

## ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ КВАДРАТУР СВЕРТОК ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук

*Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета  
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 603950, Россия*

В статье представлен подход метода граничных элементов (МГЭ) с явным учетом переменной времени по решению трехмерных динамических задач теории упругости для составных тел. Использована гранично-элементная техника построения дискретного аналога в сочетании с методом квадратур сверток. Построена оригинальная схема метода квадратур сверток. Приведены результаты МГЭ-расчетов. Продемонстрирована высокая точность разработанной МГЭ-схемы.

## BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF THE DYNAMIC STATE OF PIECEWISE HOMOGENEOUS ELASTIC BODIES USING CONVOLUTION QUADRATURES

A.V. Amenitskiy, A.A. Belov, L.A. Igumnov and S.Yu. Litvinchuk

*Research Institute of Mechanics, Nizhny Novgorod State Lobachevsky University,  
Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

An approach to the analysis of 3-D dynamic problems of elasticity for piecewise homogeneous bodies using a BEM explicitly accounting for the time variable is presented. The boundary-element scheme of constructing a discrete analogue is used in combination with the convolution quadrature method. A novel scheme of the convolution quadrature method is constructed. The results of the BEM analysis are presented. The developed BEM-scheme is shown to be highly accurate.

### 1. Введение

Подобно статическим или стационарным динамическим задачам, нестационарные задачи трехмерной теории упругости могут решаться методом граничных интегральных уравнений (ГИУ). Гранично-элементные методы поиска решений, соответствующих ГИУ, позволяют строить компьютерные модели динамики составных упругих тел. Детальный обзор работ по упругодинамическим аспектам граничных элементов можно найти в [1–6].

Существующие методики решения задач упругодинамики с использованием МГЭ укладываются, главным образом, в два возможных подхода: прямой подход во временной области или подход с использованием обратного преобразования Лапласа. Все численные формулы обращения зависят от надлежащего выбора их параметров, а все пошаговые процедуры требуют адекватного выбора шага по времени и, как правило, приемов улучшения устойчивости пошаговой формулировки [1, 7].

Представлен подход с использованием МГЭ во времени в рамках метода квадратур сверток. Рассматриваемая гранично-временная формулировка является вариацией подхода, использующего метод квадратур сверток [7–9].

## 2. Волновые потенциалы теории упругости

Имеется замкнутая поверхность  $S$  класса  $C^{1,\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), разделяющая пространство  $\mathbb{R}^3$  на области  $\Omega^+$  (внутреннюю) и  $\Omega^-$  (внешнюю). Смещение точки  $x = (x_1, x_2, x_3)$  упругой среды, занимающей области  $\Omega^+$  или  $\Omega^-$ , в момент времени  $t$  определяется вектор-функцией  $u = u(x, t)$  с компонентами  $u_i = u_i(x, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Кроме того, вводятся обозначения:  $G^\pm = \Omega^\pm \times \mathbb{R}^+$ ;  $\Sigma = S \times \mathbb{R}$ ;  $\Sigma^+ = S \times \mathbb{R}^+$ ;  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ .

Граница  $S$  считается многообразием класса  $C^\infty$ , локально выпрямленным при помощи невырожденных  $C^\infty$ -преобразований координат. Соответствующие интегральные представления для вектора перемещений впервые построены в работах [10], [11] и других при условии, что известна матрица  $U(x, y, t)$  фундаментальных решений, столбцы которой  $U_j = 0$  при  $t > 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и удовлетворяют уравнениям:

$$(\partial_t^2 - L^0(\partial))U_j(x, t) = \delta(x)\delta(t) \cdot e_j,$$

где  $\delta$  — функция Дирака;  $e_j$  — орт  $j$ -ой оси координат;  $L^0$  — статический оператор.

Запаздывающие потенциалы простого и двойного слоев с плотностями  $\alpha(x, t)$ ,  $\beta(x, t)$  определяются соответственно формулами:

$$(V\alpha)(x, t) = \int_{\Sigma^+} (U_j(x - y, t - \tau), \alpha(y, \tau)) e_j ds_y d\tau, \quad (1)$$

$$(W\beta)(x, t) = \int_{\Sigma^+} ((T_{\nu(y)}U_j)(x - y, t - \tau), \beta(y, \tau)) e_j ds_y d\tau, \quad (2)$$

где  $T_\nu$  — оператор сингулярного решения;  $\nu$  — единичная нормаль; «,» — знак вещественного скалярного произведения. Оба потенциала удовлетворяют в  $G^\pm$  исходному уравнению и нулевым начальным условиям. При гладких плотностях справедливы формулы скачков потенциалов при переходе точки  $(x_1, x_2, x_3, t)$  через  $\Sigma^+$  [12]. При обозначении через  $W^\pm\beta$  и  $W^0\beta$  соответственно предельных значений потенциала  $W\beta$  из  $G^\pm$  и его прямого значения на  $\Sigma^+$  получается:

$$W^\pm\beta = \mp \frac{1}{2}\beta + W^0\beta.$$

Вводятся операторы  $N^\pm$  согласно формулам:

$$\pm(N^\pm v, w)_{0,S} = \partial^2(u, z)_{0,\Omega^\pm} + (C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u), \varepsilon_{ij}(z))_{0,\Omega^\pm}, \quad v = \gamma^\pm u, \quad w = \gamma^\pm z.$$

Здесь  $\gamma^\pm$  — оператор следа.

Основой для получения разрешающих уравнений прямого подхода служат равенства

$$VN^\pm - W^\pm = \pm I,$$

где  $I$  — тождественный оператор. Записанные соотношения справедливы для кусочно-гладких поверхностей класса  $C^{0,1}$ , являющихся объединением незамкнутых поверхностей класса  $C^{1,\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ).

В предположении, что поверхность  $S$  разделяется замкнутым контуром  $\Gamma \subset S$  на две связанные компоненты  $S_i$  ( $i=1, 2$ ) ненулевой площади так, что  $\Gamma = \partial S_i$  ( $i=1, 2$ ), в  $G^\pm$  рассматриваются уравнения трехмерной анизотропной нестационарной теории упругости с нулевыми начальными данными. На части граничной поверхности  $\Sigma_1^+ = S_1 \times \mathbb{R}^+$  задаются смещения  $u^\pm = f^\pm$ , на  $\Sigma_2^+ = S_2 \times \mathbb{R}^+$  — граничные усилия  $T_\nu^\pm u = g^\pm$ . Решение задачи с учетом выражений (1), (2) ищется в виде:

$$u(x, t) = (W\beta)(x, t) + (V\alpha)(x, t).$$

Плотности  $\alpha$  и  $\beta$  сосредоточены на  $\Sigma_1^+$  и  $\Sigma_2^+$  соответственно.

### 3. Гранично-элементная дискретизация

Для введения ГЭ-дискретизации рассматривается регуляризованное уравнение без объемных сил и начальных деформаций [1, 13], то есть:

$$\alpha_\Omega u_k(x, t) + \int_{+\partial\Omega} \int_0^t \left\{ T_{ik}(x, y, t - \tau) [u_i(y, \tau) - u_i(x, \tau)] - U_{ik}(x, y, t - \tau) t_i(y, \tau) \right\} dS_x d\tau = 0,$$

$$(x \in \partial\Omega),$$

где  $x \in \partial\Omega$  называется точкой наблюдения или коллокационной точкой. Базовый процесс ГЭ-дискретизации заключается в разбиении поверхности  $\partial\Omega$  на  $N_E$  граничных элементов  $E_e$  ( $1 \leq e \leq N_E$ ) совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы, каждый из которых отображается на некий контрольный элемент  $\Delta_e$  (каждый  $\Delta_e$  — это либо квадрат  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$ , либо треугольник  $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$ ). Элемент  $E_e$  отображается на элемент  $\Delta_e$  с помощью уравнения

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \xi \in \Delta_e,$$

где  $\beta(k, l)$  — глобальный номер узла, имеющего в  $k$ -ом элементе локальный номер  $l$ ,  $N^l(\xi)$  — функции формы. В качестве функций формы выбираются квадратичные полиномы интерполяции.

Естественный базис  $(a_1, a_2)$ , метрический тензор  $g$  и единичная нормаль  $n$  на  $E_e$  записываются как

$$a_\alpha(\xi) = \sum_{q=1}^N N_\alpha^q(\xi) x^q, \quad g_{\alpha\beta}(\xi) = a_\alpha(\xi) \cdot a_\beta(\xi),$$

$$J(\xi)n(\xi) = a_1 \wedge a_2, \quad J^2(\xi) = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(\xi) \quad (\xi \in \Delta_e; \quad \alpha, \beta = 1, 2).$$

Неизвестные граничные поля интегрируются через узловые значения  $u^k = u(y^k)$  и  $t^k = t(y^k)$  в интерполяционных узлах  $y^k$ . Множество интерполяционных узлов отличается от множества геометрических узлов, а множество интерполяционных функций не совпадает с множеством функций формы. Рассматривается случай, называемый согласованным интерполированием, где для аппроксимации граничных перемещений применяются билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил — постоянные элементы. Тогда получаются следующие выражения граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента  $S_k$ :

$$u_i(y) = \sum_{l=1}^4 R^l(\xi) u_i^{\chi(k,l)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad y \in S_k,$$

$$t_i(y) = t_i^{\chi(k,l)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad y \in S_k.$$

Здесь  $R^l(\xi)$  — функции формы для линейного четырехугольного элемента.

Упругая связь  $h$ -ой и  $j$ -ой подконструкций (тел) моделируется соотношением:

$$t_i^h(y) = -t_i^j(y) = -\gamma_i^{hj}(y) (u_i^h(y) - u_i^j(y)) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$y \in S_k, \quad S_k \subset \Gamma_{hj} = \Gamma_h \cap \Gamma_j.$$

В качестве узлов коллокации  $y^m$  выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируются системы линейных алгебраических уравнений для каждой подконструкции (тела):

$$\frac{1 - \alpha_\Omega}{2} u_i^m + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} * u_j^{\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^{N_1} B_{ij}^{m,k} * t_j^k - \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^4 D_{ij}^{m,k,l} * (u_j^{\chi(k,l)} - u_j^{\bar{\chi}(\bar{k},l)}), \quad (3)$$

$$\frac{1 - \alpha_\Omega}{8} u_i^m + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} * u_j^{\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^{N_1} B_{ij}^{m,k} * t_j^k - \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^4 D_{ij}^{m,k,l} * (u_j^{\chi(k,l)} - u_j^{\bar{\chi}(\bar{k},l)}), \quad (4)$$

$$N = N_1 + N_2.$$

Знаком «\*» обозначается операция Вольтерра по времени;  $\bar{\chi}(\bar{k}, l) = \bar{m}$  — глобальный номер узла некоторой (сопряженной) подконструкции, находящейся с рассматриваемой подконструкцией в упругой связи по  $k$ -ому элементу;  $\bar{k}$  — номер элемента сопряженной подконструкции, где задана упругая связь;  $N_1$  — число элементов границы без упругих связей;  $N_2$  — число элементов с упругой связью.

Уравнения (3) записываются в узлах аппроксимации перемещений, уравнения (4) — в узлах аппроксимации усилий:

$$A_{ij}^{m,k,l} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R^l(\xi) T_{ij}(x^m, y^k(\xi), t) - \delta_{\chi(k,l), m} T_{ij}^0(x^m, y^k(\xi)) \delta(t)] J^k(\xi) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$B_{ij}^{m,k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}(x^m, y^k(\xi), t) J_k(\xi) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$D_{ij}^{m,k,l} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R^l(\xi) U_{ij}(x^m, y^k(\xi), t) J_k(\xi) \alpha_j^{\chi\bar{\chi}}(y^k(\xi)) d\xi_1 d\xi_2.$$

Дискретные аналоги уравнений (3), (4) приводят к системе линейных алгебраических уравнений [1, 7, 13, 14] относительно искомым граничных функций. Решение такой системы представляется в следующем виде:

$$y = q * g. \quad (5)$$

Для системы (5) применяется следующий вариант метода квадратур сверток [8, 9]:

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t) \quad (n = 0, 1, \dots, N),$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{q}(\gamma(R e^{il2\pi L^{-1}}) / \Delta t) e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\gamma(z) = \frac{3}{2} - 2z + \frac{1}{2}z^2, \quad z = R e^{i\varphi}, \quad \varphi = l2\pi L^{-1}.$$

где  $\bar{q}$  — изображение по Лапласу функции  $q$ ;  $g = H(t)$ ,  $H(t)$  — функция Хевисайда.

Остальные детали численной схемы приводятся в книге [1]. Традиционная ГЭ-схема совместно с методом квадратур сверток ориентирована на использование в качестве  $g(t)$  граничных функций, однако далеко не для всех начально-краевых задач в этом есть необходимость. Если краевые задачи допускают применение интегрального преобразования по времени, то метод квадратур сверток может использоваться как метод обращения интегрального преобразования.

На основе построенной ГЭ-схемы создается программное обеспечение и организуется численный расчет трехмерной задачи с использованием гранично-элементной стратегии дискретизации.

#### 4. Гранично-элементные расчеты

Использование гранично-элементной дискретизации демонстрируется на решении двух задач.

**Задача 1.** Рассматривается торцевой удар силой  $p = 1$  Па по составному призматическому телу квадратного сечения с жестко закрепленным концом (Рис. 1) и параметрами материала: плотностями  $\rho_1 = 7850$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_2 = 7850$  кг/м<sup>3</sup>; коэффициентами Пуассона  $\nu_1 = 0$  и  $\nu_2 = 0$ ; модулями Юнга  $E_1 = 2,11 \cdot 10^{11}$  Па и  $E_2 = 2,11 \cdot 10^{11}$  Па. В однородной постановке задача имеет аналитическое решение. Полная геометрическая модель представляет собой равномерную сетку, содержащую 576 четырехугольных ГЭ. Параметры схемы квадратур сверток выбираются следующие:  $\Delta t = 1,36 \cdot 10^{-5}$  с;  $N = 1200$ ;  $R = 0,9948$ . Результаты расчетов перемещений и напряжений приводятся на рисунках 2 и 3 соответственно. Исследуется случай, когда подобласти имеют разные параметры материалов: значение модуля Юнга у второй подобласти в два раза меньше, чем у первой подобласти, то есть  $E_1 = 2,11 \cdot 10^{11}$  Па, а  $E_2 = 1,05 \cdot 10^{11}$  Па. На рисунке 4 представлены графики перемещений на свободном торце и в плоскости контакта подобластей, а на рисунке 5 — графики напряжений в плоскости заделки и в плоскости контакта подобластей.

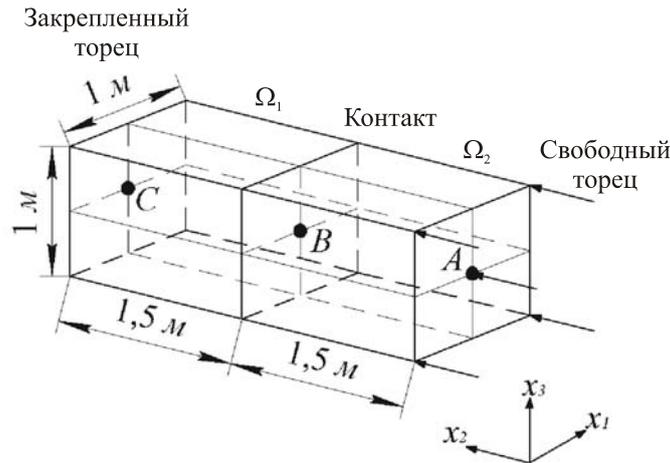


Рис. 1. Составное призматическое тело

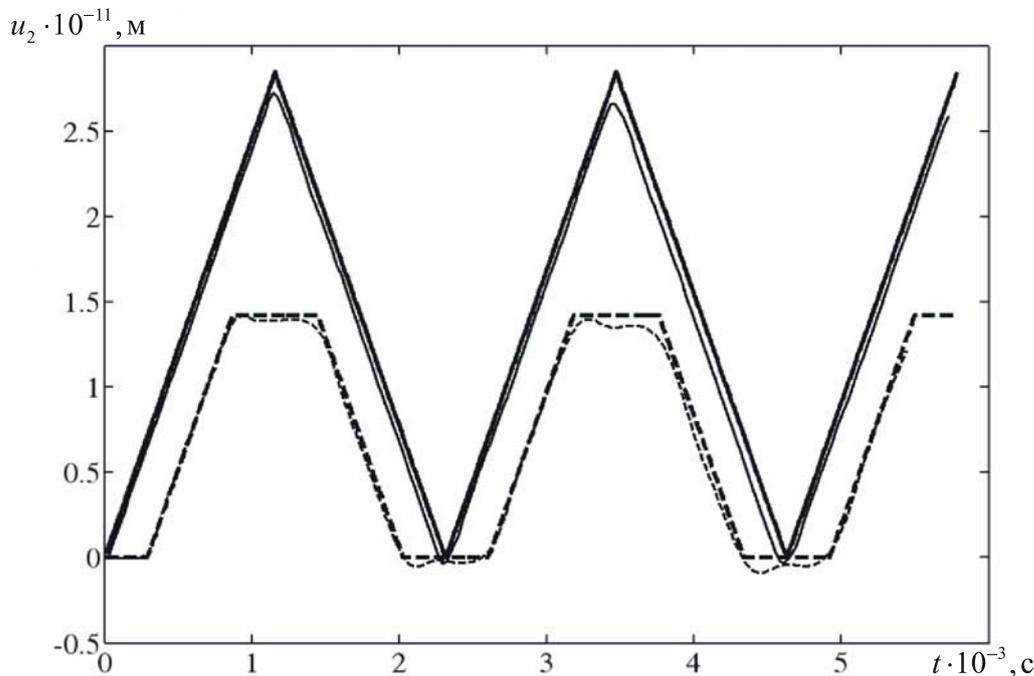
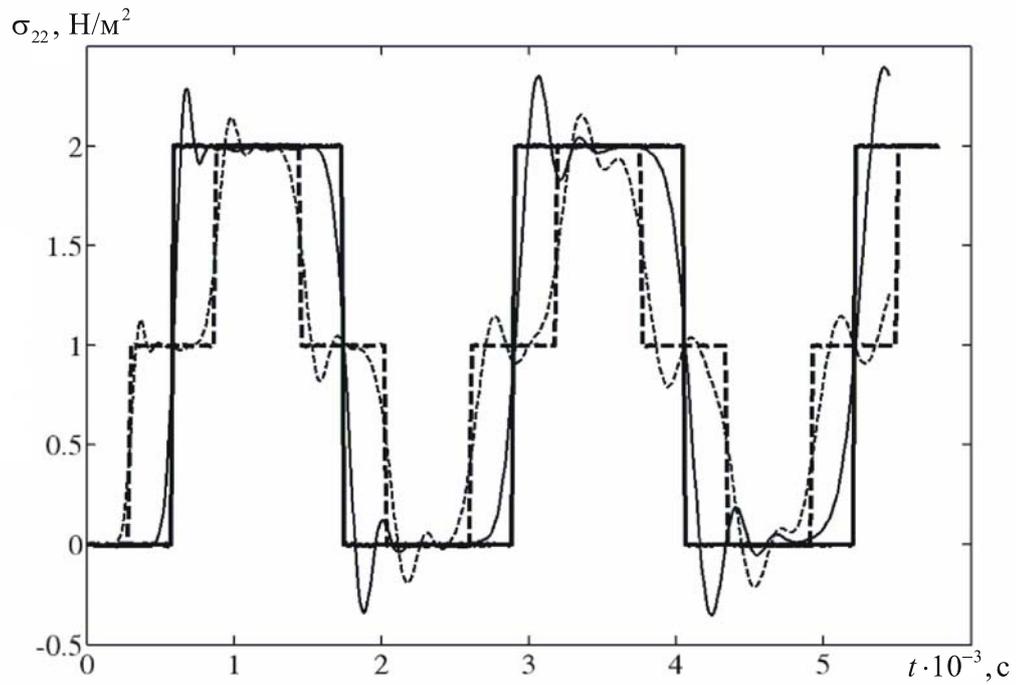


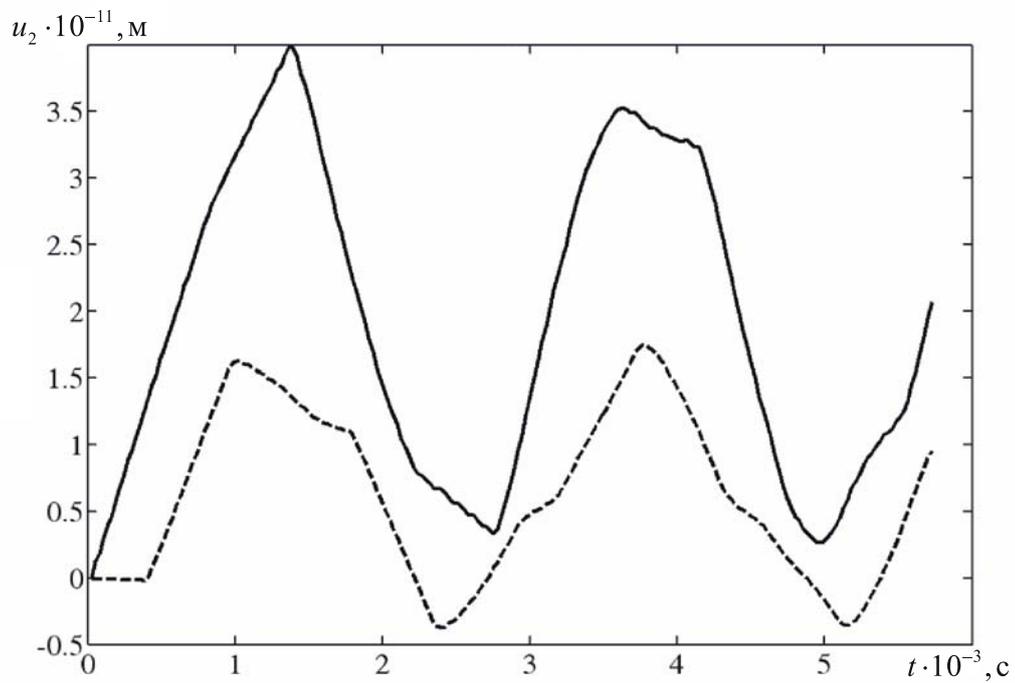
Рис. 2. Перемещения однородного призматического тела на нагруженном торце (— аналитическое решение; — численное решение методом квадратур сверток) и в плоскости контакта (— аналитическое решение; ---- численное решение)

На рисунках 4, 5 наглядно демонстрируется эффект смены знака в откликах граничных и внутренних перемещений и напряжений.

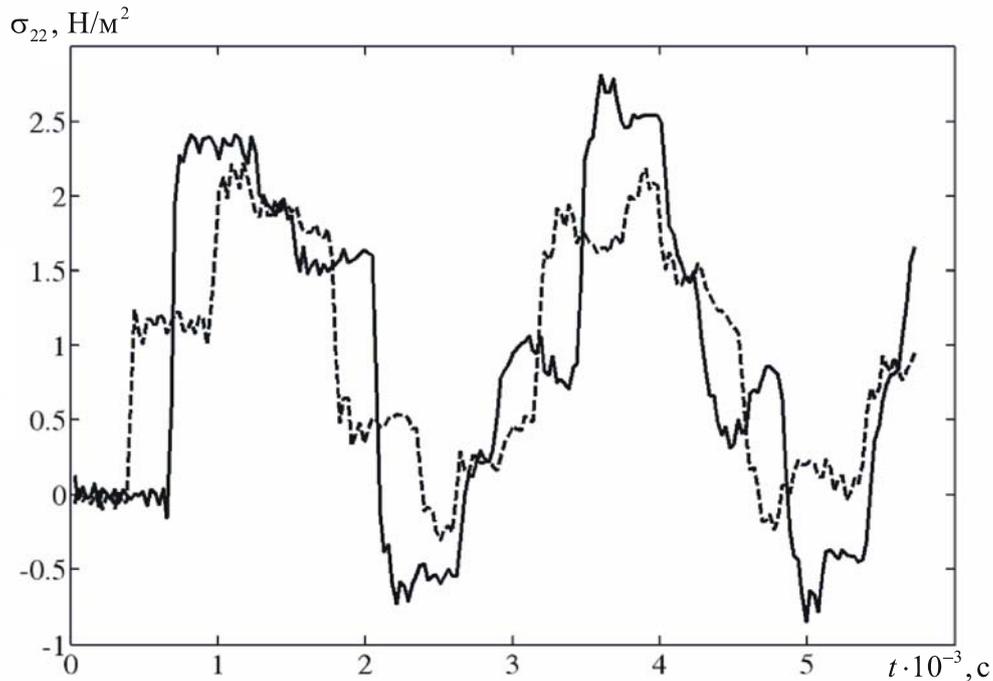
**Задача 2.** Штамп, расположенный на полупространстве, подвергается действию вертикальной силы (Рис. 6). Используются следующие параметры материалов: для штампа  $E = 3 \cdot 10^8$  Па;  $\nu = 0,2$ ;  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>; для полупространства  $E = 1,38 \cdot 10^8$  Па;  $\nu = 0,35$ ;  $\rho = 1966$  кг/м<sup>3</sup>. Нагрузка на штамп  $p(t) = p_0 [H(t) - H(t - 0,0085)]$ , где  $p_0 = 1$  Па. Для исследования сходимости решений расчеты проводятся на трех ГЭ-сетках. В сетке 1 содержится 54 ГЭ на штампе и 90 ГЭ на поверхности полупространства [14]; в сетке 2 — 96 ГЭ на штампе и 864 ГЭ на поверхности полупространства; в сетке 3 — 384 ГЭ на штампе и 3456 ГЭ на поверхности полупространства. При дальнейшем измельчении ГЭ-сетки численное решение не меняется. Результаты, полученные для сеток 1 и 3, приводятся ниже.



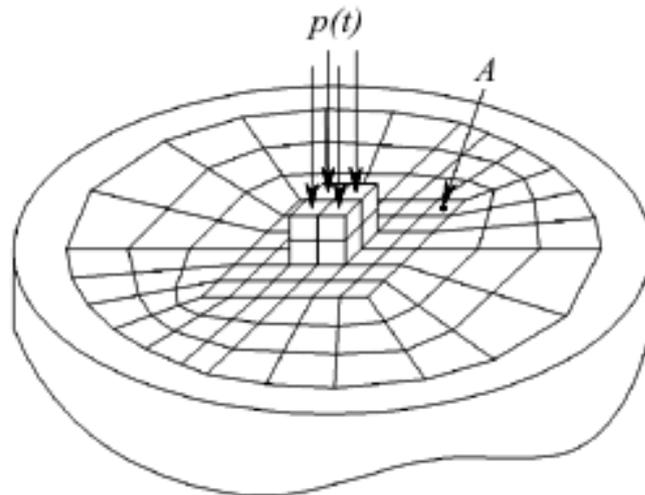
**Рис. 3.** Напряжения однородного призматического тела на закрепленном торце (— аналитическое решение; - - - численное решение) и в плоскости контакта (— аналитическое решение; - - - численное решение)



**Рис. 4.** Перемещения составного призматического тела на свободном торце (—) и в плоскости контакта (— — —)



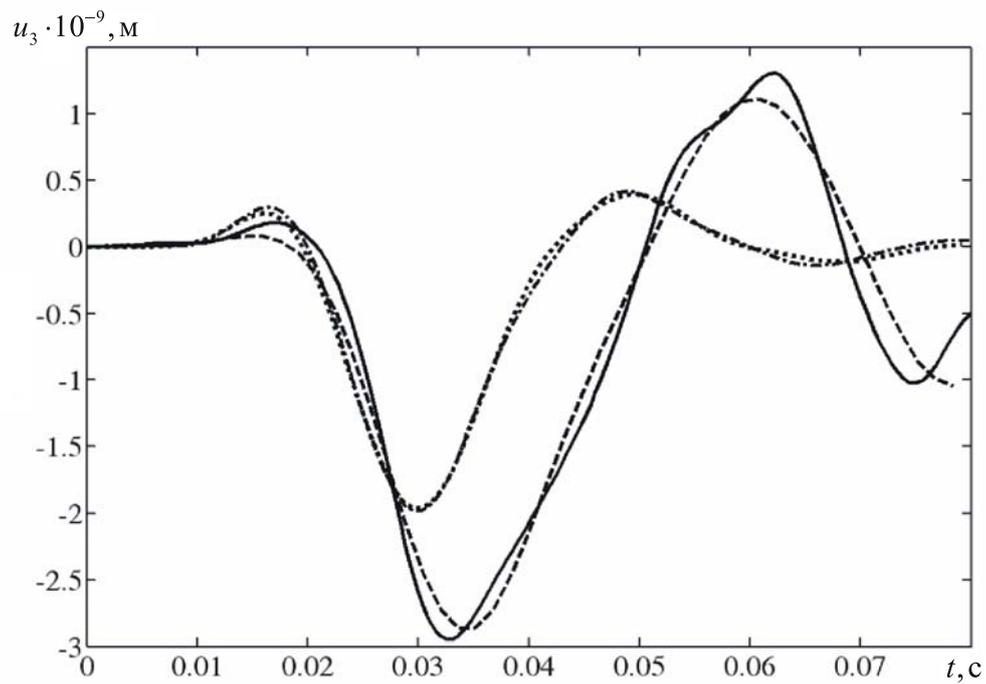
**Рис. 5.** Напряжения составного призматического тела в областях заделки (—) и контакта подобластей (-----)



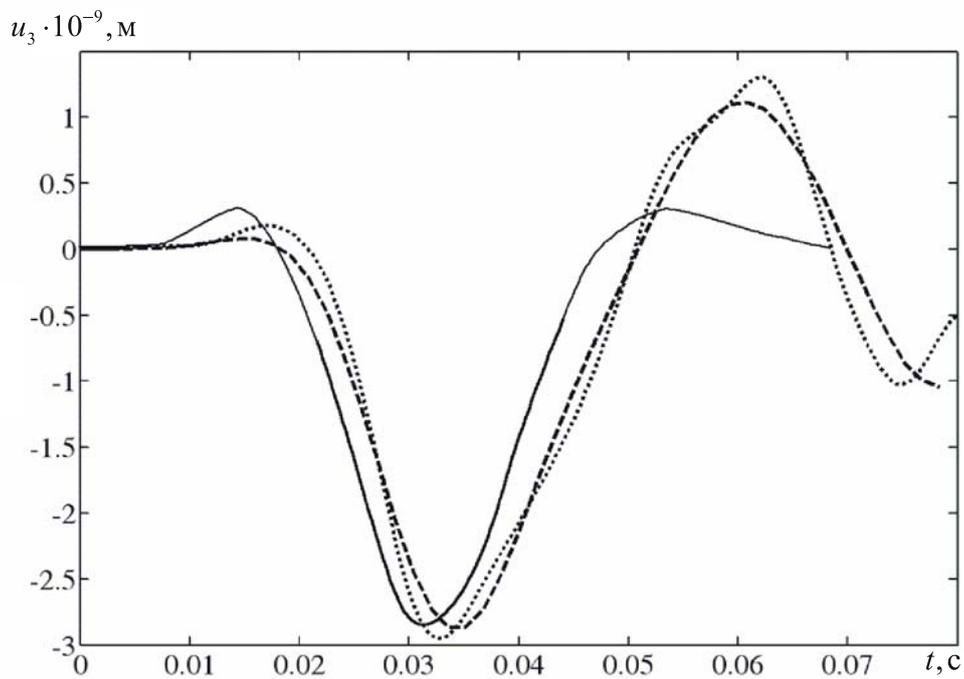
**Рис. 6.** Гранично-элементная модель задачи о штампе на полупространстве

В качестве координат исследуемой точки  $A$  берутся значения  $(2,33; 2,33; 0)$ , за начало координат — центр контактной грани штампа.

Задача решается методом граничных элементов на основе метода квадратур сверток и сравнивается с соответствующим ГЭ-решением, построенным на основе метода Дурбина [1]. Выбираются следующие параметры схемы квадратур сверток:  $\Delta t = 0,0006$  с;  $N = 400$ ;  $R = 0,98$ . На рисунке 7 показан отклик поверхностных перемещений, построенных на разных сетках. Известное в литературе ГЭ-решение построено на сетке 1 [14]. На рисунке 8 решение из работы [14] сравнивается с решениями, построенными по ГЭ-схемам. Проведенное исследование задачи показывает, что известное из [14] ГЭ-решение зависит от ГЭ-сетки и дает завышенную амплитуду отклика поверхностной волны.



**Рис. 7.** Поверхностные перемещения на полупространстве, полученные из решений на основе методов Дурбина (— сетка 1, -·-·-·- сетка 3) и метода квадратур сверток (----- сетка 1, .....сетка 3)



**Рис. 8.** Поверхностные перемещения на полупространстве: — решение из работы [14];  
----- авторские результаты; ..... решение методом Дурбина [1]

## 5. Выводы

В работе приводится шаговая схема метода граничных элементов, построенная на основе метода квадратур сверток, который впервые рассматривается как вариант численного обращения преобразования Лапласа. Сравнение численных результатов с аналитическими решениями демонстрирует высокую вычислительную точность и устойчивость решений, получаемых по представленной гранично-элементной схеме. Сравнение гранично-элементных расчетов, построенных на основе разных методов (Дурбина из [1] и квадратур сверток из настоящей статьи) свидетельствует о перспективности применения представленной схемы для гранично-элементного моделирования динамики составных упругих тел.

## Литература

1. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. – М.: Физматлит, 2008. – 352с.
2. *Banerjee P.K., Ahmad S., Wang H.C.* Advanced Development of BEM for Elastic and Inelastic Dynamic analysis of Solids // Industrial Application of Boundary Element Methods. (Banerjee P.K., Wilson R.B., eds.) / Developments in Boundary Element Methods. – London: Elsevier, 1989. – P. 77-177.
3. *Karabalis D.L., Rizos D.C.* Dynamic Analysis of 3-D Foundations // Boundary Element Techniques in Geomechanics / Manolis G.D., Davies T.G., eds. – London: Elsevier, 1993. – Ch. 6 – P. 177-208.
4. *Antes H., Panagiotopoulos P.D.* The Boundary Integral Approach to Static and Dynamic Contact Problems // Int. Series of Numerical Mathematics 108. – Basel: Birkhauser, 1992. – 313 p.
5. *Beskos D.E.* Boundary Element Methods in Dynamic Analysis // Applied Mechanics Review. – 1987. – V. 40, N. 1. – P. 1-23.
6. *Beskos D.E.* Boundary element methods in dynamic analysis: Part II 1986–1996 // Appl. Mech. Reviews. – 1997. – V. 50. – P. 149–197.
7. *Schanz M.* Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. – Berlin Springer, 2001. – 170p.
8. *Lubich C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. I. // Numerische Mathematik. – 1988. – V. 52. – P. 129-145.
9. *Lubich C.* Convolution quadrature and Discretized Operational Calculus. II // Numerische Mathematik. – 1988. – V. 52. – P. 413-425.
10. *De Hoop A.Y.* Representation Theorems for the Displacement in an Elastic Solid and Their Application to Elastodynamic Diffraction Theory // Delft: Tech. Hogeschool, Dr. Sci. Thesis, 1958. – P. 195.
11. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872с.
12. *Чудинович И.Ю.* Метод граничных уравнений в динамических задачах теории упругости. – Харьков, 1990. – 121с.
13. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: Изд-во КГУ, 1986. – 296с.
14. *Gaul L., Kögl M., Moser F., Schanz M.* Boundary Element Methods for the Dynamic Analysis of Elastic, Viscoelastic, and Piezoelectric Solids // Encyclopedia of Computational Mechanics / Edited by E. Stein, R. de Borst and Thomas J. R. Hughes. V. 2: Solids and Structures. – Jhon Wiley & Sons, Ltd. – 2004. – P. 751-769.