

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД И УСТОЙЧИВОСТЬ В ЗАДАЧЕ О РАСТЯЖЕНИИ С КРУЧЕНИЕМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕТАЛИ В КОНСТРУКЦИИ ПРИ ЕЁ МЯГКОМ НАГРУЖЕНИИ

В.В.Стружанов, Е.Ю. Просвиряков

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, 620219, Россия

Рассматривается растяжение с кручением детали в виде полого цилиндра в специальной стержневой системе. Материал детали упругопластический, обладающий эффектом деформационного разупрочнения. Предполагается существование потенциала напряжений и справедливость инкрементального закона пластичности. Приведена итерационная процедура расчёта параметров равновесия системы и исследована её сходимости. Установлено, что начало расходимости итераций соответствует моменту потери устойчивости процесса деформирования всей системы.

ITERATION METHOD AND EQUILIBRIUM STABILITY OF AN ELASTIC-PLASTIC COMPONENT IN CONSTRUCTION UNDER SOFT TENSION-TORSION LOADING

V.V. Struzhanov and Ye.Yu. Prosviryakov

Institute of Engineering Science UB RAS, Yekaterinburg, 620219, Russia

The tension-torsion loading of a hollow cylinder construction component made of elastic-plastic material with the strain softening effect is considered in a special rod system. The existence of a stress potential and the correctness of the incremental plasticity law are assumed. An iteration procedure for determination of the equilibrium parameters of the system is written by performing the convergence analysis. It is established that the iteration divergence corresponds to the system deformation stability loss.

1. Введение

Итерационные методы широко применяются для решения различных нелинейных краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. Сходимость этих процессов является достаточным условием определения напряжённо-деформируемого состояния. Если же процедура расходится, то связь этого явления с физическим состоянием тела, как правило, не просматривается.

Наиболее логичной представляется взаимосвязь расходимости с неустойчивостью равновесия тела, являющейся следствием возникновения в нём областей физически неустойчивого материала, не удовлетворяющего постулату Друккера. Неустойчивость материала (разупрочнение) проявляется в появлении на диаграмме деформирования падающего участка.

Ранее, в работах [1, 2], предложена специальная итерационная процедура для решения одномерных задач при учёте деформационного разупрочнения материала и установлена связь начала её расходимости с потерей устойчивости процесса деформирования. Здесь эта итерационная схема распространяется на неодномерную задачу определения параметров равновесия при мягком нагружении конструктивного элемента, предназначенного для реализации сложного деформирования растяжением с

кручением детали из упругопластического разупрочняющегося материала. Изучение устойчивости процесса деформирования этого же конструктивного элемента методами теории катастроф показало, что потеря устойчивости деформационного процесса также совпадает с началом расходимости итерационной процедуры.

2. Конструктивный элемент и схема его нагружения

Рассмотрим конструктивный элемент, состоящий из двух упругих цилиндрических стержней 1 и 2 и детали 3 (Рис.1). Деталь изготовлена из упругопластического материала, обладающего эффектом деформационного разупрочнения [3], и имеет вид полого цилиндра высотой $l=1$ мм. Радиус средней линии поперечного сечения составляет $r=1$ мм, толщина стенки — $h = \frac{1}{2\pi}$ мм, то есть площадь поперечного сечения цилиндра равна $s = 1$ мм². Стержень 1 работает только на растяжение. Кручение в сечении В–В заблокировано, а в сечении А–А задана монотонно возрастающая сила P (кГ). Жёсткость стержня 1 при растяжении обозначим λ_1 (кГ/мм) ($\lambda_1 = \frac{E_1 F_1}{L_1}$, где E_1, F_1, L_1 — соответственно модуль Юнга, площадь поперечного сечения и длина первого стержня). Стержень 2 работает только на кручение. Горизонтальное перемещение сечения С–С заблокировано, а в сечении D–D задан монотонно возрастающий крутящий момент M (кГ·мм). Жёсткость стержня 2 при кручении обозначим λ_2 (кГ·мм) ($\lambda_2 = \frac{G_2 I_2}{L_2}$, где G_2, I_2, L_2 — соответственно модуль сдвига, полярный момент инерции и длина второго стержня).

В результате такого нагружения конструктивного элемента в детали 3 возникают растягивающие напряжение σ (кГ/мм²) и деформация ε , касательные напряжения и сдвиги. На деталь непосредственно действует растягивающая сила ($\sigma \cdot s$), а ее конец, примыкающий к стержню 1, перемещается на (εl). Далее, предполагаем, что вследствие малости толщины стенки поперечного сечения детали касательные напряжения постоянны по толщине [4] и равны касательному напряжению τ на средней линии поперечного сечения. Тогда для крутящего момента, действующего на деталь, получим $2\pi r^2 h \tau$ [4] (τ имеет размерность (кГ/мм²), а $2\pi r^2 h = 1$ мм). Деформации сдвига также считаем постоянными по толщине и равными деформации сдвига γ на средней линии поперечного сечения, а для угла закручивания в сечении С–С справедливо выражение $\frac{\gamma l}{r}$.

Таким образом, сила, растягивающая деталь, равна по величине напряжению σ , удлинение детали — ε , крутящий момент, действующий на деталь, — касательному напряжению τ , а угол закручивания — деформации сдвига γ .

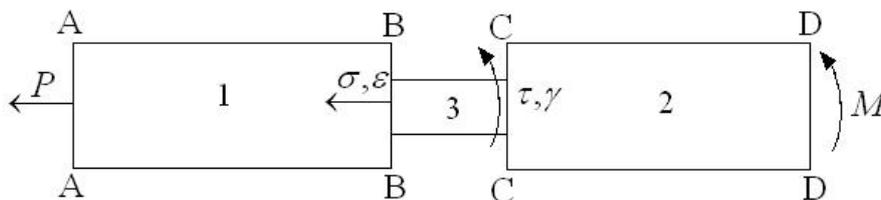


Рис. 1. Конструктивный элемент

3. Свойства упругопластической детали

Опишем отдельно свойства детали при её квазистатическом изотермическом нагружении по жёсткой схеме, задавая монотонно возрастающие значения деформаций ε и γ (активный процесс). Считаем, что свойства материала полностью определяет некоторый скалярный потенциал $\Pi(\varepsilon, \gamma)$ (кГ/мм²), такой, что $\sigma = \Pi_{,\varepsilon}$, $\tau = \Pi_{,\gamma}$, и, следовательно, работа напряжений не зависит от вида пути деформирования [5]. В общем случае потенциал описывает свойства материала как на стадии упрочнения, так и на стадии разупрочнения, когда зависимости $\sigma(\varepsilon, \gamma)$ и $\tau(\varepsilon, \gamma)$ представляют собой «падающие» до нуля поверхности в трёхмерных пространствах $\{\sigma, \varepsilon, \gamma\}, \{\tau, \varepsilon, \gamma\}$ [6]. Здесь и далее запятая, стоящая после знака функции, обозначает частные производные по переменным, обозначенным после запятой.

Инкрементальные определяющие соотношения, связывающие приращения напряжений и деформаций, в векторно-матричной форме имеют вид [6]

$$d\mathbf{p} = H(\Pi)d\mathbf{e}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{p} — вектор напряжений с компонентами (σ, τ) ; \mathbf{e} — вектор деформаций с компонентами (ε, γ) ; $H(\Pi) = \begin{pmatrix} \Pi_{,\varepsilon\varepsilon} & \Pi_{,\varepsilon\gamma} \\ \Pi_{,\gamma\varepsilon} & \Pi_{,\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ — матрица Гессе потенциальной функции Π ; $c_{12} = c_{21}$. В дальнейшем матрицу $H(\Pi)$ будем обозначать символом C^p , отражая тот факт, что это — матрица инкрементальных (мгновенных) модулей материала.

Материал детали упругопластический, то есть пластические деформации не влияют на упругие свойства материала. Следовательно, характеристики разгрузки определяет матрица констант упругости $C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$, включающая модуль Юнга E и модуль сдвига G материала детали, и справедливо разбиение полных деформаций на сумму

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p, \quad (2)$$

где $\mathbf{e}^e, \mathbf{e}^p$ — соответственно векторы упругих и пластических составляющих полной деформации [5]. Отметим, что матрица C совпадает с матрицей Гессе $H(\Pi)$, вычисленной в точке $\varepsilon = \gamma = 0$.

В силу равенства (2) определяющее соотношение связи напряжения и деформации для упругопластического материала можем записать в следующем виде

$$\mathbf{p} = C\mathbf{e}^e = C(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p). \quad (3)$$

Тогда справедливо равенство

$$d\mathbf{p} = C(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p). \quad (4)$$

Приравнявая выражения (1) и (4), находим, что

$$d\mathbf{e}^p = (I - SC^p) d\mathbf{e}, \quad (5)$$

где I — единичная матрица второго порядка, а $S = C^{-1}$. Выражение (5) определяет так называемый инкрементальный закон пластичности [3], так как в его выражение входят инкрементальные модули материала.

Напряжения σ и τ в любой точке (ε, γ) двумерного пространства деформаций равны соответствующим производным от потенциальной функции в той же точке. Следовательно, их величина не зависит от вида пути деформирования, по которому достигается точка (ε, γ) . Вектор \mathbf{e} в выражении (3) также полностью определён значениями координат (ε, γ) . Тогда и величины компонент вектора \mathbf{e}^p не зависят от вида пути деформирования. Их найдем, интегрируя равенство (5) по некоторому пути L в пространстве деформаций, то есть

$$\mathbf{e}^p = \int_L (I - SC^p) d\mathbf{e},$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} \varepsilon^p &= \int_L \left(1 - \frac{c_{11}}{E}\right) d\varepsilon - \frac{c_{12}}{E} d\gamma, \\ \gamma^p &= \int_L \left(-\frac{c_{21}}{G}\right) d\varepsilon + \left(1 - \frac{c_{22}}{G}\right) d\gamma. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что подынтегральные выражения в данных криволинейных интегралах являются полными дифференциалами. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon^p &= \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{c_{11}}{E}\right) d\varepsilon - \int_0^\gamma \frac{c_{12}}{E} d\gamma, \\ \gamma^p &= \int_0^\varepsilon \left(-\frac{c_{21}}{G}\right) d\varepsilon + \int_0^\gamma \left(1 - \frac{c_{22}}{G}\right) d\gamma. \end{aligned}$$

Наконец, приращения пластических деформаций на участке $[\varepsilon_* + \Delta\varepsilon, \gamma_* + \Delta\gamma]$ равны

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon^p &= \int_{\varepsilon_*}^{\varepsilon_* + \Delta\varepsilon} \left(1 - \frac{c_{11}}{E}\right) d\varepsilon - \int_{\gamma_*}^{\gamma_* + \Delta\gamma} \frac{c_{12}}{E} d\gamma, \\ \Delta\gamma^p &= \int_{\varepsilon_*}^{\varepsilon_* + \Delta\varepsilon} \left(-\frac{c_{21}}{G}\right) d\varepsilon + \int_{\gamma_*}^{\gamma_* + \Delta\gamma} \left(1 - \frac{c_{22}}{G}\right) d\gamma. \end{aligned}$$

Интегралы в этих выражениях разлагаем в ряды в окрестности точки $(\varepsilon_*, \gamma_*)$ и, используя только первый (линейный) член, находим

$$\Delta \varepsilon^p = \left(1 - \frac{c_{11}(\varepsilon_*, \gamma_*)}{E}\right) \Delta \varepsilon - \frac{c_{12}(\varepsilon_*, \gamma_*)}{E} \Delta \gamma,$$

$$\Delta \gamma^p = -\frac{c_{21}(\varepsilon_*, \gamma_*)}{G} \Delta \varepsilon + \left(1 - \frac{c_{22}(\varepsilon_*, \gamma_*)}{G}\right) \Delta \gamma,$$

или в векторно-матричном виде

$$\Delta \mathbf{e}^p = \left(I - SC^p(\varepsilon_*, \gamma_*)\right) \Delta \mathbf{e}. \quad (6)$$

4. Потенциальная функция и уравнения равновесия конструктивного элемента

При квазистатическом активном нагружении рассматриваемая механическая система (конструктивный элемент) является градиентной, поэтому её поведение описывается потенциальной функцией, которая имеет вид:

$$W' = \frac{\lambda_1 (u - \varepsilon l)^2}{2} + \frac{\lambda_2 (\psi - (\gamma l / r))^2}{2} + \Pi s l - \int_0^u P du - \int_0^\psi M d\psi,$$

где u (мм) — продольное перемещение точек сечения А–А ($u > 0$); ψ (рад) — угол закручивания сечения D–D ($\psi > 0$). Первые два слагаемые — потенциальные энергии упругих деформаций стержней 1 и 2 соответственно, третье слагаемое — энергия деформаций детали, последние слагаемые — работы растягивающей силы и крутящего момента, взятые со знаком минус. Величины $\lambda_1, \lambda_2, P, M$ играют роль параметров управления системой, а величины $\varepsilon, \gamma, u, \psi$ — ее параметров состояния, которые принимают свои значения в положениях равновесия и отвечают заданным параметрам управления. В силу того, что l, r, s равняются единице, в дальнейшем, для простоты изложения, они исключаются. Тогда потенциальная функция принимает вид

$$W = \frac{\lambda_1 (u - \varepsilon)^2}{2} + \frac{\lambda_2 (\psi - \gamma)^2}{2} + \Pi - \int_0^u P du - \int_0^\psi M d\psi.$$

Положения равновесия конструктивного элемента определяют критические точки функции W [7], которые являются решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned} W_{,\varepsilon} = \sigma(\varepsilon, \gamma) - \lambda_1 (u - \varepsilon) &= 0, & W_{,\gamma} = \tau(\varepsilon, \gamma) - \lambda_2 (\psi - \gamma) &= 0, \\ W_{,u} = \lambda_1 (u - \varepsilon) - P &= 0, & W_{,\psi} = \lambda_2 (\psi - \gamma) - M &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В зависимости от величин параметров управления система (7) может не иметь решений, либо иметь одно или более чем одно решение. Для определения числа решений (числа состояний равновесия потенциальной функции) при изменении управляющих параметров упростим задачу, введя модельную потенциальную функцию V , зависящую только от существенных (влияющих на устойчивость) переменных состояния и управляющих параметров [8]. Представим функцию W в виде:

$$W = V + \frac{\lambda_1(u - \varepsilon)^2}{2} + \frac{\lambda_2(\psi - \gamma)^2}{2} - \int_0^{u-\varepsilon} Pdw - \int_0^{\psi-\gamma} Md\varphi,$$

где $V = \Pi(\varepsilon, \gamma) - \int_0^\varepsilon Pdw - \int_0^\gamma Md\varphi$. Заметим, что V является потенциальной функцией механической системы, в которой отсутствуют стержни 1 и 2, а нагружение детали осуществляется силовым способом. Таким образом, исключаются параметры состояния u и ψ и параметры управления λ_1 и λ_2 . Критические точки функции V определяем из решения уравнений:

$$V_{,\varepsilon} = \sigma(\varepsilon, \gamma) - P = 0, \quad V_{,\gamma} = \tau(\varepsilon, \gamma) - M = 0. \quad (8)$$

Отметим, что уравнения (8) — это два последних уравнения системы (7), в которых выражения $\lambda_1(u - \varepsilon)$ и $\lambda_2(\psi - \gamma)$ заменены на основании двух первых уравнений из (7) напряжениями σ и τ соответственно.

Сравнивая системы уравнений (7) и (8), находим, что они имеют одинаковое число решений, которое зависит только от значений управляющих параметров P и M . Кроме того, в положениях равновесия основной и упрощённой механических систем они определяют одни и те же параметры состояния ε и γ . После решения системы (8) величины u и ψ независимо находятся из первого и второго уравнений системы (7) при заданных значениях λ_1 и λ_2 . Следовательно, параметры $\lambda_1, \lambda_2, u, \psi$ несущественны для расчёта параметров равновесия конструктивного элемента.

5. Основная и корректирующая задачи

Запишем уравнения (8) в векторной форме $\mathbf{p} - \mathbf{t} = 0$, где вектор \mathbf{t} имеет компоненты (P, M) . Используя равенство (3), перепишем это уравнение в виде

$$C(\mathbf{e} - \mathbf{e}^P) - \mathbf{t} = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) представим как сумму решений двух задач, а именно, основной и корректирующей. Основная задача определяется равенством

$$C\boldsymbol{\theta} - \mathbf{t} = 0$$

и является задачей о вычислении параметров равновесия конструктивного элемента, когда свойства детали подчиняются только закону упругости, то есть $\boldsymbol{\theta}$ — вектор упругих деформаций детали, отвечающий заданным параметрам управления P и M . Её решение задаёт выражение

$$\boldsymbol{\theta} = C^{-1}\mathbf{t},$$

где матрица равна

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/E & 0 \\ 0 & 1/G \end{pmatrix}.$$

Корректирующая задача имеет вид $C(\xi - e^p) = 0$ и является задачей об определении параметров равновесия также полностью упругого конструктивного элемента, но со свободной границей ($P = 0, M = 0$) при наличии в детали остаточных пластических деформаций, заданных вектором e^p . Решение корректирующей задачи есть вектор $\xi = e^p$. Очевидно, что решение исходной задачи (9) при заданных векторах t и e^p определяет сумма решений основной и корректирующей задач ($e = \theta + \xi$).

6. Итерационная схема

Пусть теперь конструктивный элемент находится в положении равновесия при $P = P_0, M = M_0$ (вектор управляющих параметров равен t_0). В этом положении в детали имеют место полные и пластические деформации — компоненты векторов e_0 и e_0^p , напряжения — компоненты вектора p_0 , а свойства материала характеризуют инкрементальные модули — компоненты матрицы C_0^p .

Возмутим данное положение равновесия, увеличив вектор управляющих параметров на малую величину t_Δ . Параметры нового положения равновесия для $t = t_0 + t_\Delta$ определяются выражениями:

$$p = p_0 + p_\Delta, \quad e = e_0 + e_\Delta, \quad e^p = e_0^p + e_\Delta^p.$$

Векторы $p_\Delta, e_\Delta, e_\Delta^p$ являются решениями так называемой возмущённой исходной задачи, то есть удовлетворяют уравнению

$$p_\Delta - t_\Delta = 0.$$

Кроме того, они должны быть связаны соотношениями:

$$p_\Delta = C(e - e_\Delta^p), \quad e_\Delta^p = \int_{L_\Delta} (I - SC^p) de, = 0, \quad (10)$$

где L_Δ — путь деформирования от вектора e_0 до вектора $e_0 + e_\Delta$.

В выражениях (10) базовыми неизвестными являются векторы e_Δ и e_Δ^p . Для их определения воспользуемся следующей итерационной процедурой. Сначала для t_Δ находим решение основной задачи $\theta_\Delta = C^{-1}t_\Delta$. Так как здесь не выделена пластическая составляющая деформаций, то вектор θ_Δ не может удовлетворять соотношениям (10). Поэтому его можно рассматривать только как первое приближение к искомому решению.

По формуле (6) находим приращение пластических деформаций $e_{\Delta 1}^p = (I - SC_0^p)\theta_\Delta$ и решение корректирующей задачи $\xi_{\Delta 1} = e_{\Delta 1}^p$. Тогда второе приближение равно $e_{\Delta 1} = \theta_\Delta + \xi_{\Delta 1}$. В силу того, что полные деформации изменились (увеличились), увеличиваются и пластические деформации. Вычисление вновь возникших приращений пластических деформаций начинаем с определения значений инкрементальных модулей, которые соответствуют полным деформациям, заданным компонентами вектора $e_0 + \theta_\Delta$,

то есть матрицей $C_1^p = C^p(\mathbf{e}_0 + \boldsymbol{\theta}_\Delta)$. После этого находим $\mathbf{e}_{\Delta 2}^p = (I - SC_1^p)\boldsymbol{\xi}_{\Delta 1}$, решаем корректирующую задачу $\boldsymbol{\xi}_{\Delta 2} = \mathbf{e}_{\Delta 2}^p$ и получаем третье приближение — $\mathbf{e}_{\Delta 2} = \mathbf{e}_{\Delta 1} + \boldsymbol{\xi}_{\Delta 2}$. Затем снова для полных деформаций $\mathbf{e}_0 + \boldsymbol{\theta}_\Delta + \boldsymbol{\xi}_{\Delta 1}$ вычисляем матрицу C_2^p и продолжаем процесс корректировки далее.

Вопрос сходимости рассмотрим в следующем разделе.

Данный итерационный процесс представим в виде матричного ряда

$$\mathbf{e}_{\Delta n} = \sum_{k=1}^n B^{n-1} \boldsymbol{\theta}_\Delta. \quad (11)$$

Здесь $B^0 = I$, $B^k = \prod_{i=1}^k A_{k-i}$, ($k = \overline{1, \infty}$), где $A_j = (I - SC_j^p)$, ($j = \overline{0, \infty}$) — матрицы, получающиеся из матрицы

$$A = (I - SC^p) = \begin{pmatrix} \frac{E - c_{11}}{E} & -\frac{c_{12}}{E} \\ -\frac{c_{21}}{G} & \frac{G - c_{22}}{G} \end{pmatrix}$$

после вычисления инкрементальных модулей c_{11} , c_{22} , c_{12} для соответствующих значений деформаций.

Если процесс сходится, то в результате получаем параметры равновесия системы для $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_\Delta$. Затем производим следующее догружение. И так поступаем до тех пор, пока процесс не начнет расходиться.

7. Сходимость метода

Исследование сходимости ряда (11) требует оценки спектрального радиуса $\rho(A)$ матрицы A , который определяется её собственными значениями. Запишем характеристическое уравнение матрицы A :

$$k^2 - ak + b = 0, \quad (12)$$

где $a = SpA = \frac{E - c_{11}}{E} + \frac{G - c_{22}}{G}$ — след матрицы; $b = \det A = \frac{(E - c_{11})(G - c_{22}) - c_{12}^2}{EG}$ —

определитель матрицы. Отметим, что матрица A не имеет комплексных собственных чисел. Действительно, вычисляя дискриминант квадратного уравнения (12), находим, что он всегда больше или равен нулю. Причём равенство нулю дискриминанта возможно только тогда, когда $c_{11} = E$, $c_{22} = G$, $c_{12} = c_{21} = 0$ (состояние упругости материала детали).

В этом случае собственные числа матрицы A равны нулю.

Найдём теперь ограничения, накладываемые на коэффициенты уравнения (12), такие, чтобы все собственные значения матрицы A по модулю были меньше единицы. В этом случае спектр $\rho(A) < 1$. Сделаем в уравнении (12) замену переменной: $k = \frac{1+t}{1-t}$;

после чего получим

$$(a+b+1)t^2 + (2-2b)t + 1 - a + b = 0. \quad (13)$$

Если корни уравнения (12) расположены в интервале $(-1, 1)$, то корни уравнения (13) находятся в интервале $(-\infty, 0)$. Согласно теореме Стодолы [9], корни уравнения (13) лежат на числовой оси слева от нуля тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{cases} a+b+1 > 0, \\ 1-b > 0, \\ 1-a+b > 0. \end{cases} \quad (14)$$

На рисунке 2 на плоскости Oab показана область (внутренность треугольника $D_1D_2D_3$), где выполняются неравенства (14). Добавим к системе (14) неравенство, гарантирующее вещественность корней уравнения (12), а именно, $a^2 - 4b \geq 0$. С учётом данного неравенства значения a и b должны быть расположены внутри области $D_1OD_2D_3D_1$ (Рис.2). Следовательно, при выполнении первого и третьего условий из системы (14) и неравенства, определяющего положительность дискриминанта уравнения (12), неравенство $1-b > 0$ всегда справедливо. Наконец, если поверхности, заданные функциями $\sigma = \sigma(\varepsilon, \gamma)$ и $\tau = \tau(\varepsilon, \gamma)$, выпуклы вверх [6], что следует из естественных физических соображений, то справедливы соотношения $c_{11} < E$, $c_{22} < G$. Отсюда разность $Q_1 - Q_2 = (a+b+1) - (1-a+b) = 2a > 0$, то есть $Q_1 > Q_2$ и из неравенства $Q_2 > 0$ вытекает, что $Q_1 > 0$. Таким образом, в данной задаче при выполнении третьего условия из (14) следует выполнение двух других условий, и неравенство $1-a+b > 0$ является определяющим.

Далее $Q_2 = 1 - a + b = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{EG} = \frac{\det H(V)}{EG}$, где $H(V) = \begin{pmatrix} V_{,\varepsilon\varepsilon} & V_{,\varepsilon\gamma} \\ V_{,\gamma\varepsilon} & V_{,\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ —

матрица Гессе потенциальной функции V , причём $H(V) = H(\Pi) = C^p$. Теперь, если $\det H(V) > 0$ (собственные значения матрицы Гессе имеют одинаковый знак), то $\rho(A) < 1$. Отметим, что оба собственные значения матрицы $H(V)$ в пределах упругости положительны и сохраняют свой знак до тех пор, пока одно из них не станет равным

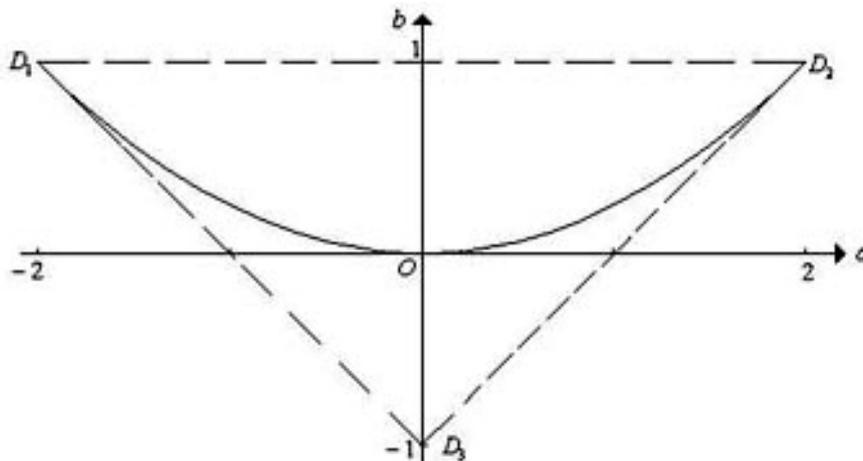


Рис. 2. Область значений коэффициентов a и b где $\rho(A) < 1$

нулю, когда $\det H(V) = 0$. В этом случае $Q_2 = 0$ и $\rho(A) = 1$. Если $\det H(V) < 0$ (собственные значения разных знаков), то условия (14) нарушаются и $\rho(A) > 1$.

Известно [10], что матрица Гессе представляет сжимающий оператор, если её спектр меньше единицы. Поэтому в ряде (11) каждый последующий член получается сжатием предыдущего до тех пор, пока $\rho(A_j) < 1$. Если же существует такой номер N , что при $j > N$ выполняется неравенство $\rho(A_j) > 1$, то сжатие сменяется растяжением и ряд начинает расходиться. Отсюда условием начала расходимости ряда (11) является выполнение равенства $\det H(V) = 0$, при котором $\rho(A) = 1$.

8. Устойчивость деформирования системы

Теперь исследуем устойчивость процесса деформирования конструктивного элемента. Рассмотрим пространство $R_H^3 = \{X, Y, Z\}$, где $X = c_{11}^*$, $Y = c_{22}^*$, $Z = c_{12}^*$, $c_{11}^*, c_{22}^*, c_{12}^* \in (-\infty, +\infty)$. Тогда множество $F = \{c_{11}, c_{22}, c_{12}\}$, которое определяется компонентами матрицы Гессе потенциальной функции V в положениях равновесия системы, является параметрическим представлением двумерного многообразия в R_H^3 . Множество точек из F , в которых матрица Гессе особенна ($\det H(V) = 0$), имеет две компоненты. Это — L_1 (в ней лишь одно собственное значение равно нулю) и L_2 (в ней обращаются в нуль оба собственных значения). Размерность этих подмножеств рассчитывается по формуле [11]

$$\dim L_i = \frac{n(n+1) + l(l+1)}{2} \quad (i = 1, 2),$$

где n — размерность матрицы Гессе, l — число нулевых собственных значений. Отсюда следует, что $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 0$. Подмножество L_1 является поверхностью второго порядка в R_H^3 , называемой дискриминантным конусом матрицы Гессе [8], а подмножество L_2 состоит из одной точки, а именно, вершины конуса, расположенной в начале координат.

Дискриминантный конус матрицы $H(V)$ (Рис. 3) делит пространство R_H^3 на две области (внутренность и внешность конуса). Внутри конуса матрица Гессе положительно определена (оба собственных значения положительны), вне конуса её собственные значения имеют разные знаки или оба отрицательны. Если образ отображения F (точка в пространстве R_H^3) расположен внутри конуса, то положение равновесия устойчиво, если вне конуса, то неустойчиво. Следовательно, переход от устойчивости к неустойчивости определяется равенством $\det H(V) = 0$ [8]. Процесс деформирования системы можно изобразить движением в пространстве R_H^3 точки с координатами $X = c_{11}$, $Y = c_{22}$, $Z = c_{12}$ по некоторому пути (Рис. 3). Этот путь начинается в точке K с координатами (E, G) , расположенной внутри конуса. Сначала путь в R_H^3 находится внутри дискриминантного конуса при постепенном возрастании параметров P и M и система деформируется устойчиво. Затем путь пересекает дискриминантный конус, деформирование становится неустойчивым и система мгновенно (скачкообразно) переходит в начало координат, где инкрементальные модули материала детали равны $c_{11} = c_{22} = c_{12} = 0$. Следовательно, происходит катастрофическое разрушение детали.

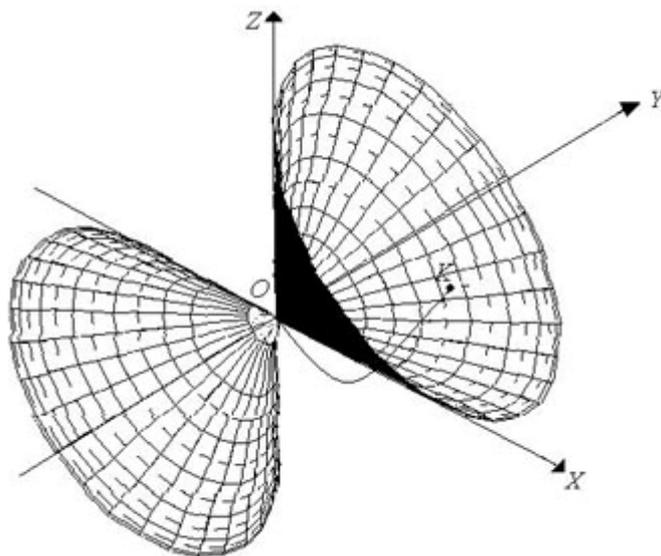


Рис. 3. Дискриминантный конус матрицы Гессе

Таким образом, потеря устойчивости деформирования конструктивного элемента происходит тогда, когда $\det H(V) = 0$. Сравнивая это условие с условием начала расходимости итерационного процесса, заключаем, что момент начала расходимости итераций соответствует моменту потери устойчивости процесса деформирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-08-00125).

Литература

1. Стружанов В.В., Жижерин С.В. Модель повреждающегося материала и итерационные методы расчёта напряжённого состояния при кручении // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5, № 2. – С. 92-104.
2. Жижерин С.В., Стружанов В.В. Итерационные методы и устойчивость в задаче о равномерном деформировании шара с центральной зоной из повреждающегося материала // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – № 2. – С. 114-125.
3. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. – 192с.
4. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 549с.
5. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271с.
6. Стружанов В.В., Просвиряков Е.Ю. Растяжение с кручением. Сообщение 1. Свойства материала // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2008. – № 1 (16). – С. 36-44.
7. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. – М.: Мир, 1980. – 608с.
8. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: В 2-х кн. Кн.1. – М.: Мир, 1984. – 350с.
9. Постников М.М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. – 176с.
10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655с.
11. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: В 2-х кн. Кн.2. – М.: Мир, 1984. – 285с.