langle u^2 \rangle \quad (16)$$

В терминах каскадных переменных это соответствует выражению

$$\beta = \frac{1}{3} \sum_n k_n^{-1} |u_n| + v_m, \quad (17)$$

где  $v_m = \text{Rm}^{-1}$  — омическая диффузия. Соотношения (13), (14) и (17) справедливы при  $\text{Rm} < 1$ , однако при больших значениях  $\text{Re}$  и  $\text{Rm}$  это условие не существенно, так как влияние турбулентности в основном определяется длинноволновой частью спектра, а вклад его мелкомасштабной части в диффузию среднего поля незначителен.

Уравнения (13)–(14) и (17) задают влияние мелкомасштабного поля на генерацию крупномасштабного поля. Для определения обратной связи используется закон сохранения полной энергии и магнитной диффузии в бездиссипативном пределе.

Изменение характеристик крупномасштабного магнитного поля за счет действия  $\alpha$ -эффекта, обусловленного мелкомасштабной турбулентностью масштаба (яруса)  $n$ , определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} I_n^u &= k_L \int_0^1 \partial_z A \partial_z (\alpha_n^u B) dz, \\ I_n^b &= k_L \int_0^1 \left\{ \partial_z A \partial_z (\alpha_n^b B) - k_L \beta_n (\partial_z B)^2 - k_L \beta_n (\partial_{zz}^2 A)^2 \right\} dz, \\ I_n^h &= k_L \int_0^1 \left\{ \alpha_n B^2 - 2k_L \beta_n \partial_z A \partial_z B \right\} dz, \end{aligned} \quad (18)$$

где величина  $I_n^u$  определяет прирост магнитной энергии за счет гидродинамического альфа-эффекта,  $I_n^b$  — за счет магнитного альфа-эффекта, а  $I_n^h$  дает прирост магнитной спиральности за счет альфа-эффекта. Приращения сохраняемых величин (18) в крупномасштабном поле должны компенсироваться их эквивалентной убылью в мелкомасштабной турбулентности, что обеспечивают силы вида

$$\begin{aligned} f_n^B &= -\frac{I_n^u b_n}{u_n^* b_n - u_n b_n^*} \\ g_n^B &= -\frac{u_n (I_n^b + I_{n-1}^b + \lambda I_n^h + \lambda I_{n-1}^h)}{(\lambda + 1)(b_n^* u_n - b_n u_n^*)} \quad \text{для четных } n, \\ g_n^B &= -\frac{u_n (I_n^b + I_{n-1}^b - I_n^h - I_{n-1}^h) \lambda}{(\lambda + 1)(b_n^* u_n - b_n u_n^*)} \quad \text{для нечетных } n \end{aligned} \quad (19)$$

При этом изменение перекрестной спиральности мелкомасштабной турбулентности

равно нулю. Следует заметить, что дифференциальное вращение в моделях  $\alpha\Omega$ -динамо рассматривается как неисчерпаемый источник энергии и спиральности.

### 5. Проблема алайнмента

Заслуживает внимания следующая деталь: в выражениях для сил (19) присутствует характерный знаменатель  $u_n^* b_n - u_n b_n^*$ , отражающий тот факт, что уравнения магнитной гидродинамики описывают специальное состояние — алайнмент, имеющее вид альфвеновской волны — волны, в которой магнитное поле параллельно полю скорости. Для этого состояния оказываются неверными представления о турбулентной диффузии и альфа-эффекте (коллинеарность векторов пульсаций скорости и поля дает  $\nabla \times (v' \times b') = 0$ ) и перестают действовать соотношения (11), (12), (16). Опыт исследования каскадных моделей показывает [9], что для очень больших времен они могут описывать переход всей системы в альфвеновское состояние. Здесь рассматривается случай, когда система существует умеренное время, так что в целом она далека от состояния алайнмента, однако он может происходить локально в данный момент в данном ярусе каскадной модели. В этом случае выражения для сил (19) обращаются в бесконечность.

В принципе, соотношения (11), (12), (16) способны после некоторой переработки учитывать случай алайнмента. Для этого достаточно, например, заменить соотношение (16) на выражение

$$\beta \approx \frac{1}{3} \tau \langle u^2 \rangle (1 - c^2), \tag{20}$$

где  $c$  — коэффициент корреляции между магнитным полем и полем скорости. Очевидно, что такое радикальное предложение требует более широкого обоснования.

В расчетах используется более консервативный путь, состоящий в том, что пропускаются те шаги временной эволюции системы и в тех масштабах, на которых возникает явление алайнмента. В этих масштабах все равно отсутствует генерация магнитного поля. Вычисления проводятся в терминах конечных приращений, так что явные выражения для сил (19) не используются, а расчет выполняется с помощью ниже следующего алгоритма.

Пусть в данной оболочке:  $x$  — поле, энергию которого нужно изменить, а  $y$  — вспомогательное поле, с помощью которого вычисляется перекрестная спиральность;  $x_1$  — новое значение величины  $x$ ;  $\Delta E = x_1 x_1^* - x x^*$  — изменение энергии за шаг по времени  $\Delta t$ . Во-первых, проверяется отсутствие алайнмента в данном ярусе как условие неотрицательности величины

$$D = -4\theta^2 - y y^* \Delta E, \tag{21}$$

где  $\theta = i(xy^* - yx^*)/2$ . Если эта величина положительна, то

$$x_1 = \frac{(xy^* + x^*y) + 2i\sqrt{D} \operatorname{sign} \theta}{2y^*}. \tag{22}$$

Если же  $D < 0$ , то данный шаг в данном ярусе вовсе выпадает из процесса. Изменение

магнитной спиральности осуществляется посредством перераспределения энергии между двумя соседними оболочками с четным и нечетным номером. Таким образом, интегрирование полной системы уравнений проводится в два этапа. На первом этапе решаются уравнения (6), (7) без учета взаимодействия между крупно- и мелкомасштабными переменными, то есть при  $f_n^B = g_n^B = 0$ . На втором этапе по каждой паре оболочек определяются текущие значения  $\alpha$ ,  $\beta$  и соответствующие им приращения значений величин (18). Если требуемый обмен возможен с соблюдением всех законов сохранения, то изменения  $u_n$  и  $b_n$  рассчитываются по формулам (21) и (22), а соответствующие приращения  $A$  и  $B$  — по уравнениям (2)–(3).

## 6. Численные результаты

Уравнения (2)–(3) для двух компонент крупномасштабного поля  $A(z)$  и  $B(z)$  решаются методом конечных разностей 2-го порядка точности. Интегрирование по времени на первом этапе выполняется методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Начальные условия имеют вид

$$A(0, z) = 10^{-5} \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right), \quad B(0, z) = 0, \quad (23)$$

соответствующий наличию слабого затравочного полоидального поля. Все результаты приводятся для фиксированных значений параметров  $G$  и  $k_L$ . Влияние этих параметров на характер генерации крупномасштабного поля представляется понятным как по опыту решения различных численных моделей  $\alpha\Omega$  динамо [10], так и по результатам исследования смешанной модели  $\alpha^2$  динамо [3]. Для динамо-числа берется значение  $G = -0,3$ , обеспечивающее устойчивый режим генерации, а  $k_L = 0,2$ , что соответствует типичному соотношению масштабов в дисковых галактиках. Во всех расчетах числа Рейнольдса равняются  $Re = Rm = 10^6$ , параметр Кориолиса —  $C = 0,1$ , а внешняя сила  $f_n^I$ , действующая в первых двух оболочках, имеет постоянную амплитуду, равную 10-ти и случайную фазу, которая меняется каждые 0,01 единиц времени. Каскадная модель содержит 40 ярусов, а случайные начальные значения  $u_n, b_n$  подчиняются колмогоровскому спектру для развитой турбулентности.

Возможности предложенной модели иллюстрируют результаты трех численных экспериментов, в которых последовательно вводятся новые механизмы, отвечающие за взаимодействие крупномасштабного магнитного поля с мелкомасштабной турбулентностью. В первом эксперименте (Рис. 1) в расчет принимается только гидродинамический альфа-эффект ( $\alpha^b \equiv 0$ ) и не учитывается баланс магнитной спиральности (в формулах (19) полагается  $I_n^h \equiv 0$ ). В этом случае экспоненциальный рост крупномасштабного поля выходит на насыщение при  $t \approx 150$ . Тороидальное поле непосредственно генерируется за счет очень сильного и стабильного механизма дифференциального вращения, и его энергия существенно превосходит энергию полоидального поля, а в ее изменениях отсутствуют быстрые вариации, обусловленные в полоидальном поле сильными флуктуациями турбулентности.

Во втором примере (Рис. 2) по-прежнему учитывается только гидродинамический альфа-эффект, но строго контролируется баланс магнитной спиральности при взаимодействии турбулентности и крупномасштабного магнитного поля. В этом случае преобладание тороидального поля над полоидальным не столь выражено, а процесс



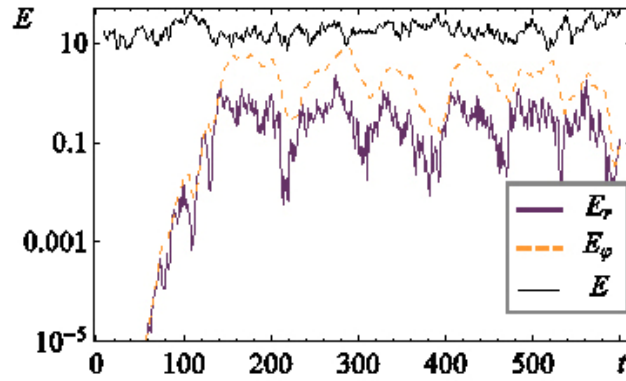


Рис. 1: Эволюция энергии тороидального (толстая линия) и полоидального (пунктир) магнитного полей в турбулентном галактическом диске (энергия турбулентных пульсаций – тонкая черная линия) без учета магнитного альфа-эффекта и без контроля баланса магнитной спиральности

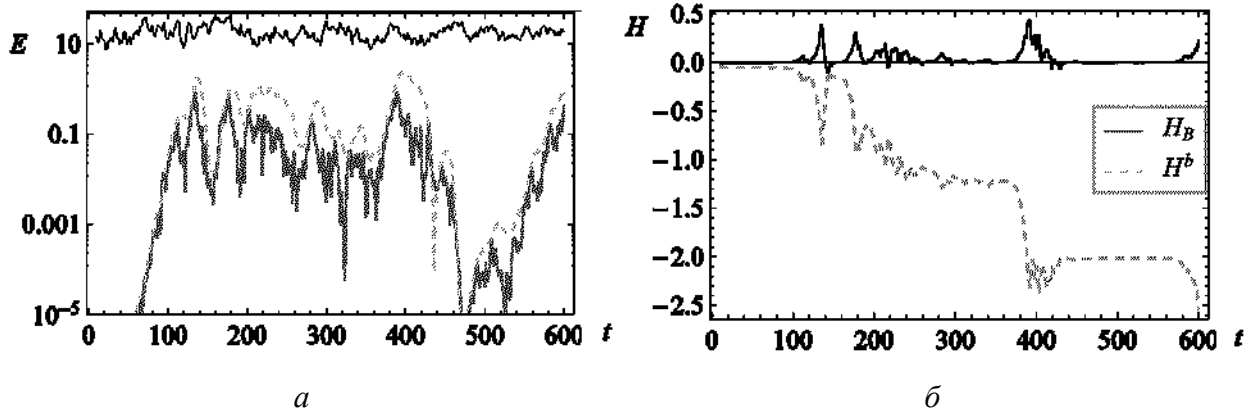


Рис. 2: Эволюция энергии (см. обозначения Рис.1) при строгом балансе магнитной спиральности (а) и вариации магнитной спиральности (б) мелкомасштабного (черная линия) и крупномасштабного (штриховая линия) полей

генерации в целом становится менее устойчивым. На рисунке 2, б показано поведение магнитной спиральности крупномасштабного и мелкомасштабного полей. Видно, что турбулентность, генерируя спиральное крупномасштабное поле, получает взамен магнитную спиральность противоположного знака, которая оседает в длинноволновой части спектра (магнитная спиральность не может переноситься в мелкие масштабы, где эффективна диссипация). Благодаря диффузии накопления магнитной спиральности в крупномасштабном поле не происходит, а накапливающаяся магнитная спиральность мелкомасштабного (турбулентного) магнитного поля может приводить в конце концов к полной блокировке крупномасштабного динамо. Такая блокировка динамо называется «катастрофическим квенчингом». Состояние подобного квенчинга наблюдается в исследуемой модели на интервале времени  $450 < t < 550$ .

В последнем численном эксперименте решаются полные уравнения модели, то есть учитываются обе составляющие альфа-эффекта (гидродинамическая и магнитная), и контролируется баланс энергии и магнитной спиральности. Результаты расчета показаны на рисунке 3. Магнитный альфа-эффект существенно меняет динамику процесса. Периоды наиболее активной генерации крупномасштабного поля также сопровождаются ростом его магнитной спиральности и одновременным накоплением отрицательной магнитной спиральности в турбулентных пульсациях. Однако система быстро справляется с этими всплесками спиральности, избегая тем самым «катастрофического квенчинга». Объясняется это тем, что магнитная составляющая альфа-эффекта, которая в

большей степени зависит от уровня магнитной спиральности, меняет знак альфа-эффекта. Это приводит к кратковременным инверсиям полоидального поля, а при достаточной длительности инверсии — и к изменению знака тороидального магнитного поля (см. рисунок 4, где показана эволюция структуры поля поперек диска на интервале времени  $100 < t < 350$ ). Явление «неудавшейся» инверсии в геомагнетизме называется джерком геомагнитного поля и играет важную роль в объяснении геофизических явлений (см., например, [11]). В геомагнетизме «неудача» такого типа объясняется проникновением магнитного поля в твердое ядро, имеющее диффузионное время большее, чем время магнитной конвекции в основном объеме и, соответственно, тормозящее быстрые переполюсовки поля. Примечательно, что предлагаемая модель позволяет получить подобный эффект без учета влияния граничных условий. Также в процессе генерации наблюдаются периоды спада (например, при  $320 < t < 380$  на рисунке 3, *a*), но этот спад не связан с какой-либо особенностью в поведении магнитной спиральности (Рис. 3, *б*).

Особенности эволюции структуры компонент магнитного поля поперек диска иллюстрирует рисунок 5. Можно видеть, что полоидальное поле характеризуется не только высокочастотными пульсациями во времени, но и значительно более выраженной мелкомасштабной пространственной структурой (в сравнении с тороидальным полем). При этом в эпоху наибольшей активности полоидальное поле сосредоточено вблизи центральной плоскости галактики, а к окончанию цикла активности уходит на периферию, напоминая знаменитые бабочки-диаграммы для солнечной активности (в случае Солнца динамо-волна возникает в средних широтах и распространяется к экватору).

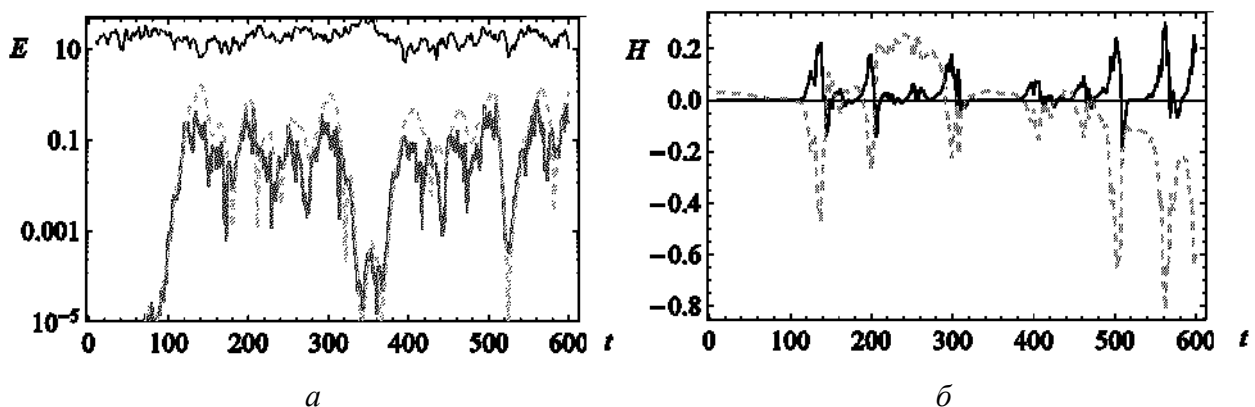


Рис. 3. То же, что на Рис.2, но для полной модели (работают обе составляющие альфа-эффекта и контролируется сохранение магнитной спиральности)

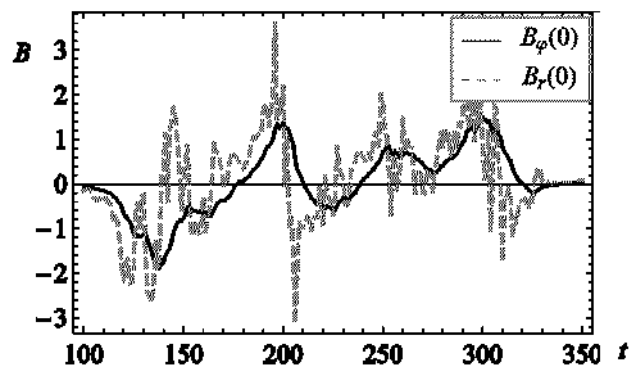
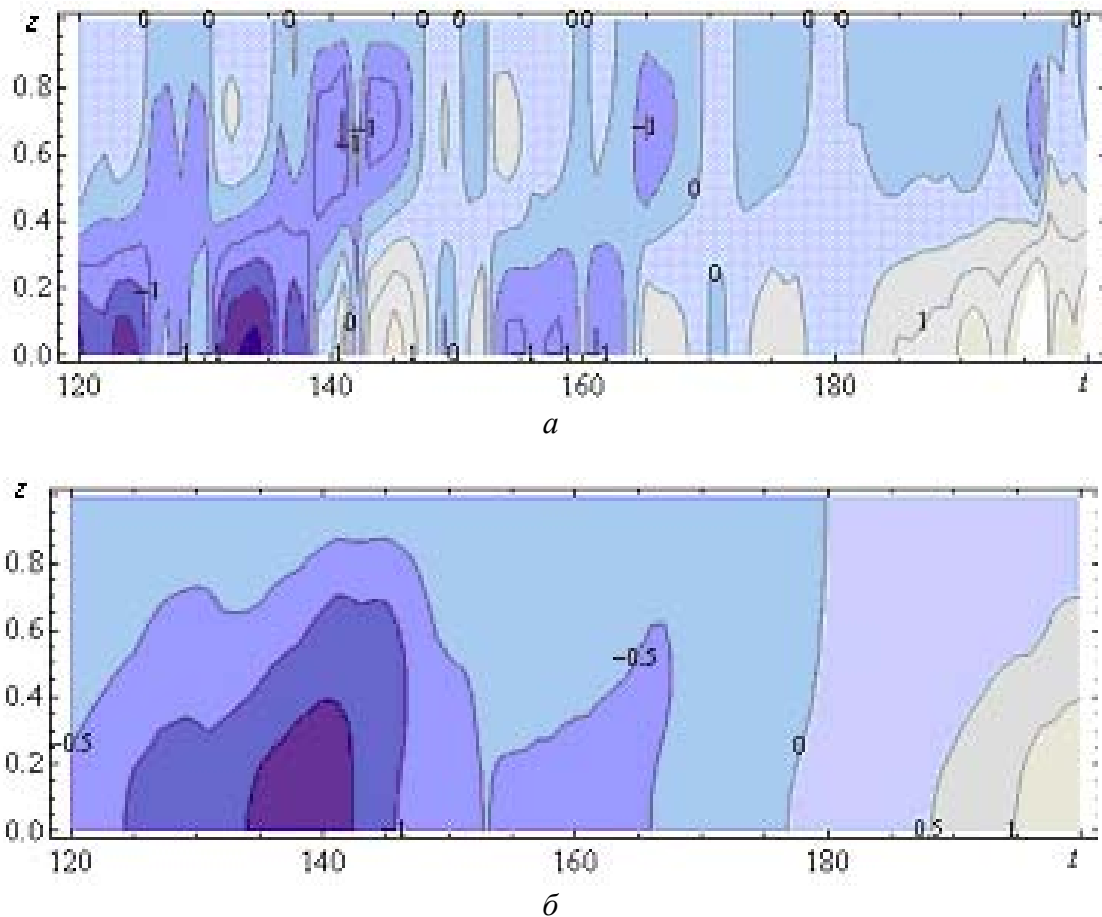


Рис. 4. Эволюция полоидального (светлая линия) и тороидального (черная линия) магнитного полей в центральной галактической плоскости  $z = 0$



**Рис. 5.** Изменение со временем профилей крупномасштабного магнитного поля:  
а – торoidalное  $B_\phi(z)$ ; б – полоидальное  $B_r(z)$

## 7. Выводы

Построена комбинированная модель галактического динамо, объединяющая описание эволюции крупномасштабной и мелкомасштабной составляющей магнитного поля. В качестве основных факторов выделены турбулентный  $\alpha$ -эффект и турбулентная магнитная диффузия, эволюция которых описывается каскадными уравнения турбулентности.

Предложена схема сопряжения крупно- и мелкомасштабных полей на основе законов сохранения идеальной магнитной гидродинамики. Совместный расчет турбулентных эффективных параметров с использованием каскадных уравнений позволяет учесть стохастический характер мелкомасштабного поля. Численно показано, что предложенная модель не только воспроизводит основные режимы генерации галактического магнитного поля, но и дает реалистическую структуру компонент магнитного поля поперек диска.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Пермского края (проекты № 06-01-00234 и № 07-01-96007-р-Урал).

## Литература

1. Фрик П.Г., Соколов Д.Д. Модель многомасштабного МГД-динамо // *Астрономический журнал*. – 2002. – Т. 47, № 6. – С. 511–516.
2. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. – 292с.
3. Frick P., Sokoloff D., Stepanov R. Large-small scales interactions and quenching in  $\alpha^2$ -dynamo // *Phys. Rev. E*. – 2006. – V. 74. – P. 066310.
4. Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М. Магнитные поля галактик. – М.: Наука, 1988. – 280с.
5. Pouquet, A.; Frisch, U.; Leorat, J. Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1976. – V. 77. – P. 321-354
6. Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H. The generation of stellar and planetary magnetic field by turbulent dynamo action // *Z. Naturforschung*. – 1966. – V. A21. – P. 369.
7. Frick P., Sokoloff D. Cascade and dynamo action in a shell model of magnetohydrodynamic turbulence // *Phys. Rev. E*. – 1998. – V. 57. – P. 4155.
8. Frisch U., She Z.S., Sulem P.L. Large-scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect // *Physica D*. – 1987. – V. 28. – P. 382–392.
9. Антонов Т.Ю., Фрик П.Г., Соколов Д.Д. Долговременная эволюция свободно распадающейся МГД-турбулентности // *Доклады РАН*. – 2001. – Т. 377, № 2. – С.170–172.
10. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитны поля в астрофизике. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2006. – С. 384.
11. Кузнецов В.В. Причина ускорения дрейфа северного магнитного полюса: джерк или инверсия // *Геомагнетизм и аэрономия*. – 2006. – Т. 46, № 2. – С. 280–288.