ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.М. Гришин, В.И. Зинченко, К.Н. Ефимов, А.С. Якимов

Томский государственный университет, Томск, 634050, Россия

На основе итерационно-интерполяционного метода разработан алгоритм решения уравнения параболического типа и получена разностная схема для численного решения уравнения вида пограничного слоя с учетом различных режимов течения и в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Маха. Полученная неявная разностная схема безусловно устойчивая с погрешностью аппроксимации второго порядка по поперечной и первого порядка по маршевой переменной. Методом пробной функции рассмотрена практическая сходимость разностной схемы.

APPLICATION OF THE ITERATION-INTERPOLATION METHOD TO SOLUTION OF MATHEMATICAL PHYSICS PROBLEMS

A.M. Grishin, V.I. Zinchenko, K.N. Efimov and A.S. Yakimov

Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia

Based on the iteration-interpolation method, an algorithm for solving the parabolic differential equation and a differential scheme for numerical solution of the boundary layer equation applicable to a wide range of Mach and Reynolds numbers have been developed. The scheme is unconditionally stable with second-order approximation inaccuracy relative to the spatial coordinate and first-order approximation inaccuracy relative to the march coordinate. The practical convergence of the differential scheme has been considered using the trial function method.

1. Введение

В работах [1−7] предложен и развит итерационно-интерполяционный метод (ИИМ) для решения различных уравнений математической физики. Так при переводе работы [2] на английский язык [3] авторами сделано дополнение, в котором для одного частного случая утверждается, что погрешность аппроксимации составляет $O(h^{2k})$, где h — шаг разностной сетки, а $k = 1, 2$ — номер итерации. В статье [4] даны алгоритмы ИИМ для решения уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов, допускающие точное решение, и дана оценка точности полученных численных решений, в публикации [5] получили развитие ИИМ для решения трехмерного уравнения теплопроводности. Обобщение ИИМ на трехмерный случай для уравнения параболического типа сделано в работе [6]. В книге [7] излагается современное состояние ИИМ.

Суть алгоритма ИИМ заключается в использовании метода последовательных приближений на каждом элементарном отрезке разностной сетки, соответствующей области определения исследуемой краевой задачи, в результате чего точность приближенного решения повышается как путем уменьшения шага разностной сетки, так и путем увеличения числа итераций [1]. В дальнейшем устанавливается связь ИИМ с теорией сплайнов [3] и даны примеры применения к решению некоторых нелинейных краевых задач [4].

2. Построение разностной схемы для уравнения типа пограничного слоя на основе ИИМ

Пусть требуется решить параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(f_1\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right)+f_2\frac{\partial X}{\partial\zeta}+f_3X=f_4+f_5\frac{\partial X}{\partial\xi}+f_6\frac{\partial X}{\partial\varphi} \tag{1}$$

в области $0<\xi\le S,\ 0<\phi<\Phi,\ 0<\zeta<L$ с начальным условием

$$X\big|_{\xi=0}=X_{\xi 0}(\varphi,\zeta),\qquad X\big|_{\varphi=0}=X_{\varphi 0}(\xi,\zeta) \tag{2}$$

и, для простоты выкладок, с граничным условием первого рода

$$X\big|_{\zeta=0}=X_w(\xi,\varphi),\qquad X\big|_{\zeta=L}=X_e(\xi,\varphi). \tag{3}$$

Алгоритм ИИМ для уравнения параболического типа (1) приводит к следующей системе линейных уравнений:

$$A_iX_{i+1}-B_iX_i+C_iX_{i-1}+D_i=0\qquad (i=\overline{1,\ N-1}). \tag{4}$$

Коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i согласно алгоритму, подробно описанному в [7], с учетом трехмерного характера течения и заменой частных производных конечными разностями $\partial X/\partial\xi=\left(X-X_{\xi}\right)/\Delta\xi$, $\partial X/\partial\varphi=\left(X-X_{\varphi}\right)/\Delta\varphi$ определяются следующим образом:

$$A_i=\gamma_1\,\Delta\xi\,\Delta\varphi\left(f_{1,i+1}+f_{1,i}\right)+\gamma_1\,\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{3}\left(f_{2,i+1}+2f_{2,i}\right)+$$
$$+\gamma_1\Delta\xi\,\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_{i+1}^2}{6}\left(f_{3,i+1}+f_{3,i}\right)-\gamma_1\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_{i+1}^2}{6}\left(f_{5,i+1}+f_{5,i}\right)-\gamma_1\Delta\xi\frac{\Delta\zeta_{i+1}^2}{6}\left(f_{6,i+1}+f_{6,i}\right);$$

$$B_i=\gamma_1\,\Delta\xi\Delta\varphi\left(f_{1,i+1}+f_{1,i}\right)+\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{3}\left(f_{2,i+1}+2f_{2,i}\right)-$$
$$-\gamma_1\,\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_{i+1}^2}{6}\left(f_{3,i+1}+3f_{3,i}\right)+\gamma_1\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_{i+1}^2}{6}\left(f_{5,i+1}+3f_{5,i}\right)+$$
$$+\gamma_1\Delta\xi\frac{\Delta\zeta_{i+1}^2}{6}\left(f_{6,i+1}+3f_{6,i}\right)+\gamma_2\Delta\xi\frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left(f_{6,i-1}+3f_{6,i}\right)+$$
$$+\gamma_2\,\Delta\xi\Delta\varphi\left(f_{1,i-1}+f_{1,i}\right)-\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_i}{3}\left(f_{2,i-1}+2f_{2,i}\right)-$$
$$-\gamma_2\,\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left(f_{3,i-1}+3f_{3,i}\right)+\gamma_2\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left(f_{5,i-1}+3f_{5,i}\right); \tag{5}$$

$$C_i=\gamma_2\Delta\xi\,\Delta\varphi\left(f_{1,i-1}+f_{1,i}\right)-\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_i}{3}\left(f_{2,i-1}+2f_{2,i}\right)+$$
$$+\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left(f_{3,i-1}+f_{3,i}\right)-\gamma_2\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left(f_{5,i-1}+f_{5,i}\right)-\gamma_2\Delta\xi\frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left(f_{6,i-1}+f_{6,i}\right);$$

$$D_i = -\gamma_1 \Delta\xi\Delta\varphi \frac{\Delta\zeta_{i+1}^2}{3}\left(f_{4,i+1} + 2f_{4,i}\right) - \gamma_2 \Delta\xi\Delta\varphi \frac{\Delta\zeta_i^2}{3}\left(f_{4,i-1} + 2f_{4,i}\right) +$$
$$- \frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\,\Delta\xi}\left[\left(f_{5,i+1} + 3f_{5,i}\right)\left(X_i - X_{\xi i}\right) + \left(f_{5,i+1} + f_{5,i}\right)\left(X_{i+1} - X_{\xi i+1}\right)\right] +$$
$$+ \gamma_2 \Delta\varphi \frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left[\left(f_{5,i-1} + 3f_{5,i}\right)X_{\xi i} + \left(f_{5,i-1} + f_{5,i}\right)X_{\xi i-1}\right] +$$
$$+ \gamma_1 \Delta\xi \frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left[\left(f_{6,i+1} + 3f_{6,i}\right)X_{\varphi i} + \left(f_{6,i+1} + f_{6,i}\right)X_{\varphi i+1}\right] +$$
$$+ \gamma_2 \Delta\xi \frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left[\left(f_{6,i-1} + 3f_{6,i}\right)X_{\varphi i} + \left(f_{6,i-1} + f_{6,i}\right)X_{\varphi i-1}\right].$$

В соотношениях (5) и ниже обозначено: $X_{\xi i}$ — значение искомой функции на предыдущем слое по ξ; $X_{\varphi i}$ — значение искомой функции на предыдущем слое по φ.

При добавлении к системе (5) граничных условий

$$X_0 = X_w(\xi,\varphi),\ X_N = X_e(\xi,\varphi) \tag{6}$$

получается система (N+1) алгебраических уравнений для определения неизвестных величин $X_0, \ldots, X_N$. Можно показать, что приведенная разностная схема аппроксимирует исходную краевую задачу (1) с погрешностью $O\left(\Delta\xi + \Delta\varphi + (\Delta\zeta)^2\right)$ в случае постоянного шага по переменной ζ и с погрешностью $O\left(\Delta\xi + \Delta\varphi + \Delta\zeta\right)$ — в случае переменного шага по ζ, $\Delta\zeta = \max\left(\Delta\zeta_i\right)$. Здесь и ниже

$$\gamma_1 = \Delta\zeta_i / \left(\Delta\zeta_i + \Delta\zeta_{i+1}\right), \quad \gamma_2 = \Delta\zeta_{i+1} / \left(\Delta\zeta_i + \Delta\zeta_{i+1}\right), \quad \Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1} \quad (i = \overline{1, N-1}). \tag{7}$$

Так как при численном интегрировании системы уравнений пограничного слоя необходимо знать потоковые величины, связанные с градиентами искомых функций. Ниже приводятся выражения для вычисления указанных градиентов искомой функции:

$$f_{1,i}\left.\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_i} = \left(X_i - X_{i-1}\right)\cdot\left[\frac{f_{1,i-1} + f_{1,i}}{2\,\Delta\zeta_i} - \frac{f_{2,i-1} + 2f_{2,i}}{6}\right] -$$
$$- \frac{\Delta\zeta_i}{12}\left[\left(f_{3,i-1} + 3f_{3,i}\right)X_i + \left(f_{3,i-1} + f_{3,i}\right)X_{i-1}\right] + \frac{\Delta\zeta_i}{6}\left(f_{4,i-1} + 2\,f_{4,i}\right) +$$
$$+ \frac{\Delta\zeta_i}{12\,\Delta\xi}\left[\left(f_{5,i-1} + 3f_{5,i}\right)\left(X_i - X_{\xi i}\right) + \left(f_{5,i-1} + f_{5,i}\right)\left(X_{i-1} - X_{\xi i-1}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\Delta\zeta_i}{12\,\Delta\varphi}\left[\left(f_{6,i-1} + 3f_{6,i}\right)\left(X_i - X_{\varphi i}\right) + \left(f_{5,i-1} + f_{5,i}\right)\left(X_{i-1} - X_{\varphi i-1}\right)\right]; \tag{8}$$

$$f_{1,i}\left.\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_i} = \left(X_{i+1} - X_i\right)\cdot\left[\frac{f_{1,i+1} + f_{1,i}}{2\,\Delta\zeta_{i+1}} + \frac{f_{2,i+1} + 2f_{2,i}}{6}\right] -$$
$$- \frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12}\left[\left(f_{3,i+1} + 3f_{3,i}\right)X_i + \left(f_{3,i+1} + f_{3,i}\right)X_{i+1}\right] + \frac{\Delta\zeta_{i+1}}{6}\left(f_{4,i+1} + 2\,f_{4,i}\right) -$$

$$-\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\,\Delta\xi}\left[\left(f_{5,i+1}+3f_{5,i}\right)\left(X_i-X_{\xi i}\right)+\left(f_{5,i+1}+f_{5,i}\right)\left(X_{i+1}-X_{\xi i+1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\,\Delta\varphi}\left[\left(f_{6,i+1}+3f_{6,i}\right)\left(X_i-X_{\varphi i}\right)+\left(f_{6,i+1}+f_{6,i}\right)\left(X_{i+1}-X_{\varphi i+1}\right)\right].$$

В силу того, что при турбулентном режиме течения в пограничном слое коэффициент f_1 в уравнении сохранения количества движения во внутренней области турбулентного ядра имеет структуру

$$f_1=f_1^*+f_2^*\frac{\partial X}{\partial\zeta}, \tag{9}$$

уравнения сохранения количества движения сводятся к виду

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\left(f_1^*+f_2^*\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right]+f_2\frac{\partial X}{\partial\zeta}+f_3X=f_4+f_5\frac{\partial X}{\partial\xi}+f_6\frac{\partial X}{\partial\phi}, \tag{10}$$

а выражения, содержащие градиенты искомой функции, записываются как:

$$\left.\left[\left(f_1^*+f_2^*\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right]\right|_{\zeta=\zeta_i}=\left(X_{i-1}-X_i\right)\times\frac{f_{2,i-1}+2f_{2,i}}{6}+\left(X_i-X_{i-1}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{f_{1,i-1}^*+f_{1,i}^*+\left(f_{2,i-1}^*+f_{2,i}^*\right)\dfrac{X_i-X_{i-1}}{\Delta\zeta_i}}{2\,\Delta\zeta_i}\right]-$$

$$-\frac{\Delta\zeta_i}{12}\left[\left(f_{3,i-1}+3f_{3,i}\right)X_i+\left(f_{3,i-1}+f_{3,i}\right)X_{i-1}\right]+\frac{\Delta\zeta_i}{6}\left(f_{4,i-1}+2f_{4,i}\right)+$$

$$+\frac{\Delta\zeta_i}{12\Delta\xi}\left[\left(f_{5,i-1}+3f_{5,i}\right)\left(X_i-X_{\xi i}\right)+\left(f_{5,i-1}+f_{5,i}\right)\left(X_{i-1}-X_{\xi i-1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\Delta\zeta_i}{12\Delta\varphi}\left[\left(f_{6,i-1}+3f_{6,i}\right)\left(X_i-X_{\varphi i}\right)+\left(f_{6,i-1}+f_{6,i}\right)\left(X_{i-1}-X_{\varphi i-1}\right)\right]; \tag{11}$$

$$\left.\left[\left(f_1^*+f_2^*\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right]\right|_{\zeta=\zeta_i}=\left(X_i-X_{+1i}\right)\times\frac{f_{2,i+1}+2f_{2,i}}{6}+\left(X_{i+1}-X_i\right)\times$$

$$\times\left[\frac{f_{1,i+1}^*+f_{1,i}^*+\left(f_{2,i+1}^*+f_{2,i}^*\right)\dfrac{X_{i+1}-X_i}{\Delta\zeta_{i+1}}}{2\,\Delta\zeta_{i+1}}\right]-$$

$$-\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12}\left[\left(f_{3,i+1}+3f_{3,i}\right)X_i+\left(f_{3,i+1}+f_{3,i}\right)X_{i+1}\right]+\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{6}\left(f_{4,i+1}+2f_{4,i}\right)+$$

$$+\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\Delta\xi}\left[\left(f_{5,i+1}+3f_{5,i}\right)\left(X_i-X_{\xi i}\right)+\left(f_{5,i+1}+f_{5,i}\right)\left(X_{i+1}-X_{\xi i+1}\right)\right]+$$
$$+\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\Delta\varphi}\left[\left(f_{6,i+1}+3f_{6,i}\right)\left(X_i-X_{\varphi i}\right)+\left(f_{6,i+1}+f_{6,i}\right)\left(X_{i+1}-X_{\varphi i+1}\right)\right]. \tag{12}$$

С использованием условия сшивки потоков (11)–(12) в i-ом внутреннем узле далее записывается разностный аналог уравнения (1) в виде (4), где коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i равняются:

$$A_i=\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\left(f^*_{1,i+1}+f^*_{1,i}\right)+\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\left(f^*_{2,i+1}+f^*_{2,i}\right)\frac{X_{i+1}-X_i}{\Delta\zeta_{i+1}}+$$
$$+\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{3}\left(f_{2,i+1}+2f_{2,i}\right)+\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_{i+1}}{6}\left(f_{3,i+1}+f_{3,i}\right)-$$
$$-\gamma_1\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_{i+1}}{6}\left(f_{5,i+1}+f_{5,i}\right)-\gamma_1\Delta\xi\frac{\Delta\zeta^2_{i+1}}{6}\left(f_{6,i+1}+f_{6,i}\right);$$

$$B_i=\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\left(f^1_{1,i+1}+f^1_{1,i}\right)+\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\left(f^1_{1,i-1}+f^1_{1,i}\right)+$$
$$+\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\left(f^*_{2,i+1}+f^*_{2,i}\right)\frac{X_{i+1}-X_i}{\Delta\zeta_{i+1}}+\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\left(f^*_{2,i-1}+f^*_{2,i}\right)\frac{X_i-X_{i-1}}{\Delta\zeta_i}+$$
$$+\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{3}\left(f_{2,i+1}+2f_{2,i}\right)-\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_i}{3}\left(f_{2,i-1}+2f_{2,i}\right)-$$
$$-\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_{i+1}}{6}\left(f_{3,i+1}+3f_{3,i}\right)-\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_i}{6}\left(f_{3,i-1}+3f_{3,i}\right)+$$
$$+\gamma_1\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_{i+1}}{6}\left(f_{5,i+1}+3f_{5,i}\right)+\gamma_2\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_i}{6}\left(f_{5,i-1}+3f_{5,i}\right)+$$
$$+\gamma_2\Delta\xi\frac{\Delta\zeta^2_i}{6}\left(f_{6,i-1}+3f_{6,i}\right)+\gamma_1\Delta\xi\frac{\Delta\zeta^2_{i+1}}{6}\left(f_{6,i+1}+3f_{6,i}\right); \tag{13}$$

$$C_i=\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\left(f^*_{1,i-1}+f^*_{1,i}\right)+\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\left(f^*_{2,i-1}+f^*_{2,i}\right)\frac{X_i-X_{i-1}}{\Delta\zeta_i}-$$
$$-\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta_i}{3}\left(f_{2,i-1}+2f_{2,i}\right)+\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_i}{6}\left(f_{3,i-1}+f_{3,i}\right)-$$
$$-\gamma_2\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_i}{6}\left(f_{5,i-1}+f_{5,i}\right)-\gamma_2\Delta\xi\frac{\Delta\zeta^2_i}{6}\left(f_{6,i-1}+f_{6,i}\right);$$

$$D_i=-\gamma_1\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_{i+1}}{3}\left(f_{4,i+1}+2f_{4,i}\right)-\gamma_2\Delta\xi\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_i}{3}\left(f_{4,i-1}+2f_{4,i}\right)+$$
$$-\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\Delta\varphi}\left[\left(f_{6,i+1}+3f_{6,i}\right)\left(X_i-X_{\varphi i}\right)+\left(f_{6,i+1}+f_{6,i}\right)\left(X_{i+1}-X_{\varphi i+1}\right)\right]$$
$$+\gamma_2\Delta\varphi\frac{\Delta\zeta^2_i}{6}\left[\left(f_{5,i-1}+3f_{5,i}\right)X_{\xi i}+\left(f_{5,i-1}+f_{5,i}\right)X_{\xi i-1}\right]+$$
$$-\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\Delta\xi}\left[\left(f_{5,i+1}+3f_{5,i}\right)\left(X_i-X_{\xi i}\right)+\left(f_{5,i+1}+f_{5,i}\right)\left(X_{i+1}-X_{\xi i+1}\right)\right]$$

$$+\gamma_2\Delta\xi\frac{\Delta\zeta_i^2}{6}\left[\left(f_{6,i-1}+3f_{6,i}\right)X_{\varphi i}+\left(f_{6,i-1}+f_{6,i}\right)X_{\varphi i-1}\right].$$

Граничные условия при этом имеют вид (6). Порядок аппроксимации разностной схемы (13) совпадает с порядком аппроксимации схемы (5).

Схема (13) позволяет рассчитывать турбулентные режимы течения. Однако присутствие в коэффициентах искомой функции, которая берется с нижнего итерационного слоя, может приводить к существенному уменьшению скорости сходимости, а в отдельных случаях, и к расходимости итерационного процесса, так как в области турбулентного ядра коэффициент турбулентной вязкости много больше величины коэффициента молекулярной вязкости, то есть

$$f_1^* << f_2^*\frac{\partial X}{\partial\zeta}\,. \tag{14}$$

С учетом неравенства (14) ниже приводится один из вариантов схемы, свободной от указанного недостатка.

Потоковые величины (11)–(12) переписываются в следующем виде:

$$\left[\left(f_1^*+f_2^*\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right]\Bigg|_{\zeta=\zeta_i}=\frac{\alpha_1}{\Delta\zeta_i^2}\left(X_i-X_{i-1}\right)^2\left[\sqrt{1+\varepsilon_1}\right]^2; \tag{15}$$

$$\left[\left(f_1^*+f_2^*\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial X}{\partial\zeta}\right]\Bigg|_{\zeta=\zeta_i}=\frac{\beta_1}{\Delta\zeta_{i+1}^2}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2\left[\sqrt{1+\varepsilon_2}\right]^2, \tag{16}$$

где величины, входящие в (15)–(16), определяются из соотношений:

$$\varepsilon_1=\frac{\alpha_2\left(X_i-X_{i-1}\right)+\alpha_3\Delta\zeta_i}{\alpha_1\left(X_i-X_{i-1}\right)^2}\Delta\zeta_i;\qquad \varepsilon_2=\frac{\beta_2\left(X_{i+1}-X_i\right)+\beta_3\Delta\zeta_{i+1}}{\beta_1\left(X_{i+1}-X_i\right)^2}\Delta\zeta_{i+1};$$

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left(f_{2,i-1}^*+f_{2,i}^*\right);\qquad \alpha_2=\frac{1}{2}\left(f_{1,i-1}^*+f_{1,i}^*\right)-\frac{\Delta\zeta_i}{6}\left(f_{2,i-1}+2f_{2,i}\right);$$

$$\alpha_3=\frac{\Delta\zeta_i}{6}\left(f_{4,i-1}+2f_{4,i}\right)-\frac{\Delta\zeta_i}{12}\left[\left(f_{3,i-1}+3f_{3,i}\right)X_i+\left(f_{3,i-1}+f_{3,i}\right)X_{i-1}\right]+$$
$$+\frac{\Delta\zeta_i}{12\Delta\xi}\left[\left(f_{5,i-1}+3f_{5,i}\right)\left(X_i-X_{\xi i}\right)+\left(f_{5,i-1}+f_{5,i}\right)\left(X_{i-1}-X_{\xi i-1}\right)\right]+$$
$$+\frac{\Delta\zeta_i}{12\Delta\varphi}\left[\left(f_{6,i-1}+3f_{6,i}\right)\left(X_i-X_{\varphi i}\right)+\left(f_{6,i-1}+f_{6,i}\right)\left(X_{i-1}-X_{\varphi i-1}\right)\right];$$

$$\beta_1=\frac{1}{2}\left(f_{2,i+1}^*+f_{2,i}^*\right);\qquad \beta_2=\frac{1}{2}\left(f_{1,i+1}^*+f_{1,i}^*\right)+\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{6}\left(f_{2,i+1}+2f_{2,i}\right);$$

$$\beta_3 = -\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{6}\left(f_{4,i+1} + 2f_{4,i}\right) + \frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12}\left[\left(f_{3,i+1} + 3f_{3,i}\right)X_i + \left(f_{3,i+1} + f_{3,i}\right)X_{i+1}\right] -$$
$$-\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\Delta\xi}\left[\left(f_{5,i+1} + 3f_{5,i}\right)\left(X_i - X_{\xi i}\right) + \left(f_{5,i+1} + f_{5,i}\right)\left(X_{i+1} - X_{\xi i+1}\right)\right] -$$
$$-\frac{\Delta\zeta_{i+1}}{12\Delta\varphi}\left[\left(f_{6,i+1} + 3f_{6,i}\right)\left(X_i - X_{\varphi i}\right) + \left(f_{6,i+1} + f_{6,i}\right)\left(X_{i+1} - X_{\varphi i+1}\right)\right]. \tag{17}$$

На основе условия сшивки потоков

$$\left\{\left[\left(f_1^* + f_2^*\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right]\Bigg|_{\zeta=\zeta_i}\right\}^{0,5} = \left\{\left[\left(f_1^* + f_2^*\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right]\Bigg|_{\zeta=\zeta_i}\right\}^{0,5}, \tag{18}$$

а также разложения функций $(1+\varepsilon_1)^{0,5}$ и $(1+\varepsilon_2)^{0,5}$ в ряд по степеням ε_1 и ε_2, соответственно, с удержанием первых двух членов ряда с точностью $O(\varepsilon^2)$, где $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, получается следующий вид коэффициентов разностной схемы:

$$A_i = \gamma_1\sqrt{\beta_1}, \qquad B_i = \gamma_1\sqrt{\beta_1} + \gamma_2\sqrt{\alpha_1}, \qquad C_i = \gamma_2\sqrt{\alpha_1},$$

$$D_i = \gamma_1\Delta\zeta_{i+1}\frac{\beta_2}{2\sqrt{\beta_1}} - \gamma_2\Delta\zeta_i\frac{\alpha_2}{2\sqrt{\alpha_1}} + \frac{\gamma_1\beta_3\Delta\zeta_{i+1}^2}{2\sqrt{\beta_1}\left(X_{i+1} - X_i\right)} - \frac{\gamma_2\alpha_3\Delta\zeta_i^2}{2\sqrt{\alpha_1}\left(X_i - X_{i-1}\right)}. \tag{19}$$

Для использования схемы (19) необходимо выполнение условия

$$\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < \varepsilon_0, \tag{20}$$

где ε_0 — некоторая малая величина, выбираемая исходя из необходимого порядка аппроксимации по ζ исходного уравнения в рассматриваемой области интегрирования. Данная схема является монотонной, так как справедливы соотношения $A_i > 0,\ C_i > 0,\ B_i = A_i + C_i$, что делает метод прогонки абсолютно устойчивым.

Тестирование схемы (19) показывает, что эта разностная схема позволяет рассчитывать систему уравнений пограничного слоя для чисел Рейнольдса $\geq 10^{12}$, при этом скорость сходимости увеличивается в несколько раз.

Область интегрирования по нормальной координате разбивается на подобласти $0 \leq \zeta \leq \zeta_*$ и $\zeta_* < \zeta < L$, где точка перехода ζ_* находится из условия равенства коэффициентов турбулентной вязкости μ_t, вычисленных по формулам для внутренней и внешней областей. Для внутренней области используется разностная схема, для которой коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i определяются по формулам (13), а при выполнении условия (15) — по формулам (19). Для внешней области используется схема (5). Таким образом, при расчете турбулентного течения происходит стыковка трех разностных схем.

Отметим, что в силу физического смысла условий «сшивки» (18) разностные схемы, получаемые при помощи ИИМ, обладают свойством слабой консервативности [8], то есть консервативность удовлетворяется с порядком аппроксимации [7].

В работе [7] методом Фурье [9] в приближении замороженных коэффициентов получено, что разностные схемы ИИМ безусловно устойчивы.

3. Сходимость и пример применения метода

Сходимость разностных схем ИИМ устанавливалась практически на последовательности сгущающихся сеток по τ и h_m (m = 1, 2 ,3) при решении частного случая трёхмерного уравнения (21) со смешанными условиями (22) в кубе Q $[0 \le x_m \le 1$, $m = 1, 2, 3]$ при $0 \le t \le t_k$:

$$g\frac{\partial X}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{3} \nu_\alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x_\alpha^2} + \left\{1 + \sum_{\alpha=1}^{3}\left[x_\alpha^Z - Z(Z-1)\nu_\alpha x_\alpha^{Z-2}\right]\right\}\exp(t); \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&X\Big|_{t=0} = r, \qquad r = 1 + \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^Z ,\\
&X\Big|_{x_1=0} = (1 + x_2^Z + x_3^Z)\exp(t) ,\\
&X\Big|_{x_2=0} = (1 + x_1^Z + x_3^Z)\exp(t) ,\\
&X\Big|_{x_3=0} = (1 + x_1^Z + x_2^Z)\exp(t) ,\\
&\frac{\partial X}{\partial x_1}\Big|_{x_1=1} = Z\exp(t) ,\\
&X\Big|_{x_2=1} = (2 + x_1^Z + x_3^Z)\exp(t),\\
&X\Big|_{x_3=1} = (2 + x_1^Z + x_2^Z)\exp(t).
\end{aligned} \tag{22}$$

Легко видеть, что задача (21), (22) имеет точное явное решение

$$X = (1 + \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^Z)\exp(t). \tag{23}$$

Использовались следующие значения входных данных: $h_m = h$, $\nu_m = 1$ (m = 1, 2, 3), $Z = 6$, $g = 10$, $\tau = 0{,}002$. При исследовании сходимости разностных уравнений ИИМ фиксировалась максимальная относительная погрешность

$$\varepsilon = \max_{x,\, t\in Q}\frac{\left|X - \tilde{X}\right| 100\%}{X},$$

где X — явное точное решение (23), $\widetilde{X}$ — приближенное численное решение задачи (21), (22) при значении $t_k = 5$. Из таблицы видно, что оно сходится к точному при измельчении шагов разностной сетки (t_0 — расчётное время в минутах на ПЭВМ).

Таблица. Максимальная относительная погрешность ε при различных τ и h

τ	0,002	0,002	0,002	0,002	0,01	0,02
h	0,2	0,1	0,05	0,025	0,05	0,05
ε, %	5,96	1,96	0,458	0,128	0,658	2,67
t_0	0,2	0,4	1,15	8,1	0,35	0,12

4. Выводы

1. На основе ИИМ получена разностная схема для решения уравнения параболического типа с погрешностью аппроксимации на равномерной сетке $O[\Delta\xi + \Delta\varphi + (\Delta\zeta)^2]$.

2. Показано, что при постоянных (или гладких) коэффициентах переноса разностные уравнения безусловно устойчивы [7].

3. Проведен тестовый расчет, и анализируется практическая сходимость разностной схемы.

4. Построенные разностные схемы использованы для решения уравнения типа пограничного слоя [10] с учетом различных режимов течения и в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Маха.

Отметим, что положительные свойства разностных схем, получаемых с помощью ИИМ (сплайн–аппроксимация искомых решений и др., возможность получения схем повышенной точности) для одномерных краевых задач, сохраняются и при решении многомерных задач [7]. В частности, если в качестве начального приближения в логической схеме из [7] вместо линейной функции взять параболу, то для уравнения (21) при $h_m = h$, $g = v_m = 1$, по алгоритму ИИМ [7] можно получить дифференциально-разностную задачу с погрешностью аппроксимации $O(\sum_{m=1}^{3} h_m^4)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00496).

Литература

1. *Гришин А.М.* Об одном видоизменении метода М. Е. Швеца // Инженерно-физический журнал. – 1970. – Т. – 19, № 1. – С. 84-93.
2. *Гришин А.М., Берцун В.Н.* Итерационно-интерполяционный метод и теория сплайнов // ДАН СССР. – 1974. – Т. 214, № 4. – С. 701-704.
3. *Grishin A M., Bercun V N.* The Iterational-Interpolation Method and Spline Theory // Soviet. Math. Dokl. – 1974. – V. 15, N. 1. – P. 222-227.
4. *Гришин А.М.* Об одном итерационно-интерполяционном методе // Труды НИИ Прикладной математики и механики при ТГУ. – Томск: Изд-во ТГУ, 1973. – С. 45-48.
5. *Гришин А.М., Якимов А.С.* Обобщение итерационно-интерполяционного метода для решения трехмерного параболического уравнения общего вида // Вычислительные технологии. – 1999. – Т. 4, № 2. – С. 26-41.
6. *Якимов А.С.* Об одном методе расщепления // Численные методы механики сплошной среды. – 1985. – Т. 16, № 2. – С. 144-161.
7. *Гришин А.М., Зинченко В.И., Ефимов К.Н. Субботин А.Н., Якимов А.С.* Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 320с.
8. *Войнович П.А., Жмакин А.И., Попов Ф.Д., Фурсенко А.А.* Численное исследование течений газа с разрывами сложных конфигураций // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1979. – Т. 19, № 2. – С. 1608-1614.
9. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195 с.
10. *Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Якимов А.С.* Исследование характеристик сопряженного тепло- и массообмена при вдуве газа и термохимическом разрушении обтекаемого тела // Теплофизика высоких темпера-тур. – 2007. – № 4. – С. 749-755.