

ПАНЕЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР ВРАЩАЮЩИХСЯ КРУГОВЫХ ОБОЛОЧЕК, ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

С.А. Бочкарёв, В.П. Матвеев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, 614013, Россия

Для анализа панельного флаттера вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, разработан конечно-элементный алгоритм, в котором принимается во внимание воздействие центробежных, кориолисовых и аэроупругих сил. Матрица геометрической жесткости, учитывающая влияние начального окружного усилия, вызванного центробежными силами, формируется в результате решения статической задачи. Аэродинамическое давление вычисляется по квазистатической аэродинамической теории. Представлены результаты решения задачи для оболочек с различными геометрическими параметрами и граничными условиями. Показано, что при определенных геометрических параметрах вращение оболочки приводит к снижению границы аэроупругой устойчивости.

PANEL FLUTTER OF ROTATING CIRCULAR SHELLS IN A SUPERSONIC GAS FLOW

S.A. Bochkarev and V.P. Matveyenko

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, 614013, Russia

A finite element algorithm for panel flutter analysis of rotating circular shells in a supersonic gas flow is developed. The algorithm takes into account the effects of centrifugal, Coriolis and aeroelastic forces. A geometric rigidity matrix evaluating the influence of the initial circumferential force caused by centrifugal forces is constructed during the solution of the static problem. Aerodynamic pressure is calculated using the quasi-static aerodynamic theory. The results of the solution to the problem of shells with varying geometric parameters and under different boundary conditions are given. It is shown that in the case of specific geometric parameters, the rotation of the shell leads to a decrease in the aeroelastic stability boundary.

За последние десятилетия задача об аэроупругой устойчивости оболочек вращения, взаимодействующих со сверхзвуковым потоком газа, интенсивно исследовалась как аналитически [1], так и различными численными методами, включая метод конечных элементов [2]. В этих работах изучено влияние разнообразных геометрических, физико-механических и силовых факторов на границу аэроупругой устойчивости.

Воздействие потока газа на деформируемое тело может привести к его статической (дивергенция) или динамической (флаттер) потере устойчивости. К аналогичной потере устойчивости упругого тела может привести и значительная скорость его вращения [3]. Поэтому представляет интерес изучение совместного воздействия всех дестабилизирующих механизмов и оценка их влияния друг на друга.

Рассматривается упругая оболочка вращения длиной L , минимальным радиусом R , толщиной h и углом конусности α . Оболочка вращается с постоянной угловой скоростью Ω относительно горизонтальной оси и обтекается сверхзвуковым потоком газа со скоростью U . В результате решения задачи необходимо найти такую комбинацию скорости потока газа и скорости вращения, при которой невозмущенная форма оболочки перестает быть устойчивой.

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, компоненты вектора деформации в криволинейной системе координат (s, θ, z) записываются следующим образом [4]:

$$\varepsilon_{ss} = E_{11} + zk_{11}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = E_{22} + zk_{22}, \quad \varepsilon_{s\theta} = E_{12} + zk_{12},$$

где

$$E_{11} = \varepsilon_1 + 1/2\theta_1^2, \quad k_{11} = k_1 \quad (1 \Leftrightarrow 2); \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + \theta_1\theta_2, \quad k_{12} = 2\tau. \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \alpha + w \cos \alpha \right), \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \alpha \right), \\ \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad k_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad k_2 = \frac{1}{r^2} \left(\cos \alpha \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial s}, \\ \tau &= \frac{1}{r} \left(\cos \alpha \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right) + \frac{\sin \alpha}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \alpha \right), \quad \theta_2 = \frac{1}{r} \left(v - \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

а также обозначено: u, v, w — меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений; θ_i — углы поворота недеформируемой нормали; r — текущий радиус оболочки.

Компоненты оболочечных деформаций (1) можно представить в матричной форме:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_* + 1/2 \mathbf{E} \mathbf{e},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{E_{11}, E_{22}, E_{12}, k_{11}, k_{22}, k_{12}\}^T$; $\boldsymbol{\varepsilon}_* = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, k_1, k_2, 2\tau\}^T$ — линейная часть деформации, $\mathbf{e} = \{0, 0, 0, 0, \theta_1, \theta_2, 0, 0, 0\}^T$; \mathbf{E} — матрица линейных множителей, которая имеет ненулевые компоненты ($E_{15} = \theta_1, E_{16} = \theta_2, E_{35} = \theta_2, E_{36} = \theta_1$).

Соотношения упругости в матричном виде выглядят как

$$\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon},$$

при этом \mathbf{T} — вектор усилий и моментов, \mathbf{D} — матрица жесткостей:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & b_{12} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & b_{44} \\ b_{11} & b_{12} & 0 & c_{11} & c_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты, входящие в матрицу жесткостей \mathbf{D} , определяются по формулам:

$$(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \int_h (1, z, z^2) B_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 4).$$

Здесь B_{ij} — коэффициенты, которые, согласно закону Гука для изотропного материала, связаны с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига G соотношениями:

$$B_{11} = B_{22} = E/(1 - \nu^2), \quad B_{12} = B_{21} = E\nu/(1 - \nu^2), \quad B_{44} = G.$$

Энергия деформации оболочки с дополнительными слагаемыми, учитывающими предварительное нагружение, имеет вид [5]:

$$2J = \int_S \boldsymbol{\varepsilon}_*^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_* dS + \int_S \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{e} dS. \quad (2)$$

Элементы матрицы $\boldsymbol{\sigma}^0$ находятся из условия $\mathbf{E}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_*^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{e}$ и ненулевыми являются только $\sigma_{55}^0 = T_{11}$, $\sigma_{66}^0 = T_{22}$ (верхний индекс «0» означает начальное равновесное состояние).

Кинетическая энергия оболочки, вращающейся с угловой скоростью Ω , определяется соотношением [6]

$$2T = \int_V \rho_m \left[(\dot{u} + \nu\Omega \sin \alpha)^2 + (\dot{v} - \Omega(r + w \cos \alpha + u \sin \alpha))^2 + (\dot{w} + \nu\Omega \cos \alpha)^2 \right] dV, \quad (3)$$

где ρ_m — удельная плотность материала оболочки.

Выражение для работы W , совершаемой внешними аэродинамическими силами, записывается как

$$W = \int_S p_a w dS. \quad (4)$$

Аэродинамическое давление p_a , действующее со стороны сверхзвукового потока газа на упругую оболочку, согласно квазистатической аэродинамической теории (один из вариантов поршневой теории) [7], определяется выражением

$$p_a = -p_1 (\partial w / \partial s + p_2 \partial w / \partial t), \quad p_1 = \kappa p_\infty M^2 / \beta, \quad p_2 = (M^2 - 2) / (U \beta^2). \quad (5)$$

Здесь: $M = U/c$ — число Маха; p_∞ , c — статическое давление и скорость звука в невозмущенном потоке газа соответственно; κ — показатель адиабаты; $\beta = (M^2 - 1)^{0,5}$.

Для тел вращения компоненты вектора перемещения можно разложить в тригонометрические ряды по окружной координате θ

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} u^c \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} u^a \sin j\theta, \\ v &= \sum_{j=0}^{\infty} v^c \sin j\theta - \sum_{j=0}^{\infty} v^a \cos j\theta, \\ w &= \sum_{j=0}^{\infty} w^c \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} w^a \sin j\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Выбор знака «–» при антисимметричных гармониках для окружного перемещения позволяет получать одинаковые матрицы жесткости элементов для симметричных и антисимметричных составляющих [4].

После выражения в (6) симметричных и антисимметричных неизвестных через узловые перемещения для произвольного конечного элемента получается

$$U = \{u, v, w\}^T = \mathbf{N}d_e = [\mathbf{N}^c \mathbf{N}^a] \{d_e^c d_e^a\}^T, \quad (7)$$

где \mathbf{N} — матрица функций формы, d_e — вектор узловых перемещений конечного элемента. С учетом (7)

$$\varepsilon_* = \mathbf{B}d_e, \quad e = \mathbf{G}d_e, \quad (8)$$

где \mathbf{B} , \mathbf{G} — матрицы связи деформаций ε_* , e с узловыми перемещениями.

Для вывода уравнений движения используется уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}^T} \right) - \frac{\partial L}{\partial d^T} = Q. \quad (9)$$

Здесь: d, \dot{d} — обобщенные перемещения и скорости; $L = T - J$ — функция Лагранжа; $Q = \partial W / \partial d^T$ — обобщенные силы. Из уравнений (2–5) с учетом (8), из (9) получается матричное уравнение

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_c + \mathbf{A})d + \mathbf{M}\ddot{d} + (\mathbf{C}_c + \mathbf{C}_a)\dot{d} = 0. \quad (10)$$

Здесь обозначено:

$$\mathbf{K} = \sum_{N_s} \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS \quad \text{— матрица жесткости;}$$

$$\mathbf{M} = \sum_{N_s} \int \rho_0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS \quad \text{— матрица масс;}$$

$$\mathbf{K}_g = \sum_{N_s} \int \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{G} dS \quad \text{— матрица геометрической жесткости;}$$

$$\mathbf{K}_c = \sum_{N_s} \int \rho_0 \Omega^2 \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{N} dS \quad \text{— матрица влияния центробежных сил;}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{N_s} \int p_1 \mathbf{N}_w^T \partial \mathbf{N}_w / \partial s dS \quad \text{— матрица аэродинамической жесткости;}$$

$$\mathbf{C}_c = \sum_{N_s} \int 2\rho_0 \Omega \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}_2 \mathbf{N} dS \quad \text{— матрица влияния сил Кориолиса;}$$

$$\mathbf{C}_a = \sum_{N_s} \int p_1 p_2 \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w dS \quad \text{— матрица аэродинамического демпфирования;}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & 0 & \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha & 0 & \cos^2 \alpha \end{bmatrix};$$

$\rho_0 = \int_h \rho_m dz$; \mathbf{N}_w — матрица функции формы нормальной составляющей вектора перемещений; N — количество конечных элементов, на которые разбивается оболочка.

Матрица и вектор с верхним индексом «0» определяются из решения осесимметричной статической задачи $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$, где $\mathbf{f}_e = \{\rho_0 r \Omega^2 \sin \alpha \ 0 \ \rho_0 r \Omega^2 \cos \alpha\}^T$.

С учетом выбранного представления (6) в матрицах \mathbf{C}_c и \mathbf{K}_c осуществляется перевязка симметричных и антисимметричных составляющих, причем матрица \mathbf{C}_c является кососимметричной. Из представления возмущенного движения оболочки как

$$\mathbf{d} = \mathbf{q} \exp(i^* \lambda t), \quad i^* = \sqrt{-1}, \quad \lambda = \lambda_1 + i^* \lambda_2,$$

где \mathbf{q} — некоторые функции координат, а λ — характеристический показатель, окончательно получается

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_c + \mathbf{A} - \lambda^2 \mathbf{M} + i^* \lambda [\mathbf{C}_c + \mathbf{C}_a]) \mathbf{q} = 0. \quad (11)$$

Решение задачи сводится к вычислению и анализу собственных значений λ системы (11). Комплексные собственные значения λ находятся методом QR -преобразования [8]. Для этого система (11) сводится к стандартной проблеме собственных значений

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}_c + \mathbf{C}_a) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_c + \mathbf{A}) \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \lambda \mathbf{q},$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

Для дискретизации оболочки используется стандартный осесимметричный конечный элемент с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений линейным полиномом, а нормальной компоненты — кубическим полиномом. Все расчеты выполнены при числе конечных элементов, равном 40.

В представленных ниже примерах используется оболочка со следующими свойствами: $E = 1,1 \times 10^{11}$ Па; $\nu = 0,35$; $\rho_m = 8,9 \times 10^3$ кг/м³; $R = 0,2032$ м. Параметры потока газа: $M = 3$; $c = 213$ м/с; $\kappa = 1,4$. Варьируемой величиной служит статическое давление в невозмущенном потоке газа p_∞ , для которого вводится безразмерный параметр $\eta = \kappa p_\infty M^2 R^3 / \beta D$, где $D = Eh^3 / (1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость.

Начальный цикл исследований связан с изучением влияния вращения оболочки на границу аэроупругой устойчивости. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Рассматривается тонкая цилиндрическая оболочка с относительными размерами $L/R = 1,925$, $R/h = 2000$, свободно опертая ($\nu = w = 0$) с двух торцов. Характерной особенностью таких оболочек является то, что критическое значение аэродинамической нагрузки соответствует высоким номерам гармоник. Это демонстрирует рисунок 1, где представлено изменение безразмерного критического параметра давления η в зависимости от номера гармоники j при различных скоростях вращения оболочки. В результате расчетов установлена и другая особенность оболочки с такими параметрами — наблюдается повышение границы аэроупругой устойчивости даже при минимальной скорости вращения оболочки. Увеличение скорости вращения вызывает смещение критического номера гармоники в область более низких значений.

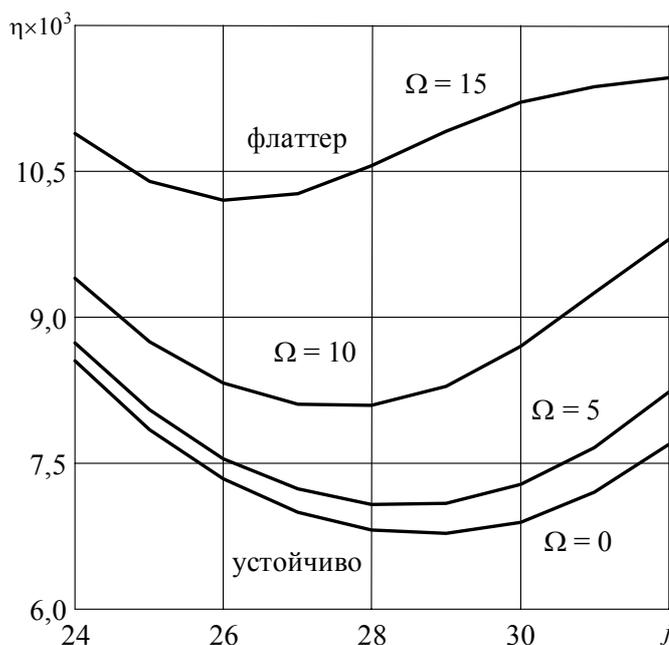


Рис. 1. Граница устойчивости цилиндрической оболочки, свободно опертой на обоих торцах, при различных скоростях вращения Ω (об/с) ($L/R = 1,925$; $R/h = 2000$)

Качественно это совпадает с результатами исследований панельного флаттера цилиндрических оболочек с учетом внутреннего статического давления, полученными в работе [9].

Пример 2. Рассматривается коническая оболочка с теми же граничными условиями, что и в первом примере, но имеющая размеры $L/R = 8$, $R/h = 200$ и $\alpha = 5^\circ$. Результаты расчетов представлены в таблице 1. Для заданных параметров оболочки критической является первая гармоника. Обращает на себя внимание резкий скачок в значении η , который наблюдается при переходе от четвертой гармоники к пятой. Он обусловлен изменением характера неустойчивости: если на пятой гармонике (и более высоких) флаттер является результатом слияния двух первых форм колебаний, то на четвертой гармонике — результатом слияния шестнадцатой и семнадцатой, а на критической гармонике — еще более высоких форм. При наличии такого высокочастотного флаттера влияние скорости вращения проявляется особенно сильно и приводит к снижению границы аэроупругой устойчивости.

Таблица 1. Изменение безразмерного критического параметра давления η в зависимости от номера гармоники j и скорости вращения Ω для конической оболочки, свободно опертой на обоих торцах

Номер гармоники j	Скорость вращения Ω (об/с)				
	0	5	10	20	50
	η				
1	860,6	828,2	801,6	775,2	929,5
2	1759,0	1733,0	1707,0	1655,0	1508,0
3	4995,0	4991,0	4988,0	4989,0	5040,0
4	5816,0	5811,0	5808,0	5807,0	5854,0
5	1140,0	1146,0	1208,0	1725,0	5165,0
6	978,1	992,8	1065,0	1338,0	3241,0
7	1052,0	1063,0	1108,0	1289,0	2794,0
8	1090,0	1103,0	1153,0	1352,0	2847,0

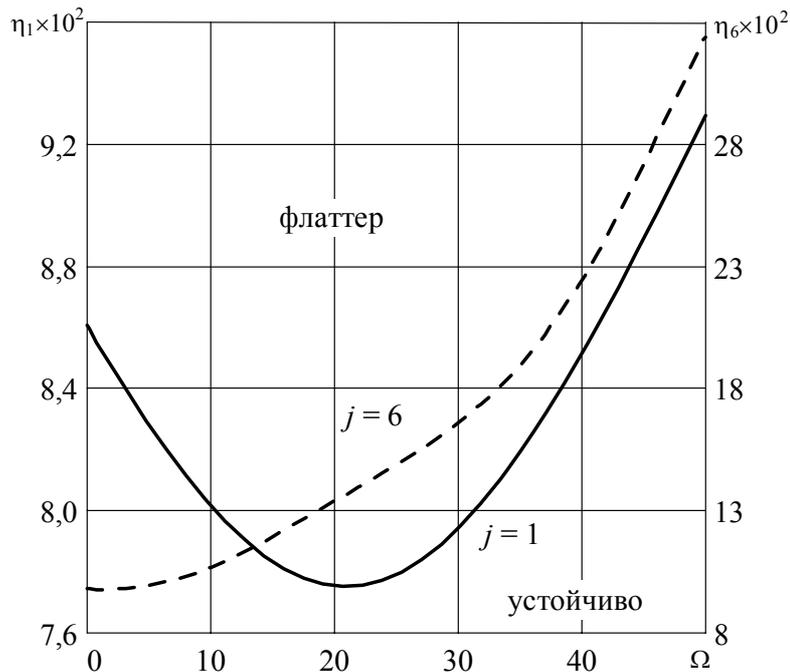


Рис. 2. Изменение безразмерного критического параметра давления η от скорости вращения Ω (об/с) для конической оболочки, свободно опертой на обоих торцах

Более детально это показано на рисунке 2. Здесь представлено изменение безразмерного критического параметра давления η от скорости вращения Ω для первой и шестой гармоник. Для первой гармоники при $\Omega = 20,7$ об/с снижение параметра η достигает 10%, после чего начинает сказываться стабилизирующее влияние окружного усилия, вызванного центробежными силами. Для шестой гармоники дестабилизирующее влияние вращения практически не проявляется.

Пример 3. Рассматривается коническая оболочка, жестко закрепленная на одном торце ($u = v = w = \partial w / \partial s = 0$) и свободная на другом, при $L/R = 4$, $R/h = 100$ и $\alpha = 15^\circ$. Результаты расчетов представлены в таблице 2. В этом случае на начальных гармониках вращение оболочки также оказывает дестабилизирующее влияние, особенно на первой гармонике: при $\Omega = 97$ об/с снижение η достигает 16,13%. Но при данных параметрах оболочки это не имеет такой важности, поскольку критической является седьмая гармоника. На этой гармонике при $\Omega = 1,1$ об/с снижение η является крайне незначительным и составляет 0,03%.

Для этого варианта оболочки приводится пример исследования аэроупругой устойчивости, который с учетом вращения оболочки имеет свои особенности. На рисунке 3 представлено изменение действительной $\lambda_R = \text{Re} \lambda$ и мнимой $\lambda_I = \text{Im} \lambda$ частей двух первых ($m = 1$ и $m = 2$) собственных значений от безразмерного параметра давления η при $\Omega = 20$ об/с и $j = 5$. При отсутствии потока газа ($\eta = 0$) собственные частоты являются действительными. Учет сил Кориолиса приводит к расщеплению собственных частот на прямую и обратную, которые соответствуют волнам, бегущим в разные стороны с различными скоростями [10].

Наличие потока газа делает собственные значения комплексными. С увеличением скорости потока действительные части собственных значений начинают сближаться друг с другом и при некотором значении η совпадают. С дальнейшим увеличением скорости одна из мнимых частей пары прямых мод в точке η_F становится отрицательной, что соответствует возникновению панельного флаттера. В точке η_B в отрицательную область переходит одна из мнимых частей пары обратных мод.

Таблица 2. Изменение безразмерного критического параметра давления η в зависимости от номера гармоники j и скорости вращения Ω для конической оболочки, жестко закрепленной на одном торце и свободной на другом

Номер гармоники j	Скорость вращения Ω (об/с)			
	0	5	10	20
	η			
1	740,9	727,4	714,9	692,6
2	847,8	843,7	839,4	830,2
3	1347,0	1346,0	1346,0	1345,0
4	1718,0	1713,0	1709,0	1702,0
5	564,7	563,8	574,1	641,6
6	325,2	326,1	331,7	360,8
7	295,6	296,5	301,8	327,3
8	314,5	315,8	321,2	348,3
9	344,5	346,0	352,1	381,8
10	383,3	385,1	392,0	425,0

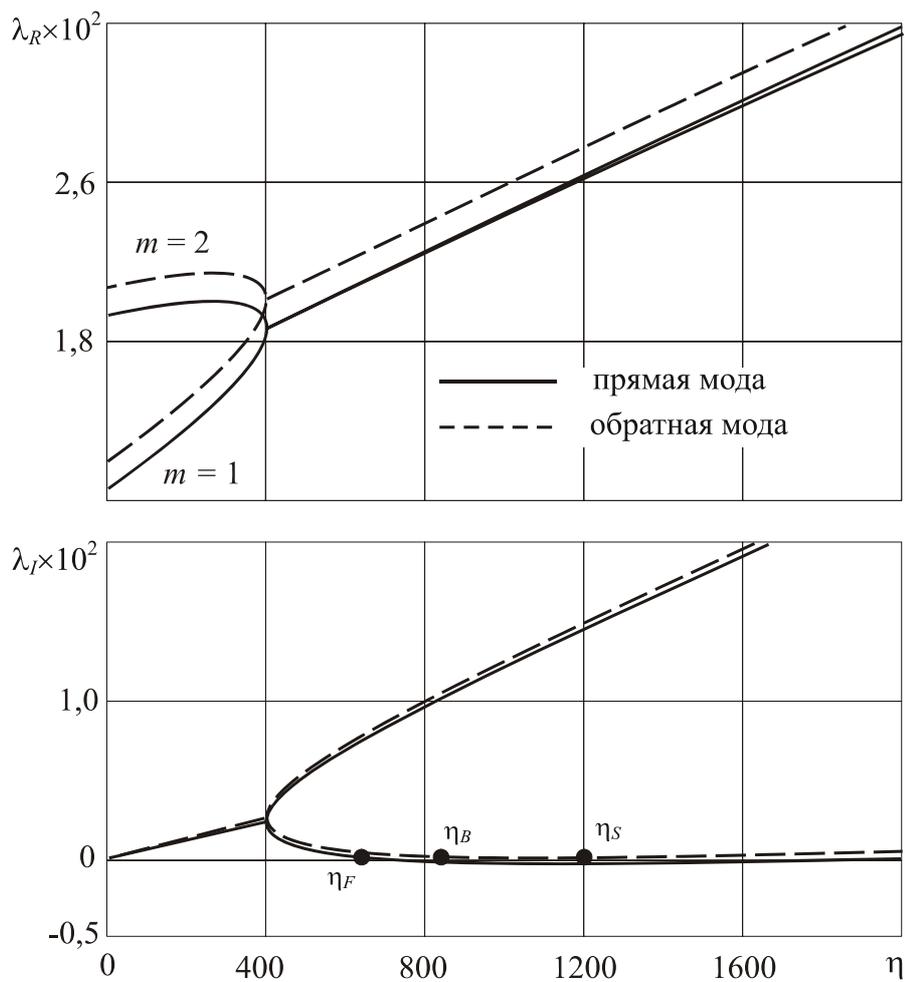


Рис. 3. Изменение действительной λ_R и мнимой λ_I частей двух первых собственных значений λ (Гц) конической оболочки, жестко закрепленной на одном торце и свободной на другом, от безразмерного параметра давления η

Исследование панельного флаттера без учета вращения оболочки показывает, что последующее увеличение скорости потока приводит к дальнейшему уменьшению отрицательной мнимой части [5]. С учетом вращения оболочки этого не происходит: достигнув минимального значения, сначала мнимая часть пары обратных мод в точке η_s становится положительной, а затем становится положительной и мнимая часть пары прямых мод. Однако появление второй области устойчивости не наблюдается, поскольку еще при отрицательной мнимой части пары прямых мод неустойчивость начинает проявляться на паре более высоких собственных значений, которые на данном рисунке не приводятся.

Другой цикл исследований связан с изучением влияния сверхзвукового потока газа на критическую скорость вращения оболочки. Как уже отмечалось, значительные скорости вращения могут приводить к потере устойчивости оболочки. В первом примере критическая скорость вращения оболочки ($L/R = 1,925$; $R/h = 2000$) составляет $\Omega = 156,8$ об/с при $j = 1$. Неустойчивость проявляется в виде флаттера в результате слияния двух первых форм колебаний. Поток газа оказывает стабилизирующее действие на критическую скорость вращения, но крайне незначительное, чтобы принимать его во внимание. Для оболочки ($L/R = 8$; $R/h = 200$) из второго примера критическая скорость вращения достигается на шестой гармонике и равняется $\Omega = 208,28$ об/с. В этом случае неустойчивость проявляется при очень высоких собственных значениях. Поток газа здесь оказывает дестабилизирующее влияние на критическую скорость вращения оболочки, но также очень незначительное.

Таким образом, в результате выполненных исследований установлено, что вращение оболочки может приводить к существенному снижению аэроупругой устойчивости. Непосредственно это проявляется в случаях, когда при определенных геометрических параметрах оболочки критическими являются минимальные номера гармоник.

Литература

1. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1978. – Т. 11. – С. 67-122.
2. Bismarck-Nasr M.N. Finite Element Analysis of Aeroelasticity of Plates and Shells // Applied Mechanics Reviews. – 1992. – V. 45, N. 12. – P. 461-482.
3. Gulyaev V.I., Solov'ev I.L., Belova M.A. On Relationship Between Critical States and Frequencies of Natural Precession Vibrations of Conical Shells in Simple and Compound Rotations // Strength of Materials. – 2004. – V. 36, N. 2. – P. 147-157.
4. Алфутов Н.А., Зиновьев П. А., Попов В. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264с.
5. Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Решение задачи о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14, № 12. – С. 55-71.
6. Sivadas K.R. Vibration Analysis of Pre-Stressed Rotating Thick Circular Conical Shell // J. Sound Vibr. – 1995. – V. 186, N. 1. – P. 99-109.
7. Voss H. M. The Effect of an External Supersonic Flow on the Vibration Characteristics of Thin Cylindrical Shells // J. Aerospace Sciences. – 1961. – V. 3. – P. 945-956.
8. Уилкинсон Дж., Райни К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ: Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 389с.
9. Bismarck-Nasr M.N. Finite Element Method Applied to the Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1976. – V. 10. – P. 423-435.
10. Смирнов А.Л., Товстик П.Е. Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения // Современные проблемы механики и авиации. – М.: Машиностроение, 1982. – С. 280-290.