

## О РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ЗАХВАЧЕННЫХ ВОЛН С УСЛОВИЯМИ ПРИЛИПАНИЯ НА СТЕНКЕ

С.В. Смирнов

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, 690041, Россия*

Рассмотрены решения для внутренних захваченных волн в бассейне с плоским дном и одной прямой вертикальной стенкой. Анализ проводится в рамках линеаризованной системы уравнений крупномасштабной динамики океана, используется приближение гидростатики с условиями прилипания на стенке и свободного скольжения на дне. Решения представлены при некоторых характерных значениях модельных параметров. Отмечено, что в области длин волн, меньших радиуса деформации Россби, масштаб затухания волны Кельвина убывает с уменьшением длины волны. Обнаружено, что в некотором диапазоне относительно коротких волн существуют два решения типа захваченных волн, движущихся в противоположных направлениях.

## ON INTERNAL TRAPPED WAVE SOLUTIONS WITH NO-SLIP WALL CONDITIONS

S.V. Smirnov

*Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, 690041, Russia*

Internal trapped wave solutions of a linearized set of hydrostatic ocean dynamics equations are considered in a semi-infinite,  $f$ -plane model basin of constant depth bordering a straight vertical coast. No-slip wall and free-slip bottom boundary conditions are assumed. Trapped wave solutions are presented for some reference values of the model parameters. When the wave length is shorter than Rossby deformation radius, the main features of the wave solutions are as follows: the Kelvin wave exponential offshore decay length decreases considerably with the wave length, an additional wave solution propagating in the opposite direction appears.

### 1. Введение

Для решения задач динамики Мирового океана применяются нелинейные математические модели [1], описывающие широкий спектр движений — баротропные и бароклинные волны Россби, инерционно-гравитационные волны, экваториальные и береговые волны Кельвина и другие. В большинстве случаев решение таких задач может быть найдено только с применением современных численных методов и мощных компьютеров. Исследование теоретическими методами возможно лишь в рамках подсистем, описывающих тот или иной физический процесс в бассейне с упрощенной геометрией. Теория позволяет оценить характерные пространственно-временные масштабы процессов, из чего следуют, например, условия, налагаемые на шаги сетки, и методы дискретизации задачи.

Важную роль в динамике областей океана, примыкающих к материковому склону, играют волны Кельвина [2], которые принадлежат к типу волн, захваченных вращением Земли у вертикальной стенки. Отметим, что при построении моделей динамики океана узкий шельф и резкий материковый склон часто заменяют вертикальной стенкой. В работе [3] исследовано влияние вертикальной вязкости на внутренние волны Кельвина. В

работе [4] представлены результаты исследования совместного влияния вертикальной и горизонтальной вязкостей на волны Кельвина, длина которых превышает радиус деформации Россби.

Основной целью данной работы является получение и исследование решений для захваченных волн, длина которых не превышает радиус деформации Россби. Изложен вывод уравнений и представлены решения для захваченных волн в модельном бассейне с плоским дном и одной прямой вертикальной стенкой.

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим несжимаемую вязкую жидкость, находящуюся в бассейне с плоским дном и одной прямой вертикальной стенкой. Будем пользоваться правой декартовой системой координат  $(x, y, z)$  с направленной вверх осью  $z$  и началом координат на невозмущенной поверхности. Пусть состояние покоя характеризуется плотностью  $\rho_0(z)$  и давлением  $p_0(z)$ . Запишем в приближениях Буссинеска и гидростатики систему основных уравнений теории океанских течений [5], линейризованную относительно основного состояния покоя:

$$\partial_t u^* - f v^* = -\rho_*^{-1} \partial_x p^* + \mu (\partial_{xx} u^* + \partial_{yy} u^*) + \partial_z (K \partial_z u^*), \quad (1)$$

$$\partial_t v^* + f u^* = -\rho_*^{-1} \partial_y p^* + \mu (\partial_{xx} v^* + \partial_{yy} v^*) + \partial_z (K \partial_z v^*), \quad (2)$$

$$\partial_z p^* = -g \rho^*, \quad (3)$$

$$\partial_t \rho^* + w^* \partial_z \rho_0 = 0, \quad (4)$$

$$\partial_z w^* + \partial_x u^* + \partial_y v^* = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее:  $t$  — время;  $u^*, v^*, w^*$  — компоненты вектора скорости;  $\zeta$  — отклонение уровня жидкости от невозмущенного положения;  $p^*, \rho^*$  — отклонения давления и плотности от их невозмущенных значений;  $\rho_*$  — характерное значение плотности;  $f$  — параметр Кориолиса, полагаемый постоянным;  $g$  — ускорение свободного падения;  $H$  — глубина бассейна,  $H > 0$  при  $x \leq 0$ ;  $\mu, K$  — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости [5], полагаем  $\mu > 0$ ;  $N$  — частота Брента–Вяйсяля;  $\partial F$  — частная производная функции  $F$  по переменной  $s$ . Следует отметить [1], что приближение гидростатики может быть принято для крупномасштабных движений, в которых горизонтальный масштаб гораздо больше вертикального и становится несправедливым при рассмотрении тех движений, где необходим учет коротких внутренних волн. Запишем граничные условия на поверхности с учетом малости  $\zeta$ :

$$p^* \Big|_{z=0} = \rho_* g \zeta, \quad w^* \Big|_{z=0} = \partial_t \zeta. \quad (6)$$

Зададим условия непротекания и прилипания на стенке

$$u^* \Big|_{x=0} = v^* \Big|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

и условия непротекания и свободного скольжения на дне

$$w^* \Big|_{z=-H} = 0, \quad \partial_z u^* \Big|_{z=-H} = \partial_z v^* \Big|_{z=-H} = 0. \quad (8)$$

Оценка влияния трения о дно на внутренние захваченные волны выполнена в работе [3] на примере двухслойной жидкости. Показано, что в уравнениях движения для нижнего слоя трение о дно дает вклад в результирующий коэффициент трения. Отношение вклада трения о дно к вкладу трения между слоями равно  $rH_1^2/(r'H^2)$ , где  $H_1$  — толщина верхнего слоя,  $r$  и  $r'$  — коэффициенты трения о дно и между слоями соответственно. Далее полагаем, что глубина  $H$  настолько превышает толщину термоклина, что влиянием трения о дно можно пренебречь. Исключая  $\rho^*$  из (3) при помощи (4), имеем

$$\rho_*^{-1} \partial_z p^* = N^2 w^*, \quad (9)$$

где

$$N^2 = -g \rho_*^{-1} \partial_z \rho_0. \quad (10)$$

Известно [5], что структура уравнений (1), (2), (5), (9) позволяет искать решение задачи в виде:

$$u^* = \rho_*^{-1} P(z) u(x, y, t), \quad v^* = \rho_*^{-1} P(z) v(x, y, t); \quad (11)$$

$$w^* = -W(z) \partial_t \Pi(x, y, t); \quad (12)$$

$$p^* = P(z) \Pi(x, y, t). \quad (13)$$

Подставляя (11)–(13) в (5), запишем это уравнение как

$$\frac{\partial_t \Pi}{\partial_x u + \partial_y v} = \frac{P}{\rho_* \partial_z W} = -\varepsilon_n^2, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_n$  — постоянная разделения переменных. Рассмотрим простой случай [3], когда произведение  $KN^2$  является постоянной величиной. Подставив (11)–(13) в (1), (2), (9) с учетом (14) и краевых условий (6), (8), имеем

$$\partial_t u - fv = -\varepsilon_n^2 \partial_x \eta + \mu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u) - du, \quad (15)$$

$$\partial_t v + fu = -\varepsilon_n^2 \partial_y \eta + \mu (\partial_{xx} v + \partial_{yy} v) - dv, \quad (16)$$

$$\partial_t \eta + \partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (17)$$

$$\partial_z \frac{\partial_z P}{N^2} + \frac{P}{\varepsilon_n^2} = 0, \quad (18)$$

$$\partial_z P|_{z=-H} = 0, \quad \left( \frac{g}{N^2} \partial_z P + P \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (19)$$

где

$$d = KN^2 / \varepsilon_n^2, \quad (20)$$

$$\eta = \Pi / \varepsilon_n^2. \quad (21)$$

Совокупность собственных функций  $P_n(z)$  задачи (18), (19) обладает свойством полноты [5]. Введем безразмерные переменные согласно соотношениям:

$$T = f t, \quad X = x/L_n, \quad Y = y/L_n; \quad (22)$$

$$U(X, Y, T) = u(x, y, t) / \varepsilon_n, \quad V(X, Y, T) = v(x, y, t) / \varepsilon_n, \quad h(X, Y, T) = \eta(x, y, t); \quad (23)$$

$$L_n = \frac{\varepsilon_n}{f}. \quad (24)$$

Здесь  $L_n$  — радиус деформации Россби внутренней моды с номером  $n$ . Перепишем в безразмерных переменных уравнения «мелкой воды» (15)–(17) и краевые условия (7)

$$\partial_T U - V = -\partial_X h + E(\partial_{XX} U + \partial_{YY} U) - DU, \quad (25)$$

$$\partial_T V + U = -\partial_Y h + E(\partial_{XX} V + \partial_{YY} V) - DV, \quad (26)$$

$$\partial_T h + \partial_X U + \partial_Y V = 0, \quad (27)$$

$$U|_{X=0} = 0, \quad V|_{X=0} = 0, \quad (28)$$

где

$$E = \frac{\mu}{fL_n^2}, \quad D = \frac{d}{f}. \quad (29)$$

### 3. Захваченные волны

Обозначим через  $c$ ,  $\lambda$  и  $l = 2\pi/\lambda$  безразмерную фазовую скорость, длину волны и волновое число соответственно; расстояние, на которое смещается гребень волны за время, пока амплитуда уменьшается в  $e$  раз, есть

$$\Lambda = \left| \frac{\operatorname{Re}(c)}{\operatorname{Im}(c)l} \right|. \quad (30)$$

Пусть  $\{U_m, V_m, h_m\}$ , где

$$U_m = U_m^A e^{ik_m X + il(Y - cT)}, \quad V_m = V_m^A e^{ik_m X + il(Y - cT)}, \quad (31)$$

$$h_m = h_m^A e^{ik_m X + il(Y - cT)}, \quad (32)$$

$$\operatorname{Im}(c) < 0, \quad \operatorname{Im}(k_m) < 0, \quad (33)$$

являются решениями системы уравнений (25)–(27). Решения типа волн, захваченных вращением у стенки, будем искать в виде:

$$(U, V, h) = (U_1 + U_2, V_1 + V_2, h_1 + h_2), \quad \operatorname{Im}(k_1) > \operatorname{Im}(k_2). \quad (34)$$

Для решений вида (34) краевые условия (28) выполняются при

$$U_1^A + U_2^A = 0, \quad V_1^A + V_2^A = 0. \quad (35)$$

Перепишем уравнения (25)–(27), подставив выражения для  $U$ ,  $V$  и  $h$  из (31) и (32):

$$(\alpha + \varepsilon k_m^2 - ic)IU_m^A - V_m^A + ik_m h_m^A = 0 \quad (m = 1, 2), \quad (36)$$

$$U_m^A + (\alpha + \varepsilon k_m^2 - ic)IV_m^A + ilh_m^A = 0 \quad (m = 1, 2), \quad (37)$$

$$lch_m^A - k_m U_m^A - IV_m^A = 0 \quad (m = 1, 2), \quad (38)$$

где

$$\alpha = D/l + El, \quad \varepsilon = E/l. \quad (39)$$

Исключим  $h_m^A$  из (36)–(38), а из полученных уравнений исключим  $U_2^A$  и  $V_2^A$  при помощи (35); в результате имеем:

$$\left( (\varepsilon k_1^2 + \alpha)c - ic^2 \right) l^2 + ik_1^2 U_1^A + (ik_1 - c)IV_1^A = 0, \quad (40)$$

$$\left( (\varepsilon k_2^2 + \alpha)c - ic^2 \right) l^2 + ik_2^2 U_1^A + (ik_2 - c)IV_1^A = 0, \quad (41)$$

$$(c + ik_1)U_1^A + \left( (\varepsilon k_1^2 + \alpha)c + i(1 - c^2) \right) IV_1^A = 0, \quad (42)$$

$$(c + ik_2)U_1^A + \left( (\varepsilon k_2^2 + \alpha)c + i(1 - c^2) \right) IV_1^A = 0. \quad (43)$$

Для существования нетривиальных решений системы уравнений (40)–(43) необходимо задать три условия. Запишем сначала условия существования нетривиальных решений для четырех систем уравнений, состоящих из [(40), (41)], [(42), (43)], [(40), (43)] и [(41), (42)] соответственно; это дает

$$(1 - il^2 c \varepsilon) k_1 k_2 + (i + l^2 c \varepsilon) c (k_1 + k_2) + (c + i \alpha) c l^2 = 0, \quad (44)$$

$$i \varepsilon c k_1 k_2 + \varepsilon c^2 (k_1 + k_2) - c^2 - i c \alpha + 1 = 0, \quad (45)$$

$$\left( (i + l^2 c \varepsilon) \varepsilon c k_2^2 + (i \alpha + c + il^2 \varepsilon) c - 1 \right) k_1^2 + (\alpha - ic) \varepsilon c^2 l^2 (k_1^2 + k_2^2) + k_1 k_2 + ic (k_2 - k_1) - l^2 c^4 - 2il^2 \alpha c^3 + (l^2 \alpha^2 + 1 + l^2) c^2 + il^2 \alpha c = 0, \quad (46)$$

$$\left( (i + l^2 c \varepsilon) \varepsilon c k_1^2 + (i \alpha + c + il^2 \varepsilon) c - 1 \right) k_2^2 + (\alpha - ic) \varepsilon c^2 l^2 (k_1^2 + k_2^2) + k_1 k_2 + ic (k_1 - k_2) - l^2 c^4 - 2il^2 \alpha c^3 + (l^2 \alpha^2 + 1 + l^2) c^2 + il^2 \alpha c = 0. \quad (47)$$

Первую пару условий преобразуем, умножив (44) на  $c^2 \varepsilon$ , а (45) — на  $(i + l^2 c \varepsilon) c$ , а затем взяв сумму и разность полученных соотношений; во второй паре вычтем (47) из (46). Имеем

$$2 \varepsilon c (1 - ic \varepsilon l^2) k_1 k_2 + 2l^2 c^3 \varepsilon + (i + 2i \varepsilon l^2 \alpha) c^2 - (\alpha + \varepsilon l^2) c - i = 0, \quad (48)$$

$$2(i + cl^2 \varepsilon) \varepsilon c^2 (k_1 + k_2) - ic^2 + (\varepsilon l^2 + \alpha) c + i = 0, \quad (49)$$

$$(cl^2 \varepsilon + i + c \alpha - ic^2) (k_1 + k_2) - 2c = 0. \quad (50)$$

Исключая  $k_1 + k_2$  из (49), (50), получим уравнение для  $c$ :

$$(1 - 4\varepsilon^2 l^2) c^4 + i2(l^2 \varepsilon - 2\varepsilon + \alpha) c^3 - (l^4 \varepsilon^2 + 2 + 2l^2 \varepsilon \alpha + \alpha^2) c^2 - i2(l^2 \varepsilon + \alpha) c + 1 = 0; \quad (51)$$

исключая  $k_1$  или  $k_2$  из (48), (49), получим уравнение для  $k$ :

$$\begin{aligned} & 2(i + cl^2 \varepsilon) \varepsilon c^2 k^2 + (i - ic^2 + (\varepsilon l^2 + \alpha) c) k - \\ & - 2i\varepsilon l^2 c^4 + (2l^2 \varepsilon \alpha + 1) c^3 + i(l^2 \varepsilon + \alpha) c^2 - c = 0, \quad k \in \{k_1, k_2\}, \end{aligned} \quad (52)$$

решения которого имеют вид

$$k_{1,2} = \frac{-i + ic^2 - (l^2 \varepsilon + \alpha) c \pm \sqrt{M_1}}{2M_2}, \quad (53)$$

где

$$M_1 = (c\alpha + i + l^2 c\varepsilon - ic^2)^2 - 8(l^2 c\varepsilon + i) \varepsilon c^3 (ic\alpha - 1 + c^2 + 2l^2 c^2 \varepsilon \alpha - 2il^2 c^3 \varepsilon + il^2 c\varepsilon), \quad (54)$$

$$M_2 = 2(l^2 c\varepsilon + i) \varepsilon c^2, \quad (55)$$

$$M_1 \neq 0, \quad M_2 \neq 0. \quad (56)$$

Уравнения (51) и (52) и есть искомые условия существования нетривиальных решений системы (40).

Можно показать, что решения уравнений (51) и (52) удовлетворяют уравнениям (2.7) и (3.4) работы [4]:

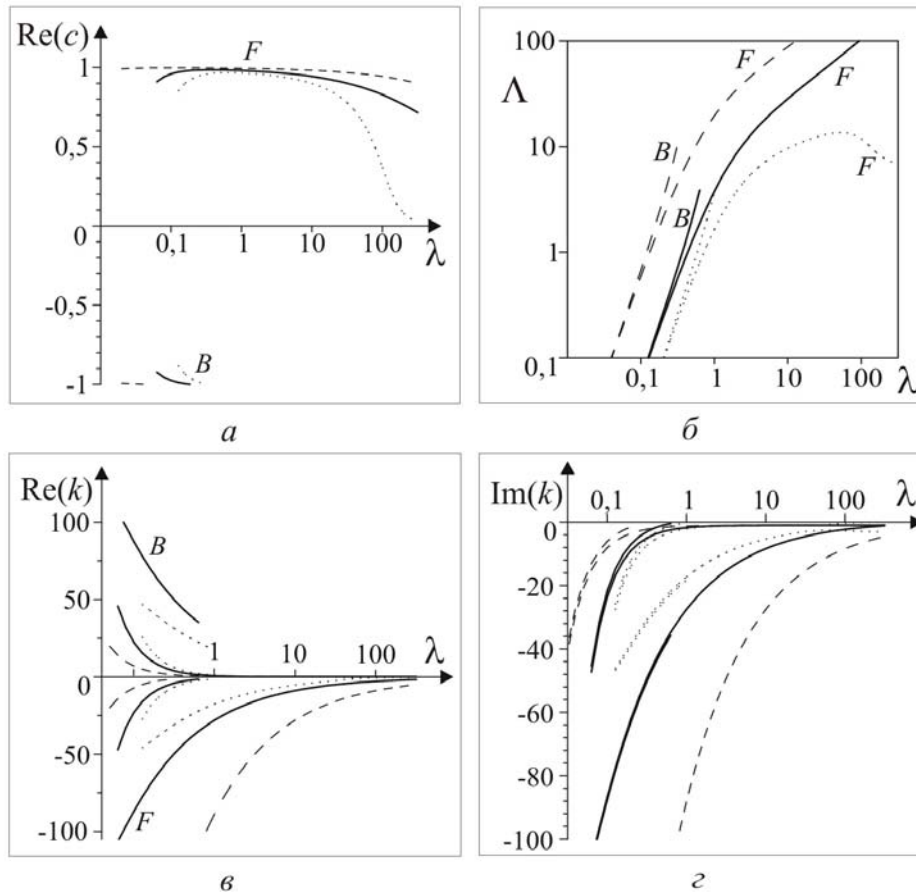
$$\begin{aligned} & \varepsilon k^4 (1 - il^2 c\varepsilon) + k^2 (\alpha - ic + \varepsilon l^2 (1 - 2ic(\alpha - ic))) - \\ & - ic + (\alpha - ic) l^2 (1 - ic(\alpha - ic)) = 0, \quad k \in \{k_1, k_2\}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$1 + ic\varepsilon(k_1 + k_2)^2 (1 - il^2 c\varepsilon) = 0. \quad (58)$$

Подставив в (57) и (58) выражения для  $k_1$  и  $k_2$  из (53) и применив второе условие из (56), получим факторизованные уравнения, в которых один из сомножителей совпадает с левой частью уравнения (51).

Пусть  $H = 1$  км,  $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $K = 0,01 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ . Выберем два значения коэффициента горизонтальной турбулентной вязкости из рассмотренных в работе [6]:  $\mu_1 = 10^3 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  и  $\mu_2 = 10^2 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ . Оценим порядок величин  $\alpha$  и  $\varepsilon$  и относительную роль вертикальной и горизонтальной составляющих турбулентной вязкости в случае внутренней волны с  $\lambda^* = 25$  км при  $L = 50$  км,  $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Из (22) следует, что  $l = 2\pi L/\lambda^*$ , где  $l \approx 12$ . Подставляя приведенные выше числовые значения и  $\mu = 10^3 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  в (20), (29) и (39), имеем  $D \approx 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $E \approx 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon \approx 3 \cdot 10^{-4}$ . Аналогично, при  $\mu = 10^2 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  имеем  $D \approx 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $E \approx 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varepsilon \approx 3 \cdot 10^{-5}$ . Поскольку  $\alpha = D/l + El \approx El$ , при данных условиях влиянием вертикальной турбулентной вязкости можно пренебречь.

Решения уравнений (51) и (52), удовлетворяющие условиям (33), представлены на рисунке 1 для трех наборов параметров  $D$  и  $E$ . Графики функций  $\text{Re}(c)$ ,  $\Lambda$ ,  $\text{Re}(k)$  и  $\text{Im}(k)$ ,

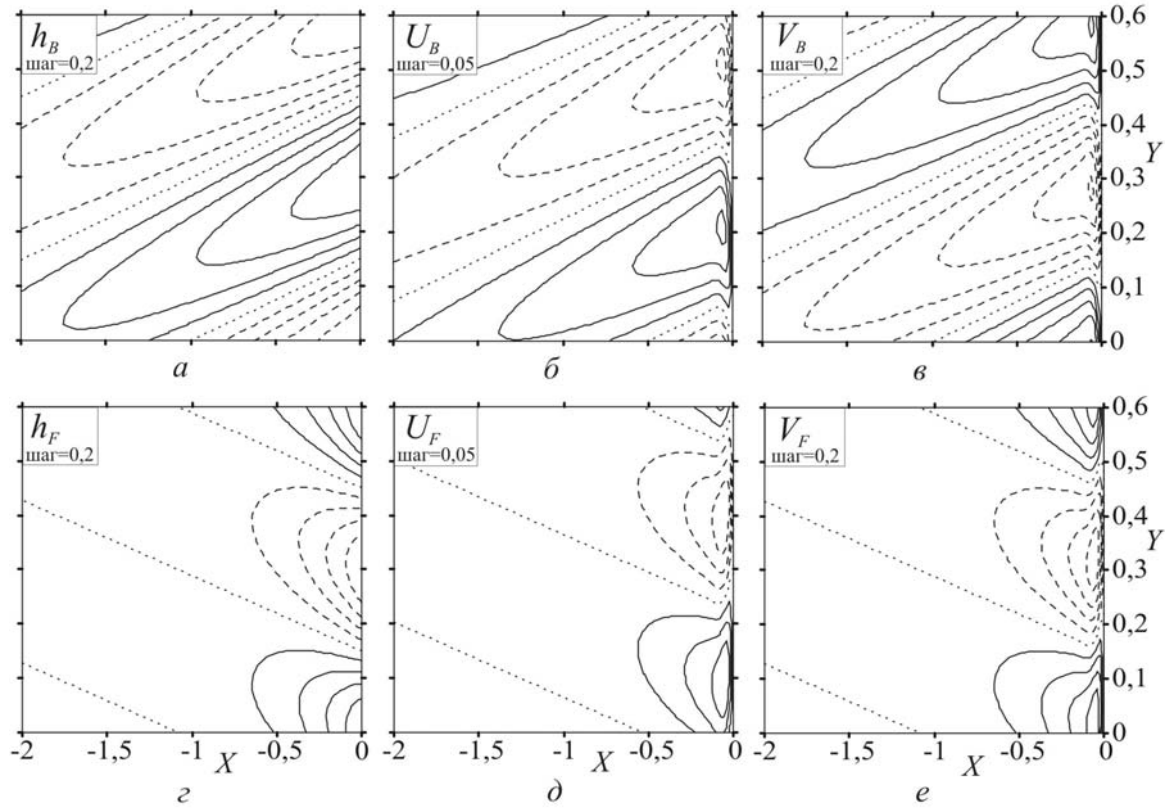


**Рис. 1.** Графики функций, зависящих от  $\lambda$ : *a* —  $\text{Re}(c)$ ; *б* —  $\Lambda$ ; *в* —  $\text{Re}(k)$ ; *г* —  $\text{Im}(k)$   
(сплошные линии —  $D = 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $E = 4 \cdot 10^{-3}$ ; штриховые линии —  $D = 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $E = 4 \cdot 10^{-4}$ ;  
пунктирные линии —  $D = 0,1$ ;  $E = 0,01$ )

зависящих от  $\lambda$ , показаны на рисунках 1, *a–г* соответственно.

Отметим, что на рисунке 1 не показаны решения с  $\Lambda < 0,02$ . Решения для волн с длиной больше радиуса деформации Россби ( $\lambda > 1$ ) получены и проанализированы в работе [4]. Важными особенностями решений в области волн с  $\lambda < 1$  являются существенное уменьшение масштаба убывания захваченных волн с уменьшением длины волны и наличие волн с отрицательной действительной компонентой фазовой скорости  $c$ . Здесь и далее решения с  $\text{Re}(c) > 0$ , соответствующие волне Кельвина, помечены символом  $F$ , решения с  $\text{Re}(c) < 0$  — символом  $B$ .

На рисунке 2 представлены два решения уравнений (25)–(27) с граничными условиями (28), полученные при  $\lambda = 0,6$ ;  $D = 4 \cdot 10^{-4}$ ;  $E = 4 \cdot 10^{-3}$ . Решения нормированы на максимальные значения  $h_{\max} = 1$ ;  $(U_B)_{\max} \approx 0,21$ ;  $(V_B)_{\max} \approx 1,03$ ;  $\Lambda_B \approx -3,4$ ;  $(U_F)_{\max} \approx 0,19$ ;  $(V_F)_{\max} \approx 0,95$ ;  $\Lambda_F \approx 1,7$ . На рисунках 2, *a* и *г* показаны изолинии  $h_B$  и  $h_F$  с шагом 0,2; на рисунках 2, *б* и *д* —  $U_B$  и  $U_F$  с шагом 0,05; на рис. 2, *е* —  $V_B$  и  $V_F$  с шагом 0,2. Изолинии с положительными значениями показаны сплошными линиями, с отрицательными значениями — штриховыми линиями, с нулевым значением — пунктиром. Следует отметить наличие тонких пограничных слоев на рисунках для  $U$  и  $V$  и существенное различие масштабов убывания для решений  $F$  и  $B$ .



**Рис. 2.** Изолинии  $h$ ,  $U$  и  $V$  при  $\lambda = 0,6$ ;  $D = 4 \cdot 10^{-4}$ ;  $E = 4 \cdot 10^{-3}$   
(сплошные линии — положительные значения; штриховые линии — отрицательные значения;  
пунктир — нулевые значения).

#### 4. Асимптотические решения

Полагая, что  $\varepsilon$  является малым параметром, будем искать приближенные решения в виде асимптотических рядов:

$$c = c^{(0)} + \varepsilon^{1/2} c^{(1)} + \varepsilon c^{(2)} + \varepsilon^{3/2} c^{(3)} + \dots, \quad (59)$$

$$k_1 = k_1^{(0)} + \varepsilon^{1/2} k_1^{(1)} + \varepsilon k_1^{(2)} + \varepsilon^{3/2} k_1^{(3)} + \dots, \quad (60)$$

$$k_2 = \varepsilon^{-1/2} k_2^{(0)} + k_2^{(1)} + \varepsilon^{1/2} k_2^{(2)} + \varepsilon k_2^{(3)} + \dots. \quad (61)$$

Подставляя (59)–(61) в уравнения (48)–(50) и приравнявая к нулю коэффициенты при разных степенях  $\varepsilon$ , получим последовательность уравнений для определения  $c^{(0)}$ ,  $k_1^{(0)}$ ,  $k_2^{(0)}$  и так далее. Положив  $\varepsilon = 0$  в (59) или (60), получим уравнение

$$c^{(0)2} - 1 + i\alpha c^{(0)} = 0, \quad (62)$$

решениями которого являются

$$c_F^{(0)} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\alpha^2} - \frac{1}{2}i\alpha, \quad c_B^{(0)} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}\alpha^2} - \frac{1}{2}i\alpha. \quad (63)$$



Необходимо отметить, что рассматривается та ветвь функции квадратного корня, которая отображает плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси на правую полуплоскость. Для  $k_2^{(0)}$  имеем квадратное уравнение

$$k_2^{(0)2} - ic^{(0)} + \alpha = 0 \quad (64)$$

и для него выбираем такие решения уравнения (64), которые удовлетворяют условию (33):

$$k_{2F}^{(0)} = k_2^{(0)} \Big|_{c^{(0)}=c_F^{(0)}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\alpha} - i\frac{1}{2}\sqrt{2+\alpha}, \quad (65)$$

$$k_{2B}^{(0)} = k_2^{(0)} \Big|_{c^{(0)}=c_B^{(0)}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\alpha} - i\frac{1}{2}\sqrt{2+\alpha}. \quad (66)$$

Остальные переменные можно выразить через  $c^{(0)}$  и  $k_2^{(0)}$ . Например,

$$k_1^{(0)} = -ic^{(0)}, \quad c^{(1)} = 2k_2^{(0)} \frac{i + \alpha c^{(0)}}{2ic^{(0)} - \alpha}, \quad k_2^{(1)} = \frac{(\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2)ic^{(0)} + 3\alpha - \alpha^3}{(4 - \alpha^2)(1 - i\alpha c^{(0)})}. \quad (67)$$

Асимптотические решения для волны Кельвина получены в работе [4] и проанализированы при  $\lambda > 1$ . Для  $k_1^{(1)}$  запишем приближенное выражение, полагая  $\alpha \ll 1$ :

$$k_1^{(1)} \approx ik_2^{(0)}c^{(0)}l^2. \quad (68)$$

В предположении  $\alpha \ll 1$  получим оценку для  $\lambda_B$  — максимальной длины волны с  $\text{Re}(c) < 0$ . В соотношении  $k_{1B}^{(a)} = k_{1B}^{(0)} + \varepsilon^{1/2}k_{1B}^{(1)} \approx ic_B^{(0)}(k_{2B}^{(0)}l^2\varepsilon^{1/2} - 1)$  приравняем к нулю мнимые составляющие левой и правой частей, подставим в правую часть выражения для  $c_B^{(0)}$ ,  $k_{2B}^{(0)}$  и  $\varepsilon$  из (63), (66) и (39) соответственно и положим  $\alpha = 0$ . В результате, имеем

$$l_B \approx \frac{2^{1/3}}{E^{1/3}}, \quad \lambda_B = \frac{2\pi}{l_B} \approx \pi E^{1/3} 2^{2/3}. \quad (69)$$

Необходимо отметить важную роль второго слагаемого в приближенном решении  $k_{1F}^{(a)}$  для волны Кельвина, обеспечивающего существенное уменьшение масштаба убывания с уменьшением длины волны. Графики  $|\text{Im } k(\lambda)|$  (Рис. 3) построены в логарифмических координатах при  $D = 4 \cdot 10^{-4}$  и  $E = 4 \cdot 10^{-3}$ . Вертикальные штриховые линии пересекают горизонтальную ось в точках с координатами  $\lambda|_{\Lambda=0,1} \approx 0,12$ ,  $\lambda_B \approx 0,8$  и  $\lambda|_{\varepsilon=0,1} \approx 160$ . Исключены из рассмотрения короткие волны с длиной  $\lambda < \lambda|_{\Lambda=0,1}$ , которые быстро затухают. Решениям  $k_1$  и  $k_2$  уравнений (51) и (52) соответствует пунктир, приближенным решениям  $k_1^{(a)} = k_1^{(0)} + \varepsilon^{1/2}k_1^{(1)}$  и  $k_2^{(a)} = \varepsilon^{-1/2}k_2^{(0)} + k_2^{(1)}$  — сплошные линии. Отметим, что в области относительно коротких волн графики для  $k_1^{(a)}$  и  $k_2^{(a)}$  практически совпадают с графиками для  $k_1$  и  $k_2$ .

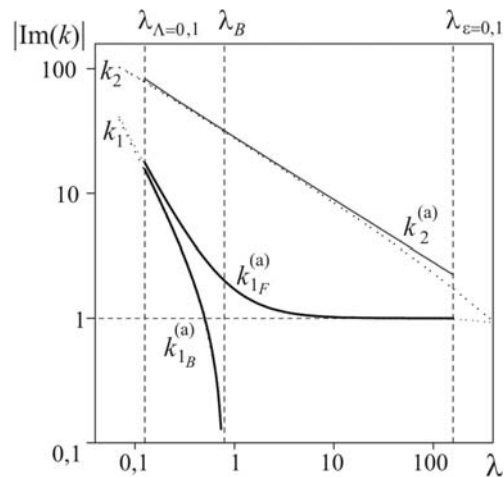


Рис. 3. Функции  $|\text{Im } k(\lambda)|$  для  $k_1$  и  $k_2$  (пунктир),  $k_1^{(a)}$  и  $k_2^{(a)}$  (сплошные линии)

## 5. Заключение

В работе рассмотрены решения для внутренних волн, захваченных вращением Земли у вертикальной стенки в бассейне с плоским дном. Система уравнений для захваченных волн приведена к удобному для решения виду: уравнение четвертой степени (51) для фазовой скорости волны  $c$  и квадратное уравнение (52) для волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$ . Обратные значения мнимых частей  $k_1$  и  $k_2$  характеризуют масштабы экспоненциального убывания для захваченной волны и для пограничного слоя соответственно. В области относительно коротких волн ( $\lambda < 1$ ) решения характеризуются следующими важными свойствами: 1) масштаб убывания волн Кельвина существенно уменьшается с уменьшением длины волны; 2) имеется второе решение в виде волны противоположного направления ( $\text{Re}(c) < 0$ ). Построены асимптотические решения для  $c$ ,  $k_1$  и  $k_2$ , применимые для относительно коротких волн, и получена оценка (69) для  $\lambda_B$  — верхней границы диапазона длин волн второго решения.

Результаты работы полезны для анализа решений в численных моделях динамики океана, построенных в приближении гидростатики. По-видимому, представляет интерес исследование решений для захваченных волн в рамках более полных моделей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-98519) и ДВО РАН (проект № 06-III-A-03-072).

## Литература

1. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. — Л.: Гидрометеиздат, 1987. — 296с.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Пер. с англ. — М.: Мир, 1981. — В 2-х томах. — 845с.
3. Martinsen E.A., Weber J.E. Frictional Influence on Internal Kelvin Waves // *Tellus*. 1981. — V. 33, N. 4. — P. 402-410.
4. Davey M.K., Hsieh W.W., Wajswics R.S. The Free Kelvin Wave with Lateral and Vertical Viscosity // *J. of Phys. Oceanogr.* 1983. — V. 13, N. 12. — P. 2182-2191.
5. Каменкович В.М. Основы динамики океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1973. — 240с.
6. Zalesny V.B. Numerical Simulation and Analysis of the Sensitivity of Large-Scale Ocean Dynamics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. — 1996. — V. 11, N. 5. — P. 421-443.