

## РАСЧЕТЫ ДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ ПРИ АНТИПЛОСКОМ И СКРУЧИВАЮЩЕМ УДАРЕ

Е.А. Герасименко<sup>1</sup>, А.В. Завертан<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, 690041, Россия*

<sup>2</sup>*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток, 690600, Россия*

В статье рассматривается применение лучевого метода при конструировании численных схем решения одномерных задач ударного деформирования в случае криволинейной (цилиндрической) нагружаемой поверхности. Лучевой метод используется для выделения поверхности сильного разрыва — ударной волны, являющейся подвижной границей в краевой задаче для уравнения движения среды, а также построения решения в прифронтной области. Приводятся полученные с его помощью приближенные аналитические решения задач об антиплоском и скручивающем ударе, справедливые для малых послееударных времен. Указан способ сращивания прифронтного аналитического решения и численного решения методом наименьших квадратов. Для рассматриваемых задач приводятся результаты численных расчетов.

## CALCULATIONS IN DYNAMICS OF INCOMPRESSIBLE ELASTIC MEDIUM UNDER ANTIPLANE AND TWISTING SHOCK LOADING

E.A. Gerasimenko<sup>1</sup> and A.V. Zavertan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, 690041, Russia*

<sup>2</sup>*Vladivostok State University of Economics and Services, Vladivostok, 690600, Russia*

This paper is devoted to using the ray method in constructing numerical solution schemes for one-dimensional problems on shock loading of a cylindrical surface. The ray method is applied to localize the shock wave, which is a moving boundary in the boundary-value problem for the equation of medium motion, and to find a solution near the wave front. The approximate analytical solutions of antiplane and twisted shock loading problems for a short time passed after the impact are given. The method of matching the front analytical solution and the numerical solution using the least-square technique is presented. Numerical solutions for the problems under study are given.

### 1. Введение

Методы расчетов с выделением разрывов широко распространены в численных расчетах газовой динамики [1]. Однако в динамике деформируемых твердых тел подобные приемы, как правило, оказываются неприменимыми из-за взаимозависимости двух процессов распространения граничных возмущений: изменения объемных деформаций и деформаций изменения формы. Поэтому здесь расчеты проводятся, главным образом, на основе различных схем сквозного счета [2, 3]. В тех случаях, когда нестационарность задачи существенна, от схем сквозного счета приходится отказываться, и выделение разрывов становится необходимым. В настоящей статье изучается способ выделения поверхностей сильного разрыва путем включения в конечно-разностную схему расчетов прифронтных асимптотических разложений решения. Такой прием впервые предложен в [4], где для построения прифронтной

асимптотики используется метод сращиваемых асимптотических разложений. В [5] показано, что эффективным и хорошо программируемым методом для этой цели является лучевой метод, и в качестве иллюстрации приводится решение задачи о распространении плоских ударных волн [5]. В настоящей статье рассматриваются особенности обобщения этой методики на задачи с криволинейными поверхностями разрывов.

## 2. Модельные соотношения. Условия на разрывах

Адиабатическое движение нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды в криволинейных координатах Эйлера  $x^i$  описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} v^i &= \dot{u}^i + u_{,j}^i v^j, \quad \sigma_{,j}^{ij} = \rho (\dot{v}^i + \sigma_{,j}^i v^j), \\ 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{,j}^k, \quad \sigma_j^i = -p_0 \delta_j^i + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i^k} (\delta_j^k - 2\alpha_j^k), \\ W &= (a - \mu) I_1 + a I_2 + b I_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + c I_1^4 + d I_2^2 + k I_1^2 I_2 + \dots, \\ \dot{u}^i &= \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad u_{,j}^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i u^k, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k u_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u^i$  и  $v^i$  — компоненты векторов перемещения и скорости;  $\alpha_{ij}$  — ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси;  $\sigma_j^i$  — смешанные компоненты тензора напряжений Эйлера–Коши;  $\rho = \text{const}$  — плотность среды;  $W$  — функция упругого потенциала среды;  $I_1 = \alpha_i^i$ ,  $I_2 = \alpha_j^i \alpha_i^j$  — инварианты тензора деформаций;  $p_0$  — добавочное гидростатическое давление;  $\mu$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $k$  — упругие модули среды;  $\Gamma_{jk}^i$  — символы Кристоффеля второго рода (точкой над символом обозначается частная производная по времени, индексом после запятой — операция ковариантного дифференцирования). На ударных волнах дифференциальные уравнения (1) не имеют смысла, но выполняются динамические, геометрические и кинематические условия совместности разрывов:

$$\begin{aligned} [\rho (v^i v_i - G)] &= 0; \\ [\sigma^{ij}] v_j &= \rho^+ (v^{j+} v_j - G) [v^i]; \\ \sigma^{ij+} [v_i] v_j &= \rho^+ (v^{j+} v_j - G) \left( \frac{[v_i][v_i]}{2} - [e] \right) - [q_j] v^j; \\ [f_{,i}] &= \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right] v_i + a^{\alpha\beta} [f]_{,\beta} g_{ij} x_{,\alpha}^j; \\ [\dot{f}] &= \frac{\delta [f]}{\delta t} - G \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right]; \\ [f] &= f^+ - f^-, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = f_{,i} v^i \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $v_i$  — единичная нормаль к поверхности разрывов  $\Sigma$ , направленная в сторону движения  $\Sigma$ ; индексы «+» и «-» соответствуют предельным значениям величин перед

фронтом волны и за ним;  $g_{ij}$  и  $a^{\alpha\beta}$  — компоненты пространственной и поверхностной метрик;  $G$  — скорость движения  $\Sigma$  в направлении нормали;  $e$  — плотность внутренней энергии;  $q_j$  — компоненты вектора теплового потока;  $f$  — компонента любого тензорного поля на  $\Sigma$  или в пространстве; латинскими или греческими индексами после запятой обозначается ковариантное дифференцирование по пространственной или поверхностной координате;  $\frac{\delta}{\delta t}$  — операция дифференцирования по времени в данной точке  $\Sigma$  (дельта-производная) [6, 7]. Геометрические и кинематические условия совместности произвольного порядка для прямоугольной декартовой и криволинейной пространственных систем координат приводятся в [7] и [8] соответственно. На их основе в лучевом методе строится сколь угодно точное приближение к решению в окрестности волновых фронтов.

### 3. Антиплоское ударное деформирование несжимаемой нелинейно-упругой среды

Сначала рассматривается одномерная задача об антиплоском движении несжимаемого пространства без предварительных деформаций. Последнее условие принимается во избежание громоздких формул. В качестве исследуемой области берется пространство, заполненное нелинейно-упругой средой с цилиндрической полостью радиуса  $r_0$ . Антиплоский удар по границе поверхности  $r = r_0$  создает в пространстве поле перемещений вида  $u_r = u_\varphi = 0$ ,  $u_z = u(r, t)$ , где  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  — цилиндрическая система координат.

На границе  $r = r_0$  поле перемещений известно и задается рядом Тейлора

$$u_z|_{r_0} = g(t), \quad g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k g}{\partial t^k} \right|_{t=0}, \quad t^k \approx v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} + \dots, \quad (3)$$

$$v_0 \neq 0, \quad t \geq 0.$$

Вследствие неравенства  $v_0 \neq 0$  появляется поперечная ударная волна  $\Sigma(t)$  с начального момента времени. Свойства таких волн изучаются, например, в [9–11]. Из (2) следует формула для вычисления скорости  $\Sigma(t)$

$$G = C \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left( \frac{\omega_1}{C} \right)^{2k} \right) = C \left( 1 + \gamma_1 \frac{\omega_1^2}{C^2} + \dots \right) \quad (4)$$

и условие на добавочное гидростатическое давление

$$p = p^+ - \frac{\beta \omega_1^2}{2b^2}, \quad \beta = \frac{2a + 2\mu + 2b + \kappa}{\mu}, \quad p = \frac{p_0 - a - \mu}{\mu}. \quad (5)$$

Здесь

$$C = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad \gamma_1 = \frac{a + b + \kappa + d}{2\mu}; \quad \omega_1 = [\dot{u}];$$

$p^+$  — известное давление в недеформированной области.

Поскольку перемещения на поверхности разрывов  $\Sigma$  непрерывны, то  $u|_{r_\Sigma} = 0$ , а положение волнового фронта  $r_\Sigma(t)$  имеет вид:

$$r_\Sigma(t) = r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi \approx r_0 + \int_0^t C \left( 1 + \gamma_1 \frac{\omega_1^2}{C^2} + \dots \right) d\xi. \quad (6)$$

В области деформирования, исключая  $\Sigma$ , движение среды описывается уравнениями, следующими из системы (1):

$$\begin{aligned} u_{,rr} (1 + 3\alpha u_{,r}^2) + \frac{u_{,r}}{r} (1 + \alpha u_{,r}^2) + \dots &= \frac{\ddot{u}}{C^2}, \\ p_{,r} + \beta u_{,r} u_{,rr} + (1 + \gamma) \frac{u_{,r}^2}{r} + \dots &= 0, \quad \alpha = 2\gamma_1, \quad \gamma = \frac{a}{\mu}. \end{aligned} \quad (7)$$

Первое уравнение определяет поле перемещений, а второе — функцию добавочного гидростатического давления по найденным перемещениям. Поэтому первое уравнение считается основным и его решение за фронтом  $\Sigma$  представляется лучевым рядом:

$$\begin{aligned} u^I(r, t) &\approx u^0(r, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \omega_k(t_\Sigma) (t - t_\Sigma)^k, \quad t \geq t_\Sigma, \\ u(r, t) &= u^0(r, t), \quad t \leq t_\Sigma, \quad t_\Sigma(r) = \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{G(\xi)}, \quad \omega_k = \left[ \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где индексами «0» и «I» обозначаются решение в области  $\Sigma$  и за ней соответственно. Такое представление предполагает, что искомая функция обладает сколь угодно высокой гладкостью в окрестности  $\Sigma$ . Для одномерных задач геометрия лучей исходно известна: в данном случае это радиальные направления.

Для определения коэффициентов  $\omega_k$  в (8) требуется  $k$  раз проинтегрировать уравнение движения. Всякий раз результат записывается в разрывах на  $\Sigma$  с учетом условий совместности (2). В линеаризованном случае или же в задачах со слабыми волнами такая процедура приводит к системе рекуррентных обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений затухания), последовательным интегрированием которой завершается решение.

Особенностью ударных волн оказывается зависимость каждого разрыва искомой функции от разрыва более высокого порядка, что исключает возможность последовательного интегрирования

$$\frac{\delta \omega_k}{\delta t} = F_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}, r_\Sigma(t)) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

При записи самого уравнения движения в разрывах получается первое из уравнений (9):

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta t} = \frac{2\alpha\omega_2\omega_1^2 C^{-2}}{2 + 5\alpha\omega_1^2 C^{-2} + \dots} - \frac{\omega_1 C \left(1 + \frac{3}{2}\alpha\omega_1^2 C^{-2}\right)}{r_\Sigma (2 + 5\alpha\omega_1^2 C^{-2} + \dots)} + \dots \quad (10)$$

Благодаря включению в выражение (8) дополнительных разложений  $\omega_k$  в ряды по их  $\delta$ -производным в окрестности нуля [12, 13], удается адаптировать традиционный лучевой метод к задачам ударного деформирования:

$$\omega_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta^n \omega_{k0}}{\delta t^n}, \quad \frac{\delta^n \omega_{k0}}{\delta t^n} = \left. \frac{\delta^n \omega_k}{\delta t^n} \right|_{t=0}. \quad (11)$$

Такой подход предполагает, что решение строится для малых послеударных времен. Уравнения (9) справедливы также при  $t = 0$  и совместно с граничным условием (3) составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно искомых функций. Например, если ряд (3) обрывается на квадратичном слагаемом, то достаточно определять только  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$  и  $\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}$ .

Совместно с полем перемещений лучевой метод позволяет находить функциональные зависимости  $r_\Sigma(t)$  или  $t_\Sigma(r)$ , связывающие  $r$  и  $t$  на переднем фронте волны:

$$u = -\left(\omega_{10} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} t_\Sigma + \dots\right)(t - t_\Sigma) - \frac{1}{2}(\omega_{20} + \dots)(t - t_\Sigma)^2 + \dots, \quad (12)$$

$$t_\Sigma = \frac{r - r_0}{C(1 + \gamma_1\omega_{10}^2 C^{-2})} - \frac{\gamma_1\omega_{10} C^{-1} \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} (r - r_0)^2}{C^3(1 + \gamma_1\omega_{10}^2 C^{-2})^3} + \dots,$$

где  $\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}$  следует из соотношения (10) при  $t = 0$ . Из сопоставления ряда (12) с краевым условием (3) получается, что  $\omega_{10} = -v_0$ ,  $\omega_{20} = -a$ . В зависимости от граничных условий на  $r_0$  решение продолжается далее с требуемой степенью точности. Нахождение добавочного гидростатического давления  $p(r, t)$  по известному полю перемещений не представляет сложностей, кроме вычислительных, поэтому в статье не приводится.

#### 4. Скручивающее ударное деформирование несжимаемой нелинейно-упругой среды

Далее рассматривается вариант граничного нагружения, приводящий к скручиванию среды, то есть такой, когда каждая точка движется по своей круговой траектории (Рис. 1), а для компонент вектора перемещений выполняются условия:

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \psi), \\ u_\varphi &= r \sin \psi, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\psi(r, t)$  — угол поворота точек среды. Уравнения движения среды относительно угла поворота  $\psi(r, t)$  и гидростатического давления  $p(r, t)$  записываются в виде:

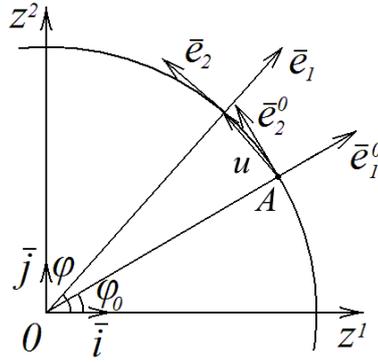


Рис. 1. Скручивание среды

$$3 \frac{\Psi_{,r}}{r} + 5\alpha r \Psi_{,r}^3 + \Psi_{,rr} (1 + 3\alpha r^2 \Psi_{,r}^2) + \dots = \frac{\ddot{\Psi}}{C^2}, \tag{14}$$

$$p_{,r} + (1 + \beta) r \Psi_{,r}^2 + \beta r^2 \Psi_{,r} \Psi_{,rr} + \dots = \frac{r \dot{\Psi}^2}{C^2}.$$

Краевые условия для (14) задаются аналогично выражениям (3):

$$\Psi|_{r_0} = \chi_0 t + \frac{\kappa_0 t^2}{2} + \dots \tag{15}$$

В данном случае  $\chi_0$  и  $\kappa_0$  играют роль начальной угловой скорости и углового ускорения соответственно. Скорость возникающей поперечной ударной волны определяется, как и ранее, формулой (4), но  $\omega_1$  заменяется на  $\eta_1 = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right]$ .

Для решения краевой задачи (14)–(15) применяется описанная ранее методика, которая на нулевом шаге дает значения

$$\frac{\delta \eta_1}{\delta t} = \frac{2\alpha r_\Sigma^2 C^{-2} \eta_1^2 \eta_2}{2 + 5\alpha r_\Sigma^2 C^{-2} \eta_1^2} - \frac{\eta_1 C \left( 3 + \frac{13}{2} \alpha r_\Sigma^2 C^{-2} \eta_2^2 \right)}{r_\Sigma (2 + 5\alpha r_\Sigma^2 C^{-2} \eta_1^2)} + \dots, \tag{16}$$

$$\eta_k = \left[ \frac{\partial^k \Psi}{\partial t^k} \right].$$

Из выражений (10) и (16) видно, что изменение интенсивности цилиндрической волны происходит, в основном, за счет линейных вкладов  $-\frac{\omega_1 C}{2r_\Sigma}$  и  $-\frac{3\eta_1 C}{2r_\Sigma}$  соответственно. Причем, в отличие от плоской задачи, сюда входит величина  $r_\Sigma^{-1}$ , определяющая изменения кривизны волнового фронта. Это означает, что влияние геометрического расхождения на изменение интенсивности волны превалирует над нелинейными эффектами. Последнее утверждение полностью согласуется с данными вычислительных экспериментов в упругих диэлектриках [11].

Если следовать обычной схеме лучевого метода, окончательно для функции  $\Psi(r, t)$  получается соотношение:

$$\begin{aligned}
\psi(r, t) = & -\eta_{10} \left( 1 + \frac{1}{2 + 5\alpha r_0^2 C^{-2} \eta_{10}^2} \left( 2\alpha r_0^2 C^{-2} \eta_{10}^2 \eta_{20} - \frac{13}{2} \alpha r_0 C^{-2} \eta_{10}^2 - \frac{3C}{r_0} \right) t_\Sigma + \dots \right) \times \\
& \times (t - t_\Sigma) - \frac{1}{2} (\eta_{20} + \dots) (t - t_\Sigma)^2 + \dots, \\
t_\Sigma = & \frac{r - r_0}{C \left( 1 + \frac{\alpha}{2} r^2 C^{-2} \eta_{10}^2 \right)} - \frac{\alpha r^2 C^{-1} \eta_{10} (r - r_0)^2}{2C^3 \left( 1 + \frac{\alpha}{2} r^2 \frac{\eta_{10}^2}{C^2} \right)^3 \left( 2 + 5\alpha r_0^2 \frac{\eta_{10}^2}{C^2} \right)} \times \\
& \times \left( 2\alpha r_0^2 \frac{\eta_{10} \eta_{20}}{C^2} - \frac{13}{2} \alpha r_0 \frac{\eta_{10}^2}{C} - \frac{3C}{r_0} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{17}$$

Как уже отмечалось, полученное аналитическое решение пригодно лишь на небольшом удалении от нагружаемой поверхности. Для расширения рассматриваемого временного диапазона далее приводится численный расчет процесса деформирования, в котором прифронтовые лучевые разложения используются в качестве начальных и краевых данных для расчетной схемы.

## 5. Использование прифронтовых асимптотик в численной схеме

В статье полагается, что до момента  $t = t_0$  точность лучевого решения является приемлемой во всей области деформирования (Рис. 2). Поэтому для поля перемещений и положения волнового фронта справедливы зависимости (12) и (17). Несколькими первыми слоями этой области определяются начальные данные для дальнейших вычислений.

Начиная с момента  $t = t_0$ , уравнения движения интегрируются численно с помощью неявной конечно-разностной схемы. Для этого область  $\Omega$ , определяемая неравенствами  $t > t_0$ ,  $0 < r < r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi$ , разбивается равномерной сеткой с шагами  $\Delta t$  и  $\Delta r$  по времени и пространству соответственно. В узлах сетки и ищется решение.

Входящие в уравнения частные производные заменяются их конечно-разностными аппроксимациями по соседним узлам сетки (см. шаблон на рисунке 3):

$$\begin{aligned}
u_{,r} \approx \frac{u(r + \Delta r, t) - u(r - \Delta r, t)}{2\Delta r}, \quad u_{,rr} \approx \frac{u(r + \Delta r, t) - 2u(r, t) + u(r - \Delta r, t)}{\Delta r^2}, \\
\dot{u} \approx \frac{u(r, t) - u(r, t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad \ddot{u} \approx \frac{u(r, t) - 2u(r, t - \Delta t) + u(r, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2},
\end{aligned} \tag{18}$$

При замене исходного уравнения конечно-разностным аналогом получается второй порядок погрешности его аппроксимации по пространственной координате и первый — по временной, то есть  $O(\Delta x^2 + \Delta t)$ .

Для вычисления  $\delta$ -производной используется следующее конечно-разностное выражение:

$$\frac{\delta \omega_k}{\delta t} \approx \frac{\omega_k(t) - \omega_k(t - \Delta t)}{\Delta t}. \tag{19}$$

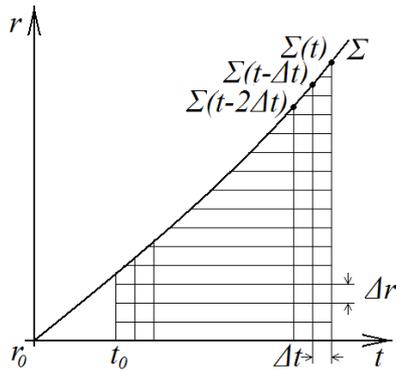


Рис. 2. Область деформирования

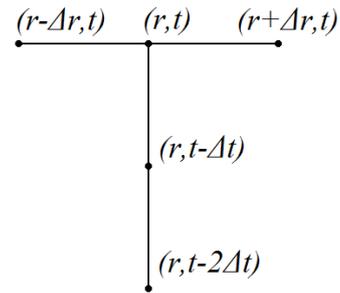


Рис. 3. Шаблон разностной схемы

Следует отметить, что для узлов сетки, лежащих между поверхностью разрывов на последнем временном слое  $\Sigma(t)$  и ее положением на позапрошлом временном слое  $\Sigma(t - 2\Delta t)$ , оказывается невозможной запись конечно-разностных выражений для второй производной по времени, так как соответствующие узлы не попадают в деформированную область. Полагается, что в этой области поле перемещений описывается лучевыми рядами (12) и (17), но константы  $\omega_{k0}$  остаются неизвестными.

Таким образом, в области деформирования  $\Omega$  выделяются область численного счета  $\Omega_1$ , где  $0 \leq r \leq \Sigma(t - 2\Delta t)$ , и прифронтная область  $\Omega_2$ , где  $\Sigma(t - m\Delta t) \leq r \leq \Sigma(t)$ , в которых справедливы (с приемлемой степенью точности, а этого всегда можно добиться за счет выбора  $m$  и  $\Delta t$ ) лучевые ряды, но уже с неизвестными параметрами  $\omega_{k0}$ . Считается, что  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  накладываются друг на друга.

Для замыкания полученной из (7) (или (14)) и (18) системы конечно-разностных уравнений требуется задание условий на границе  $\Omega_1$ . В качестве таковых используются условие на нагружаемой границе (3) (или (15)) и значение перемещения, вычисленное с помощью приближенного аналитического решения в ближайшем к  $\Sigma(t - 2\Delta t)$  узле, не попавшем в  $\Omega_1$ . Новые значения констант лучевого разложения определяются из сопоставления результатов проведенных численных расчетов с лучевыми рядами. Для этого с помощью метода наименьших квадратов значения перемещений в узлах сетки, принадлежащих одновременно границам  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , аппроксимируются квадратичной функцией пространственной координаты. Из сравнения коэффициентов полученной функции с коэффициентами лучевого ряда, рассматриваемого в фиксированный момент времени, находятся параметры лучевого разложения. Уточненные константы используются для вычисления перемещений в узлах, не попавших в область  $\Omega_1$ , а также для определения положения волнового фронта на следующем временном слое.

Таким образом, для получения перемещений за фронтом ударной волны и констант лучевого разложения  $\omega_{k0}$  на очередном временном слое решается система алгебраических уравнений, в которую входят:

- конечно-разностные уравнения для узлов, попавших в область численного решения;
- лучевые разложения для узлов из области  $\Omega_2$ ;
- полученные с помощью метода наименьших квадратов формулы для вычисления параметров лучевого разложения, включающие значения перемещений в узлах, входящих в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  одновременно;
- условие на нагружаемой границе.

Эта система решается численно, методом простых итераций. В качестве начального приближения для очередного слоя используются значения перемещений, полученные при подстановке в аналитическое решение параметров  $\omega_1^{k-1}$  и  $\omega_2^{k-1}$  предыдущего слоя и времени  $t = \Delta t$  (для удобства полагается, что на последнем временном слое  $t = 0$ ). За начальное приближение параметров разложения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  на  $k$ -ом слое принимаются  $\omega_1^k \approx \omega_1^{k-1} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} \Delta t$  и  $\omega_2^k \approx \omega_2^{k-1}$  соответственно;  $\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}$  для слоя  $(t - \Delta t)$  вычисляется по разностной формуле (19). С помощью лучевого разложения вычисляются также поля перемещений на первых двух временных слоях, необходимые для инициализации схемы. Константы лучевого разложения в этом случае находятся по граничному условию.

Для описанного выше алгоритма разработана и отлажена программа, позволяющая строить численные решения каждой из рассматриваемых выше задач.

Далее приводятся некоторые результаты численных расчетов. Параметры задачи  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $C = 1000$  м/с,  $\Delta x = 0,005$  м,  $\Delta t = 0,00005$  с,  $r_0 = 1$  м являются общими для обоих способов нагружения, в то время как  $v_0 = 0,1$  м/с,  $a_0 = 20$  м/с<sup>2</sup> соответствуют задаче об антиплоском движении нелинейно-упругой среды, а  $\chi_0 = 1$  с<sup>-1</sup>,  $\kappa_0 = 1$  с<sup>-2</sup> — задаче о скрутке.

На рисунках 4, 5 показано соответственно распределение поля перемещений вдоль луча для антиплоской задачи и распределение функции  $\psi(r, t)$  в задаче о скручивании среды в различные моменты времени. Рисунки 6, 7 иллюстрируют изменение со временем величин  $\omega_1$  и  $\eta_1$ .

Оценка сходимости и устойчивости построенной численной схемы в силу ее нелинейности является сложной задачей и экспериментально проверяется на последовательности разностных сеток с измельчающимся шагом. Рассматриваются решения задач, полученные в момент времени  $t = 0,0001$  с при указанных выше условиях. Шаги сеток по пространственной и временной координатам последовательно уменьшаются вдвое. Оказывается, что при уменьшении шагов сетки с  $\Delta x = 0,005$  м и  $\Delta t = 0,00005$  с до  $\Delta x = 0,0025$  м и  $\Delta t = 0,000025$  с максимальное относительное отклонение нового решения задачи о скручивающем ударном деформировании среды

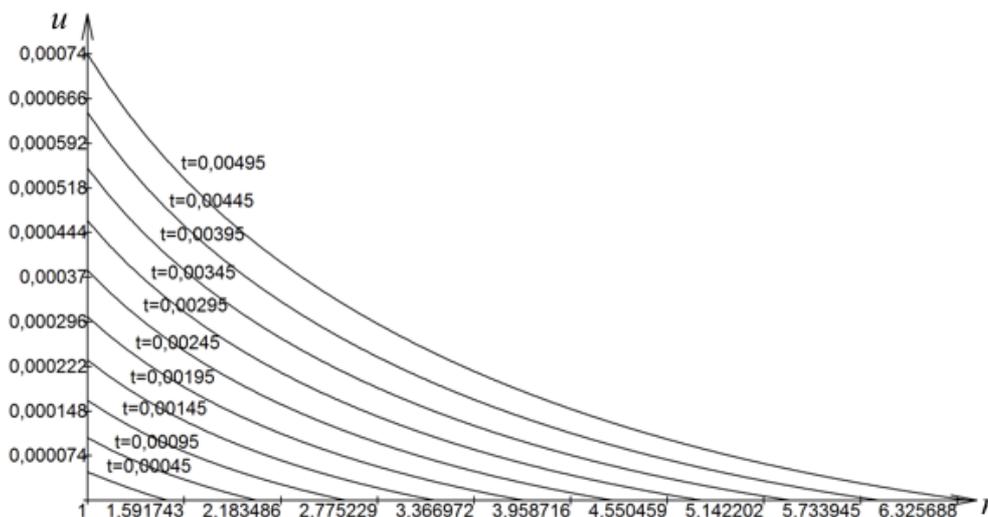
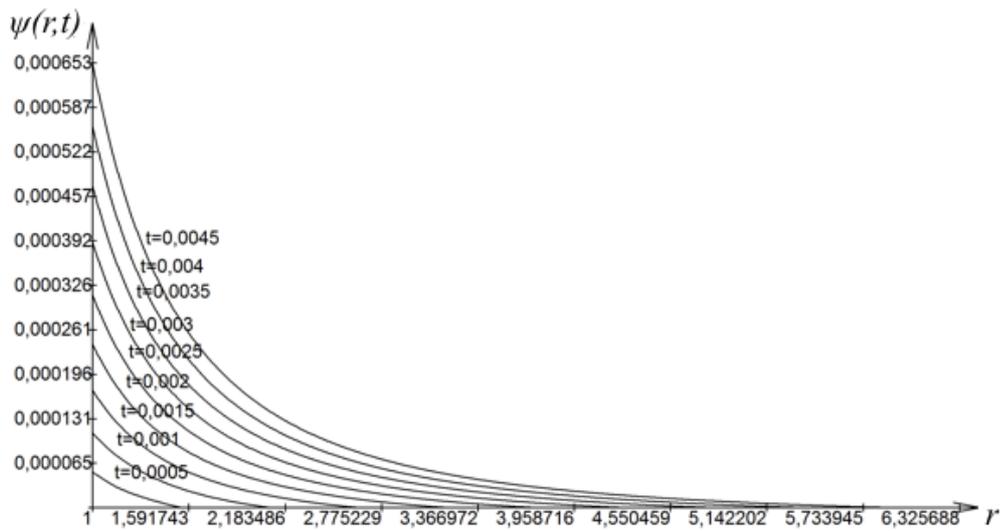
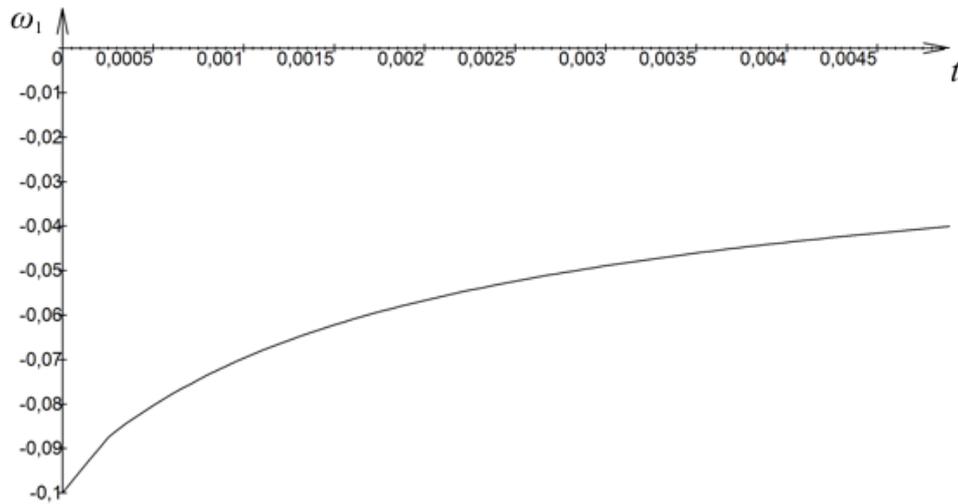


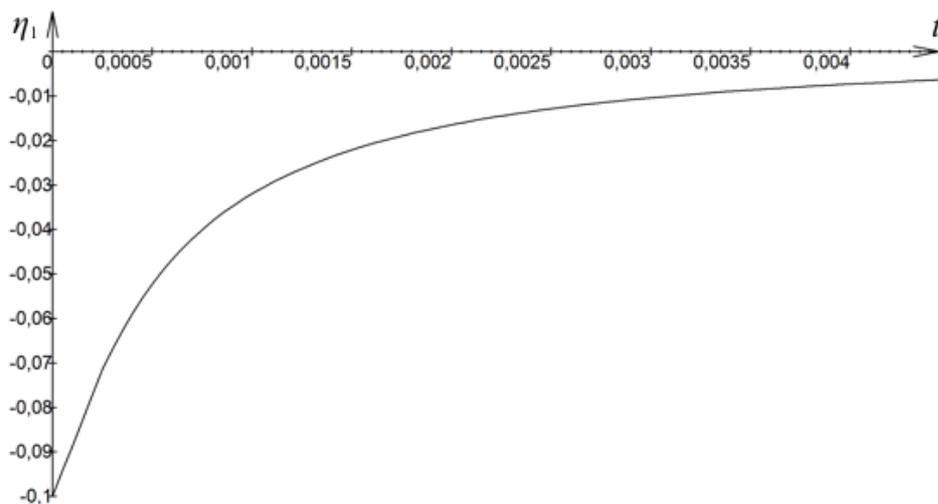
Рис. 4. Распределение поля перемещений вдоль луча для антиплоской задачи для различных моментов времени



**Рис. 5.** Распределение функции  $\psi(r,t)$  вдоль луча для задачи о скручивающем ударе для различных моментов времени



**Рис. 6.** Изменение  $\omega_1$  со временем для антиплоской задачи



**Рис. 7.** Изменение  $\eta_1$  со временем для задачи о скручивающем ударе

от полученного ранее равняется 10%, а при дальнейшем уменьшении шагов сетки в 2 и 4 раза снижается до 7,8% и 5% соответственно. При решении задачи об антиплоском ударном деформировании несжимаемой нелинейно-упругой среды на том же наборе сеток значения отклонений соответствуют 5%, 3,6% и 2%.

Если в рассмотренных задачах ограничиться только аналитическим приближением, то получается, что интенсивность разрыва  $\omega_1$  в задаче об антиплоском сдвиге равняется нулю уже при  $t \approx 2r_0 / C \ll 1$ , а в случае скручивающего воздействия еще быстрее: при  $t \approx 2r_0 / 3C$ . В тоже время, из аналогичных линеаризованных задач, для которых известно точное решение уравнения затухания  $\omega_1 = \omega_{10} (1 + Ct / r_0)^{-1/2}$  или  $\eta_1 = \eta_{10} (1 + Ct / r_0)^{-3/2}$ , следует, что интенсивность разрыва стремится к нулю асимптотически. Представленные иллюстрации показывают, что численное решение позволяет избежать такой качественной погрешности, вносимой необходимостью дополнительных разложений интенсивностей разрывов в степенные ряды по времени (11). Также важно, что, в отличие от криволинейных, для плоских волн представление интенсивности разрыва линейной функцией по времени дает вполне удовлетворительные результаты. Однако чем быстрее изменяется кривизна поверхности разрывов, тем уже становится допустимая область аналитического решения и тем необходимее переход к численной схеме расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00001-а).

## Литература

1. Куликовский А.Г., Свешикова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. – М.: Московский лицей. 1998. – 412с.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400с
3. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. В кн. «Вычислительные методы в гидродинамике» – М.: Мир, 1967. – С. 212-263.
4. Рагозина В.Е., Воронин И.И., Вековичинин Е.Л. Об использовании прифронтной асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами // Проблемы естествознания и производства. – 1995. – Вып. 115. – С. 25-27.
5. Буренин А.А., Зиновьев П.В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. – М.: «Физматлит», 2003. – С. 146-155.
6. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир, 1964. – 308с.
7. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток: Изд-во «Дальнаука», 1998. – 528с.
8. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5, № 1. – С. 100-109
9. Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикладная механика, 1985. – Т. XXI, № 5. – С. 3-8.
10. Voa-The Chu. Finite Amplitude Waves in Incompressible Perfectly Elastic Materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1964. – V. 12, N. 1. – P. 45-57.
11. Y.B. Fu, N.H. Scott Transverse Cylindrical Simple Waves and Shock Waves in Elastic Non-Conductors // International Journal of Solids and Structures. – 1992. – V. 27. – P. 547-563.
12. Буренин А.А., Россихин Ю.А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток: Изд-во ДВО АН СССР, 1991. – С. 123-137.
13. Буренин А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный математический журнал. – 1999. – Вып. 8. – С. 49-72.