

ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЧАСТЬ 1. АЛГОРИТМ

В.Н. Ашихмин, П.В. Трусов, А.И. Швейкин

Пермский государственный технический университет, Пермь, 614990, Россия

Для описания процессов обработки металлов давлением (ОМД), сопровождающихся формированием текстуры и анизотропии упругих и пластических свойств, предлагается алгоритм двухуровневой (макро- и мезоуровни) модели. Обсуждаются особенности реализации данного алгоритма, оцениваются требуемые ресурсы машинного времени и памяти. Для повышения эффективности алгоритма предлагается разбиение вычислительной процедуры на компоненты и размещение их на разных компьютерах. Обсуждаются возможные варианты реализации параллельных вычислений. Отдельно рассматриваются особенности алгоритма моделирования процессов ОМД в стационарной постановке.

A TWO-LEVEL MODEL OF STATIONARY ELASTO-PLASTIC DEFORMATION DURING METAL FORMING PROCESSES. PART 1. ALGORITHM

V.N. Ashikhmin, P.V. Trusov and A.I. Shveikin

Perm State Technical University, Perm, 614990, Russia

A two-level model algorithm for describing metal forming processes accompanied by texture formation and anisotropy of elasto-plastic properties is introduced. The peculiarities of realization of the proposed algorithm are discussed, and the required computational time and memory resources are estimated. For effective computation, a parallelization algorithm is introduced, and possible solutions are discussed. In addition, some distinguishing features of simulation of metal forming processes in the stationary formulation of the problem are considered.

1. Введение

Процессы обработки металлов давлением, основанные на больших необратимых (неупругих) деформациях, можно отнести к малоотходным и экономичным технологиям. Высокая чувствительность макросвойств поликристаллических материалов к изменению мезо- и микроструктуры (ориентации кристаллической решетки зерен, их формы и размеров) дает принципиальную возможность за счет выбора соответствующих параметров процессов ОМД (степени и скорости деформирования, геометрии инструмента) формировать изделия с требуемым распределением физико-механических свойств. Однако экспериментальный подбор таких параметров требует огромных материальных и временных затрат. Выход видится в создании теоретических моделей и инженерных методик, позволяющих одновременно исследовать процессы ОМД как на макро-, так и мезоуровне. Появление высокопроизводительных вычислительных кластеров делает данную задачу вполне разрешимой.

Для поликристаллов процессы на макро- и мезоуровнях тесно взаимосвязаны: с одной стороны, макроагружения (макродеформации) играют роль источников, движущей силы изменения мезо- и микроструктуры; с другой стороны, эволюция мезо- и микроструктуры служит фактором, определяющим поведение материала на

макроуровне; управляя мезо- и микроструктурой, можно управлять свойствами материалов на макроуровне. Поэтому в настоящее время в нелинейной механике деформируемого твердого тела построение моделей, описывающих эволюцию мезо- и микроструктуры поликристаллических материалов, является одной из наиболее актуальных проблем [1–3]. Потребность в такого рода моделях возникает, в первую очередь, при анализе процессов ОМД (прокатки, экструзии, равноканального углового прессования и других), ориентированных, в частности, на получение микрокристаллических и субмикрокристаллических, а также текстурированных материалов.

2. Особенности двухуровневых моделей

Для процессов ОМД характерны существенная неоднородность распределения напряжений и деформаций по области деформирования и, как следствие, несовпадение историй деформирования различных материальных подобластей, их мезо- и микроструктуры. При использовании многоуровневого подхода исследуемая область на макроуровне (макротело) заменяется кусочно-однородным (с точки зрения историй нагружения) аналогом, объем которого превосходит представительный объем макроуровня. Каждой такой подобласти в любой момент нагружения ставится в соответствие подобная по форме и размерам подобласть, заполненная однородным (то есть не имеющим внутренней структуры) материалом с соответствующими эффективными свойствами и однородным напряженно-деформированным состоянием (НДС). Подобная подобласть для краткости называется макроточкой. Так как число макроточек в рассматриваемом объеме конечно, то одна макроточка от другой отличается по ее номеру L или по ее лагранжевым координатам (см. Рис.1).

В поликристаллических материалах за представительный объем макроуровня обычно принимается конгломерат, включающий не менее 7 зерен по стороне куба, то есть не менее 343 зерен. При построении модели мезоуровня зернам соответствуют мезоточки, заполненные модельным однородным материалом мезоуровня. В качестве такого материала мезоуровня принимается идеальный кристалл (например, с кубической гранцентрированной решеткой), обладающий соответствующими анизотропными упругими свойствами и набором систем скольжения. Полученная система мезоточек называется поликристаллическим агрегатом (ПКА). Взаимодействия зерен ПКА при необходимости дополняются структурными элементами, описывающими границы зерен. Ориентация кристаллической решетки мезоточки описывается тремя углами Эйлера (или кватернионом), задающими ориентацию кристаллографической системы координат (КСК) мезоточки относительно лабораторной системы координат (ЛСК) макрозадачи.

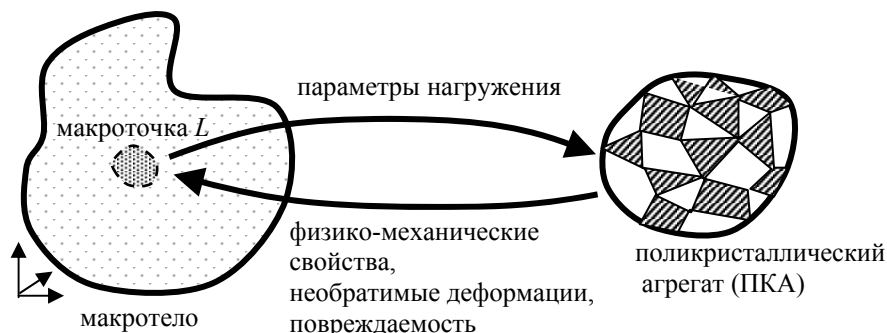


Рис. 1. Схема взаимодействия макро- и мезоуровней

Поведение макроточек определяется моделью макроуровня, учитывающей особенности макрозадачи. Для ПКА разрабатывается соответствующая модель мезоуровня, учитывающая распределение ориентаций КСК мезоточек, особенности межзеренных границ, число и расположение в решетке систем скольжения и т.п. В зависимости от поведения материала на макроуровне используются различные наборы моделей мезоуровня (например, только упругие, упруго-пластические и/или упруговязкопластические модели). Детально модели ПКА и реализующие их алгоритмы описываются в работах [4–9].

Следует остановиться на более подробном рассмотрении особенностей макромоделей. Параметрами процесса на макроуровне являются предписанные условия нагружения (краевые условия), которые и определяют эволюцию макронапряжений $\Sigma(t, L)$ и макродеформаций $E(t, L)$ и их скоростей. Определяющее соотношение макроуровня представляет собой, по существу, закон Гука для анизотропной среды в скоростной (релаксационной) форме:

$$\Sigma^T = C : (D - D^P), \quad (1)$$

где C — тензор модулей упругости; D , D^P — тензор деформации скорости и его пластическая составляющая; символ «:» означает двойное скалярное произведение. Пластическая составляющая деформации скорости D^P и анизотропные упругие свойства C в каждый момент деформирования зависят от микроструктуры (а через нее — от истории нагружения), являясь явными внутренними переменными модели макроуровня [3]. При одноуровневом подходе для данных параметров требуется введение дополнительных гипотез и феноменологических эволюционных уравнений. Проведение надежного обоснования этих гипотез и уравнений весьма сложно. При двухуровневом подходе каждой макроточке ставится в соответствие структурная модель, состоящая из мезоточек (в рассматриваемом случае — модель ПКА) и вводятся правила взаимодействия макро- и мезоуровней. Параметры мезоточек (ориентаций КСК, сопротивление сдвигу по системам скольжения (СС), скорости и накопленные сдвиги по СС) выступают в качестве неявных внутренних переменных [3] макромоделей.

В силу случайного распределения начальных ориентаций КСК мезоточек набор значений неявных внутренних переменных (например, ориентаций КСК), определяемых с помощью модели ПКА, считается выборкой случайных чисел. Тогда правила взаимодействия макро- и мезоуровней сводятся к оценке математических ожиданий соответствующего параметра по имеющейся выборке. Например, скорость пластических деформаций $D^P(t, L)$ макроточки L вычисляется методом ориентационного осреднения выборки скоростей пластических деформаций d^P для момента времени t по всем мезоточкам данной макроточки. При этом предполагается одинаковость хода времени на макро- и мезоуровнях.

Для получения оценки тензора упругих свойств C макроточки используется выборка $\Phi(t, L)$ ориентаций КСК мезоточек ПКА. После преобразования компоненты тензора упругих свойств мезоточек из КСК в ЛСК получается выборка упругих свойств в ЛСК. Затем по одной из моделей (Фойгта, Рейса или Хашина–Штрикмана [10]) находятся эффективные упругие свойства макроточки в ЛСК, которые без дополнительных преобразований, связанных с поворотами, используются в макрозадаче. По выборке $\Phi(t, L)$ ориентаций КСК мезоточек ПКА строится функция распределения ориентаций (ФРО), являющаяся функцией плотности распределения случайной величины. Однако задача построения ФРО по выборке ее значений (задача аппроксимации) является далеко не однозначной и достаточно затратной в плане машинного времени.

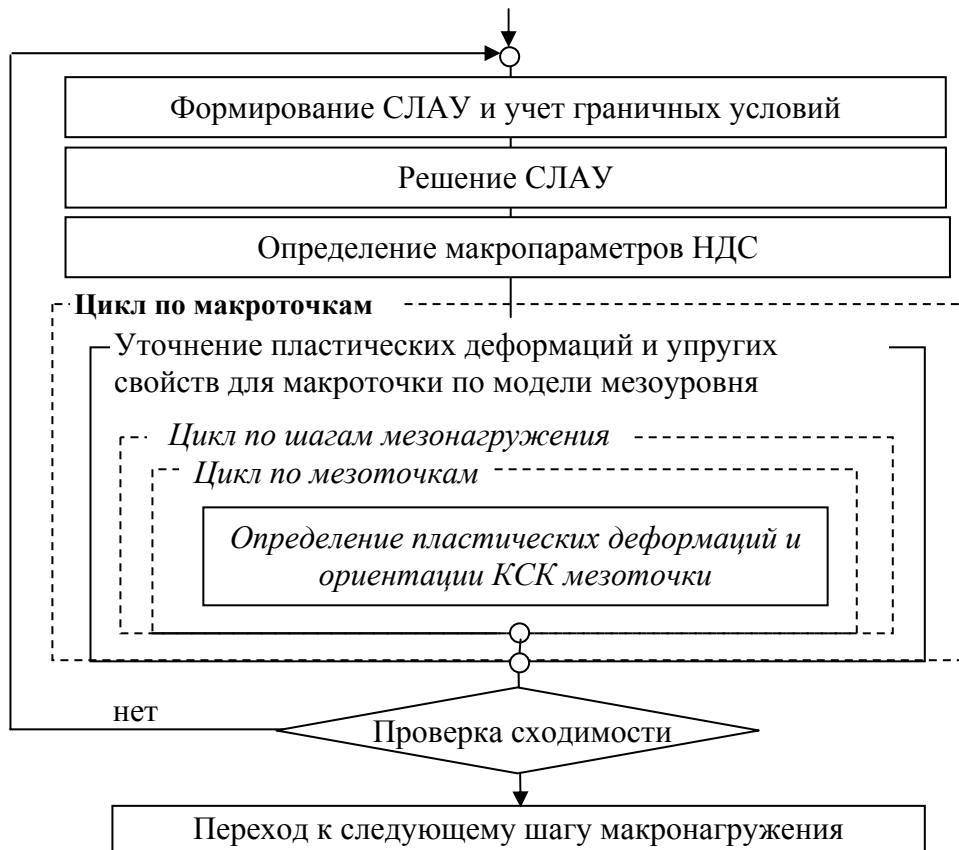


Рис. 2. Алгоритм двухуровневого подхода на шаге макронагружения

Общий алгоритм двухуровневого подхода заключается в следующем (Рис. 2). Задается начальное распределение макросвойств в момент времени t , определяемое из решения задачи на предыдущем временном шаге; для первого шага по времени используются упругие характеристики. В соответствии со стандартной процедурой метода конечных элементов (МКЭ) (или любого другого численного метода) с применением определяющего соотношения (1) формируется и решается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). По определенным из решения скоростям перемещений вычисляются распределения скоростей макродеформаций и макронапряжений, интегрирование которых дает макронапряжения и макродеформации на конец шага нагружения в момент времени $t+\Delta t$.

На каждом шаге нагружения реализуется итерационная процедура, обеспечивающая взаимосвязь моделей макро- и мезоуровней, то есть для каждой макроточки определяются изменения ориентации КСК материала мезоточек и приращения необратимых деформаций в них. При этом в качестве параметров нагружения для модели ПКА используются макронапряжения или макродеформации и применяется модель мезоуровня. По вычисленным ориентациям КСК мезоточек ПКА определяются новые эффективные упругие свойства макроточки, а по выборке необратимых деформаций в мезоточках — средние необратимые макродеформации макроточки. Далее происходит возврат к модели макроуровня и новое уточнение макронапряжений и макродеформаций. Итерационная процедура завершается при достижении сходимости по макропараметрам.

Как любая методика, двухуровневый подход имеет свои достоинства и недостатки. К достоинствам подхода относятся:

- определение параметров мезоструктуры поликристалла (распределения ориентаций КСК зерен, их размеров и формы);
- моделирование макросвойств, существенно зависящих от мезоструктуры, в частности, анизотропии упругих, пластических и прочностных свойств;
- относительно простой вид определяющих соотношений макроуровня (например, закон Гука в форме (1));
- ускорение работы программы за счет параллельных вычислений.

Среди недостатков данного подхода отмечаются:

- невозможность получения аналитического решения задачи;
- большое количество неявных внутренних переменных для описания мезоуровня;
- значительные запросы ресурсов памяти и времени ЭВМ;
- высокая трудоемкость разработки программ для ЭВМ.

Однако отмеченные недостатки носят не принципиальный характер.

Реализация двухуровневого подхода требует создания соответствующего программного комплекса. В любом программном комплексе, связанном с моделированием процессов, выделяются три традиционных модуля: препроцессор, процессор и постпроцессор (Рис. 3).

Связь модулей по данным осуществляется через информационную модель физического процесса, представляющую собой базу данных для хранения его информационного образа. Логическая схема модели адаптирована под основной применяемый численный метод (например, метод конечных элементов). Подготовка данных для информационной модели производится препроцессором и процессором. Постпроцессор не добавляет в информационную модель новых данных, а лишь употребляет имеющиеся данные для анализа и отображения результатов.

Подобный подход имеет ряд преимуществ. Процессор, пре- и постпроцессоры могут быть достаточно независимыми, что позволяет разрабатывать и модифицировать их в разное время (например, в первую очередь, — процессор, а пре- и постпроцессоры — во вторую), разными разработчиками и на разных вычислительных платформах. Особенностью современного состояния вычислительных комплексов являются большие объемы доступной как внешней, так и внутренней памяти компьютера. При этом пользователем оплачивается только затраченное машинное время без учета объема занятой внутренней и внешней памяти машины. Следовательно, выгоднее экономить машинное время и не столь тщательно заботиться об экономии памяти. Наибольшая потребность в машинном времени испытывается процессором: иногда она измеряется днями и даже месяцами работы мощных вычислительных кластеров. Поэтому процессор желательно использовать однократно, а анализ полученных данных проводить независимо, возможно, с помощью более дешевой вычислительной системы. Реализация подхода осуществляется за счет полноты информационной модели, позволяющей

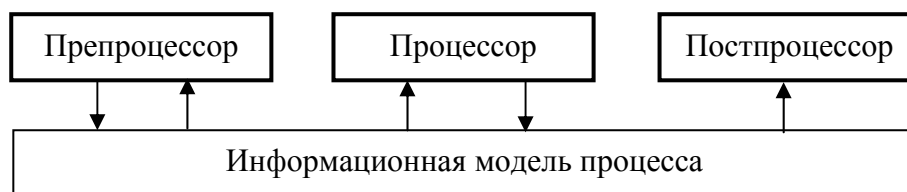


Рис. 3. Схема программного комплекса

постпроцессору выполнять анализ данных на основе относительно простых и эффективных алгоритмов, по возможности, без использования математической модели, заложённой в процессоре. Подобные схемы организации вычислений реализуются во многих современных комплексах программ (ANSIS, ABAQUS и т.п.).

Двухуровневый подход обязывает информационную модель давать постпроцессору возможность обработки данных как макро-, так и мезоуровней, что существенно повышает запросы к необходимой памяти. Например, потребность в анализе эволюции ориентаций КСК зерен по отношению к характерным осям деформирования материала для любой из рассматриваемых макроточек области при решении нестационарной задачи приводит к включению в информационную модель данных об ориентации мезоточек для всех макроточек на всем интервале нагружения. Сложность проектирования информационной модели состоит в том, что нельзя заранее предусмотреть все возможные информационные запросы пользователей, поэтому следует создавать её избыточной по внутренним для математической модели данным.

Оценка необходимой внешней памяти ЭВМ для хранения данных об одной мезоточке на шаге нагружения приводится в таблице в предположении, что материал мезоточки имеет K систем скольжения, а сама мезоточка окружена M_p соседями.

Так при $K = 24$ и $M_p = 12$ общий объем внешней памяти для мезоточки равняется 0,3 Кбайт. Потребности во внутренней оперативной памяти, как правило, выше, так как используются дополнительные ресурсы для хранения промежуточных результатов. При условии, что макроточка состоит из N_p мезоточек, а макрообласть содержит N_m макроточек, для описания состояния макрозадачи на мезоуровне в фиксированный момент нагружения t требуется $M_t = M_p \times N_p \times N_m$ Кбайт памяти. Если принять $N_p = 300$ и $N_m = 10000$, то $M_t \sim 879$ Мбайт, что является вполне доступной величиной даже для современного персонального компьютера. Но, например, при решении нестационарной задачи для последующего анализа даже при условии, что хранятся не все данные, а лишь информация для некоторых N_s шагов по времени, объем необходимой внешней памяти для хранения информационного образа процесса возрастает до значительных величин (при $N_s = 100$ понадобится до 87,9 Гбайт), что может вызвать затруднения для ПЭВМ, но вполне приемлемо для современных вычислительных кластеров.

Затраты машинного времени значительно снижаются при использовании методов параллельных вычислений (распараллеливания). Причем степень распараллеливания может быть разной. В первую очередь разбиение программы на компоненты применяется к циклу по макроточкам (Рис. 2). На шаге нагружения отдельные макроточки не связаны друг с другом и, следовательно, нет необходимости в обмене данных между процессорами, занятыми расчетом этих макроточек. Это значительно упрощает процедуру разбиения, а отсутствие обмена данными между процессорами существенно уменьшает затраты машинного времени. Для распараллеливания цикла по макроточкам удобно использовать технологию MPI (Message Passing Interface). Более

Таблица. Оценка ресурсов памяти ЭВМ для мезоточки на шаге нагружения

Название параметра	Количество параметров	Размер параметра, байт	Общий объем, байт
Компоненты тензора полных макродеформаций	6	4	24
Компоненты тензора макронапряжений	6	4	24
Сдвиги по системам скольжения	K	4	$4K$
Упрочнение по системам скольжения	K	4	$4K$
Ориентация КСК	3	8	24
Описание соседних мезоточек	M_p	4	$4M_p$
Прочие параметры			24

трудоемким является процесс параллельных вычислений для внутренних циклов макроточки и методов решения СЛАУ макрозадачи. Возможно, что в этом случае больший выигрыш можно получить от использования технологии OpenMP (Open Multi-Processing), ориентированной на многоядерность микропроцессоров.

3. Модель стационарного процесса ОМД

Среди процессов ОМД в отдельную группу выделяются процессы получения длинномерных изделий: волочение, прессование, прокатка, прямое выдавливание (Рис. 4) и т.п.

Длительность неустановившейся стадии в этих процессах относительно мала и по длине изделия составляет несколько характерных размеров его поперечного сечения. Поэтому моделирование на макроуровне производится только для установившейся стадии в стационарной постановке. В этом случае состояние в фиксированной точке пространства рассматриваемой области не зависит от времени, а траектории движения всех материальных точек совпадают с линиями тока. В отличие от задач течения жидкости и газа в процессах деформирования твердого тела учитывается память материала, что приводит к появлению в алгоритме соответствующей итерационной процедуры. Для двухуровневой модели процесса количество макроточек во всех поперечных сечениях потока должно оставаться неизменным, совпадающим с числом макроточек во входном сечении S_{in} области Ω (Рис. 5). При этом макроточка движется по трубке тока, которая начинается во входном сечении S_{in} области Ω и заканчивается в выходном S_{out} . Трубка не может начинаться или заканчиваться на боковой поверхности S_B области Ω . Из определения макроточки следует, что в поперечном сечении трубки тока состояние параметров среды принимается однородным.

Приведенная схема стационарной модели значительно упрощает алгоритм двухуровневого подхода. Во-первых, число макроточек N_m совпадает с количеством трубок тока, что на порядок и более уменьшает их количество. В тоже время, на макроуровне макроточки рассматриваются независимо друг от друга, что позволяет сохранить описанное выше разбиение алгоритма на части. Во-вторых, из решения макрозадачи на отдельной итерации определяется последовательность нагружения

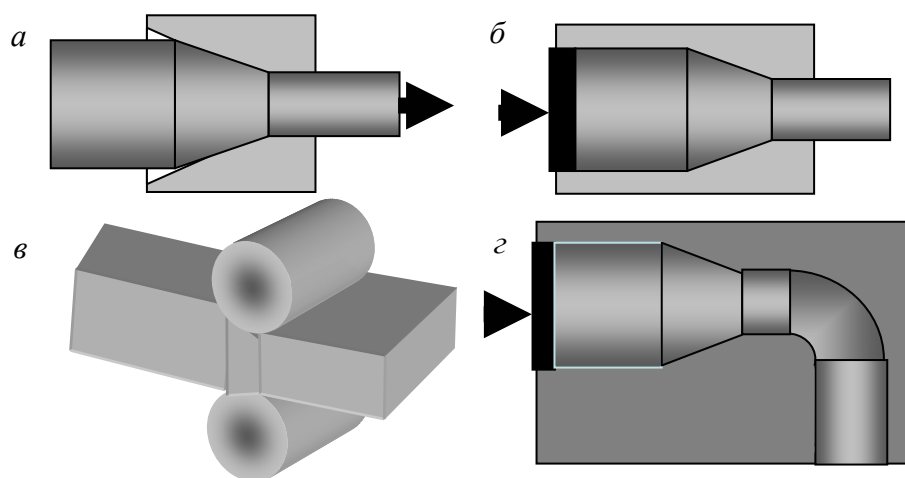


Рис. 4. Примеры стационарных процессов ОМД: волочение (а), прессование (б), прокатка (в), равноканальное угловое прессование (г)

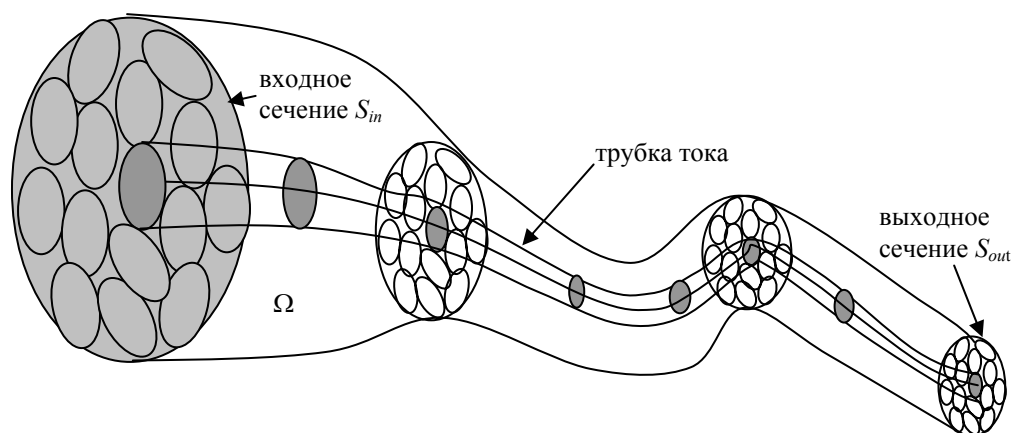


Рис. 5. Схема движения макроточек по трубкам тока (показаны поперечные сечения, проходящие через центр масс макроточек)

для макроточки на протяжении ее движения по всей трубке тока, то есть для всего времени моделирования. Таким образом, в стационарной задаче отсутствует цикл по шагам нагружения и уменьшается время решения задачи на ЭВМ. Однако процесс нагружения макроточки при ее движении по всей трубке тока становится более сложным и длительным, что ведет к увеличению необходимого машинного времени. Лишь использованием параллельных внутренних циклов для макроточки можно добиться сокращения этого времени (Рис. 2).

Для построения численной процедуры решения задачи макроуровня удобно воспользоваться методом конечных элементов. При этом макроточка считается состоящей из одного или нескольких конечных элементов. В стационарной задаче наиболее приемлемой формой макроточки является треугольная призма, состоящая из трех конечных симплекс-элементов в форме тетраэдра (Рис. 6, а). В этом случае каждое поперечное сечение области заполняется треугольными основаниями призм. Все трубки тока в поперечном сечении также имеют форму треугольника.

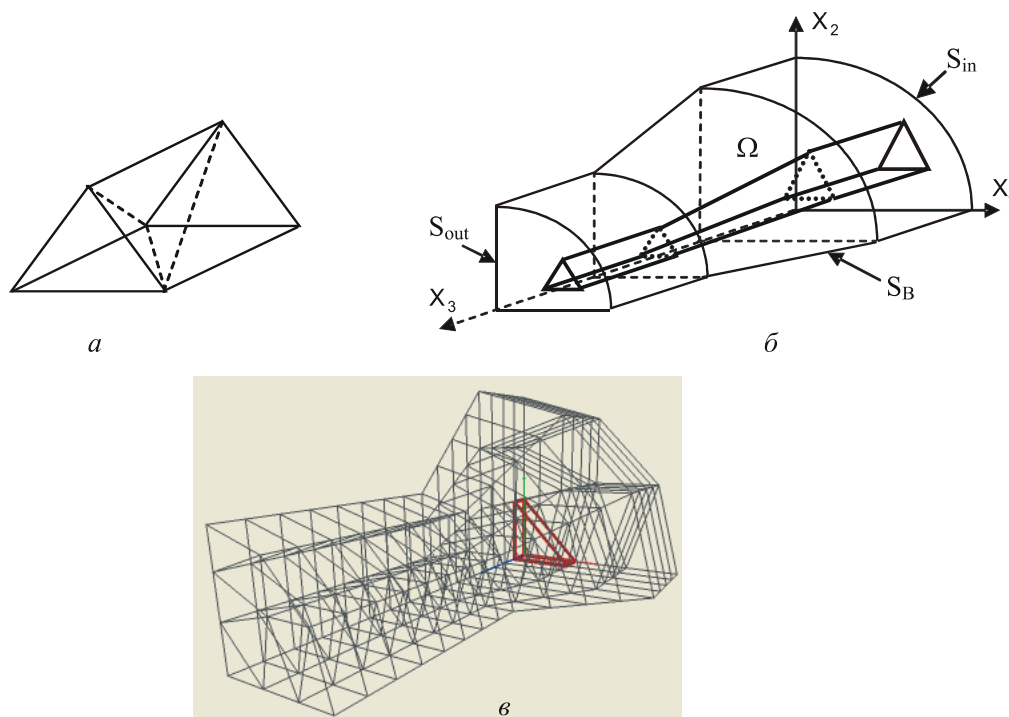


Рис. 6. Дискретные аналоги макроточки (а), трубки тока (б), области (в)

Методика решения задачи макроуровня строится на основе эйлерово-лагранжевого подхода [11–13], суть которого состоит в отслеживании истории деформирования каждой макроточки при ее движении по фиксированным в пространстве трубкам тока.

Процесс моделирования демонстрируется на примере стационарной макрозадачи для процесса ОМД. Моделируемое тело занимает область Ω с границей $S = S_B \cup S_{in} \cup S_{out}$. Считается, что точная конфигурация обрабатываемого материала (форма свободной поверхности, зоны контакта, трубки тока) неизвестны и уточняются итерационно в процессе моделирования. Во входном сечении S_{in} состояние каждой макроточки полагается известным как на макро-, так и мезоуровнях. В частности, если материал заготовки находится в отожженном состоянии, то исходное состояние всех макроточек для всех трубок тока считается ненапряженным и недеформированным; при этом автоматически выполняется однородное условие равновесия во входном сечении. На мезоуровне закон случайного распределения КСК зерен принимается равномерным, а сдвиги по всем системам скольжения — равными нулю. Если заготовка подвергается предварительной пластической деформации, то для каждой макроточки требуется задание остаточных макронапряжений, а для всех ее мезоточек — определение начальной ориентации КСК и сдвигов по системам скольжения.

Из решения задачи определяются макроскопические поля скоростей перемещений \mathbf{v} , напряжений Σ и деформаций \mathbf{E} , удовлетворяющие следующим соотношениям:
— уравнениям равновесия в скоростях [12]

$$\nabla \cdot \dot{\Sigma} - \nabla \mathbf{v} : \Sigma = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega; \quad (2)$$

— определяющим соотношениям

$$\dot{\Sigma} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p), \quad \forall \mathbf{r} \in \bar{\Omega}; \quad (3)$$

— кинематическим уравнениям

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T), \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}. \quad (4)$$

Напряжения и перемещения, входящие в формулы (2)–(4), находятся интегрированием по трубке тока L :

$$\Sigma_r^L = \Sigma_0^L + \int_L \dot{\Sigma}_r^L dl, \quad \mathbf{u}_r^L = \mathbf{u}_0^L + \int_L \mathbf{v}_r^L dl. \quad (5)$$

По полю перемещений возможно вычисление любой меры деформации.

Граничные условия зависят от рассматриваемого процесса обработки. На боковой поверхности S_B , не вступающей в контакт с инструментом, задаются условия свободной поверхности [12]:

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\Sigma} - (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \Sigma = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in S^{своб}.$$

При контакте с инструментом в точках касания задаются условия контакта:

$$\begin{aligned}
 v^n &= 0, & \dot{\Sigma}^\tau &= f \dot{\Sigma}^n, & \text{при } f \Sigma^n &\leq \tau^T, \\
 v^n &= 0, & \dot{\Sigma}^\tau &= \dot{\tau}^T, & \text{при } f \Sigma^n &> \tau^T, \\
 v^n &= v^\tau = 0, & & & \text{при } \Sigma^\tau &\leq f \Sigma^n, & \mathbf{r} \in S_B^{\text{кон}}.
 \end{aligned}$$

Здесь: v^n , v^τ и Σ^n , Σ^τ — соответственно нормальная и тангенциальная к поверхности контакта составляющие скорости точки и тензора макронапряжений; τ^T — эффективный предел текучести материала на сдвиг, определяемый из модели мезоуровня; f — коэффициент трения при контакте с инструментом. Область контакта $S_B^{\text{кон}}$ заранее неизвестна и уточняется в процессе решения задачи.

Особенности задания граничных условий во входном и выходном сечениях подробно описаны в [12]. Результатам решения стационарной задачи волочения будет посвящена вторая часть статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-08-00352-а и № 07-08-96024-р-Урал-а).

Литература

1. Панин В.Е. Физические основы мезомеханики среды со структурой // Изв. вузов. Физика. – 1992. – Т. 35, № 4. – С. 5-18.
2. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В.Е.Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298с.; – Т. 2. – 320с.
3. Трусов П.В., Ашихмин В.Н. О структуре конститутивных моделей и описании текстуробразования // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: Сб. статей к 75-летию со дня рождения В.Г.Зубчанинова. – Тверь: ТГТУ, 2007. – С. 378-351.
4. Ашихмин В.Н., Трусов П.В. Прямое моделирование упругопластического поведения поликристаллов на мезоуровне // Физическая мезомеханика. – 2002. – Т. 5, № 3. – С.37-51.
5. Staroselsky A., Anand L. Inelastic Deformation of Polycrystalline Face Centered Cubic Materials by Slip and Twinning // J. Mech. Phys. Solids. – 1998. –V. 46, N. 4. – P. 671-696.
6. Diard O., Leclercq S., Rousselier G., Cailletaud G. Evaluation of Finite Element Based Analysis of 3D Multicrystalline Aggregates Plasticity. Application to Crystal Plasticity Model Identification and the Study of Stress and Strain Fields near Grain Boundaries // Int. J. of Plasticity. – 2005. – V. 21. – P. 691-722.
7. Van Houtte P., Li S., Seefeldt M., Delannay L. Deformation Texture Prediction: from the Taylor Model to the Advanced Lamel Model // Int. J. Plasticity. – 2005. – V. 21. – P. 589-624.
8. Taylor, G.I. Plastic Strain in Metals // J. of the Inst. Metals. – 1938. – V. 2. – P. 307-324.
9. Bishop, J., Hill, R., A Theoretical Derivation of the Plastic Properties of a Polycrystalline Center-Faced Metal // Philosophical Magazine. – 1951. – V. 42. – P. 414-427.
10. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400с.
11. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. – М.: Наука, 1982. – 112с.
12. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232с.
13. Deviatov V.V., Dyja H.S., Stolbov V.Y., Trusov P.V., Labuda E.T. Matematyczne modelowanie i optymalizacja procesow wyciskania. – Czestochowa: Politechnika czestochowska prace naukowe, 2004. – 324р.