

ДИФФУЗИЯ ВЛАГИ ПРИ ЭКСТРУЗИОННОЙ ПЕРЕРАБОТКЕ УВЛАЖНЕННОГО ЗЕРНА

О.И. Скульский, Е.В. Славнов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, 614013, Россия

Рассматривается движение влагосодержащей среды в одночервячном экструдере. Задача ставится в «обращенном движении» (шнек неподвижен – корпус вращается), и срединное продольное сечение винтового канала разворачивается на плоскость. Нижняя граница сечения канала движется с заданной скоростью под углом к продольной оси. Продольная составляющая потока, определяющая производительность экструдера, является результатом тянущего движения стенки и встречного градиента давления, возникающего за счет сопротивления формующего инструмента. Циркуляционное движение не влияет на производительность, но, благодаря интенсивному перемешиванию, распределение влаги в поперечном сечении канала становится равномерным. Движение влагосодержащей среды рассматривается как плоское и одномерное по скорости и влагосодержанию, но двумерное - по давлению. Получены аналитические выражения для профиля скорости, распределения влаги по длине канала и давления в канале. Выполнен эксперимент на лабораторном экструдере для измерения содержания влаги по длине канала. Установлено, что экспериментальные и теоретические результаты хорошо согласуются.

MOISTURE DIFFUSION IN THE PROCESS OF EXTRUSION OF MOISTENED COARSE-BROKEN GRAINS

O.I. Skul'skiy and Ye.V. Slavnov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, 614013, Russia

The motion of a moistened medium in a single screw extruder is considered. The problem is stated for «reversed motion» (the screw is fixed and the barrel rotates), and the middle longitudinal section of the screw channel is developed onto the plane. The lower boundary of the plane channel moves with the given velocity at an angle to the longitudinal axis. The longitudinal component of the flux determining the output of the extruder is due to the drag force of the channel wall and the counter pressure gradient caused by the die resistance. The circulation motion has no effect on the output, but, owing to intensive mixing, the distribution of moisture over the cross-section of the channel is uniform. The motion of the moistened medium is considered as plane and one-dimensional in velocity and moisture content, but as two-dimensional in pressure. For velocity profile, moisture distribution along the channel and pressure throughout the channel, the analytical expressions have been obtained. The experiment using the laboratory extruder was conducted to measure the moisture content along the channel. It has been found that the experimental and theoretical results agree well.

1. Введение

Рассматривается движение влагосодержащей среды (увлажненная крошка ржи) в одночервячном экструдере. Следуя традиционному подходу к математическому моделированию экструзионных процессов [1, 2], задача ставится в «обращенном движении» (шнек неподвижен, а корпус вращается), выделяется продольное срединное сечение винтового канала и разворачивается на плоскость. Принимается, что верхняя граница полученного плоского канала неподвижна, а нижняя граница движется с заданной скоростью под углом к продольной оси. Продольная составляющая потока, определяющая производительность экструдера, является результатом тянущего

движения стенки и встречного градиента давления, возникающего за счет сопротивления формирующего инструмента. Циркуляционное движение не вносит изменений в продольный поток, но, благодаря интенсивному перемешиванию, обеспечивает однородность распределения влаги и других свойств среды в поперечном сечении канала. Движение среды считается плоскопараллельным и изотермическим. Эффективная вязкость влагосодержащей среды в реальном процессе является функцией многих параметров: давления, скорости сдвига, температуры, влагосодержания, структуры и времени, причем эти параметры обладают перекрестным влиянием друг на друга и существенно осложняют как экспериментальные исследования, так и теоретическую задачу построения определяющего соотношения для такой среды [3, 4]. Поскольку в штатном режиме экструзии перечисленные параметры, за исключением давления, изменяются незначительно, то в первом приближении можно принять прямо пропорциональную зависимость эффективной вязкости от давления.

В литературе имеется множество статей прикладного характера, посвященных практическому использованию экструзии в переработке зерновых и пищевых продуктов. Работы теоретического плана, в которых применяются методы математического моделирования процесса экструзии, не столь многочисленны. В этом плане можно отметить работы авторов [5, 6, 7], в которых используются приближенные инженерные методы расчета течения зерновых продуктов в развернутом канале винта экструдера. В работе [8] использовались численные методы моделирования процесса экструзионной переработки увлажненной зерновой крошки ржи.

Целью данной статьи является получение аналитического решения задачи течения влагосодержащей среды в канале экструдера и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

2. Математическая постановка задачи

Введем декартовую систему координат, в которой ось z направлена вдоль плоского канала, а ось x – по его высоте. Принимая во внимание большую относительную длину канала, будем считать, что единственная ненулевая продольная компонента скорости есть функция только поперечной координаты $v = v_z(x)$, эффективная вязкость – функция продольной координаты $\mu = \mu(z)$, а давление – функция двух координат $P = P(x, z)$.

С учетом принятых предположений в стационарном случае система уравнений движения сводится к двум уравнениям

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2)$$

а условие несжимаемости смеси удовлетворяется автоматически.

Диффузия влаги порождается конвективным переносом и молекулярной диффузией, вызванной градиентами концентрации и давления. Уравнение диффузии влаги в стационарном случае принимает вид [9]:

$$v \frac{\partial C}{\partial z} = D_c \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + K_p C \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

где C – концентрация влаги; D_C – коэффициент диффузии; K_p – коэффициент бародиффузии.

Система уравнений будет замкнутой, если задать условия прилипания смеси и непроницаемости влаги на твердых стенках канала.

3. Аналитическое решение

Для решения задачи продифференцируем уравнение (1) по x , а уравнение (2) – по z и вычтем полученные уравнения одно из другого. В результате получим:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Используя разделение переменных, будем искать решение для давления в виде:

$$P = A_1 + A_2 g(x) e^{kz}, \quad (5)$$

где k – параметр автомодельности, подлежащий определению.

В этой постановке одномерное плоскопараллельное движение может реализоваться только в случае, когда эффективная вязкость пропорциональна продольному распределению давления и является экспоненциальной функцией $\mu = \mu_0 e^{kz}$.

Для удобства вычислений введем обозначения $g(0) = g_0$ и $g(H) = g_H$. С учетом граничных условий для давления $P(0,0) = 0$ и $P(0,L) = P_L$ определяются константы

$$A_1 = -\frac{P_L}{(e^{kL} - 1)}, \quad A_2 = \frac{P_L}{g_0(e^{kL} - 1)},$$

и распределение давления выражается через введенную функцию $g(x)$:

$$P = \frac{P_L}{(e^{kL} - 1)} \left(\frac{g}{g_0} e^{kL} - 1 \right). \quad (6)$$

Чтобы определить скорости, проинтегрируем уравнение (1) с учетом граничных условий: $v(0) = v_0$ и $v(H) = 0$. В результате получаем профиль скорости, также выраженный через функцию $g(x)$:

$$v = v_0 - \frac{P_L}{k \mu_0 (e^{kL} - 1)} \left(1 - \frac{g}{g_0} \right). \quad (7)$$

Подставляя выражение (5) в (4), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $g(x)$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = k^2 g, \quad (8)$$

общее решение которого имеет вид:

$$g = G_1 \operatorname{ch}(kx) + G_2 \operatorname{sh}(kx). \quad (9)$$

Из уравнения (7) вытекает очевидное соотношение $g_H = g_0 \left(1 - k \mu_0 v_0 \frac{(e^{kL} - 1)}{P_L}\right)$.

Константы уравнения (9) определяем с учетом уже найденных констант интегрирования

$$G_1 = g_0, \quad G_2 = g_0 \frac{\left(1 - k \mu_0 v_0 \frac{(e^{kL} - 1)}{P_L}\right) - \operatorname{ch}(kH)}{\operatorname{sh}(kH)}. \quad (10)$$

Окончательно поле давления и профиль скорости имеют вид

$$P = \frac{P_L}{(e^{kL} - 1)} \left[\left[\operatorname{ch}(kx) + \frac{\left(1 - k \mu_0 v_0 \frac{(e^{kL} - 1)}{P_L}\right) - \operatorname{ch}(kH)}{\operatorname{sh}(kH)} \operatorname{sh}(kx) \right] \cdot e^{kz} - 1 \right], \quad (11)$$

$$v = v_0 - \frac{P_L}{k \mu_0 (e^{kL} - 1)} \left[1 - \left[\operatorname{ch}(kx) + \frac{\left(1 - k \mu_0 v_0 \frac{(e^{kL} - 1)}{P_L}\right) - \operatorname{ch}(kH)}{\operatorname{sh}(kH)} \operatorname{sh}(kx) \right] \right]. \quad (12)$$

Для оценки распределения влаги по длине канала введем средние по сечению скорость и давление –

$$U = \frac{1}{H} \int_0^H v(x) dx, \quad \Pi(z) = \frac{1}{H} \int_0^H P(x, z) dx,$$

и, с учетом (4), запишем одномерное уравнение диффузии для установившегося процесса:

$$U \frac{\partial C}{\partial z} = D_C \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + 2K_p C \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет аналитическое решение и выражается через функции Бесселя первого и второго рода

$$C = -C_1 e^{\frac{kz}{2}} J_1 \left(Ne^{\frac{kz}{2}} \right) - C_2 e^{\frac{kz}{2}} Y_1 \left(Ne^{\frac{kz}{2}} \right), \quad (14)$$

где параметр автомодельности определен как $k = U/D_C$ и для упрощения записи введены обозначения $N = 2\sqrt{K_p P_S} / \sqrt{D_C}$ $P_S = P_L / (e^{kL} - 1)$.

Массопередача через твердые непроницаемые стенки канала не происходит и среднее объемное содержание влаги остаётся неизменным, но под действием конвективного переноса, концентрационной диффузии и бародиффузии распределение компонент смеси по длине канала неоднородно. В связи с тем, что в поставленной задаче переходная зона от загрузочной воронки до начала шнек-винта не рассматривается, значения влагосодержания на входе в канал заранее неизвестно. На выходе же из канала влагосодержание смеси легко измеряется. Тогда константы интегрирования C_1, C_2 определяются из простых условий:

$$\frac{1}{L} \int_0^L C(z) dz = C_V \text{ и } C|_{z=L} = C_L.$$

4. Анализ решения

В процессе экструзии влагосодержащей смеси реализуются три механизма перераспределения влаги: конвективный перенос, концентрационная диффузия и бародиффузия. Имея аналитическое выражение для изменения концентрации влаги по длине канала, интересно оценить влияние коэффициентов диффузии и бародиффузии.

На рисунках 1 и 2 представлены кривые распределения концентрации влаги по длине канала при различных коэффициентах концентрационной диффузии и бародиффузии. Расчеты выполнены при следующих значениях параметров задачи: $U = 0,01$ м/с; $P_L = 7 \cdot 10^6$ Па; $H = 0,07$ м; $L = 1,84$ м; $C_V = 0,283$; $C_L = 0,27$

Можно заметить, что преобладание концентрационной диффузии (увеличение коэффициента диффузии D_C) ведет к линейному распределению концентрации влаги по длине канала. Уменьшение коэффициента D_C ведет к возникновению максимума на концентрационной кривой внутри канала за счет совместного влияния конвективного переноса, направленного по потоку, и встречного потока влаги за счет бародиффузии. При увеличении коэффициента бародиффузии K_p величина максимума возрастает.

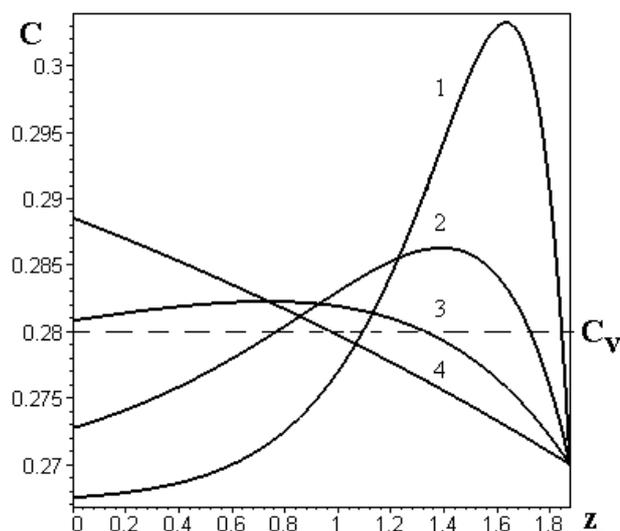


Рис. 1. Кривые распределения концентрации влаги по длине канала при $K_p = 2,3 \cdot 10^{-10}$ и $D_C = 1) 0,005$; 2) 0,01; 3) 0,02; 4) 0,1

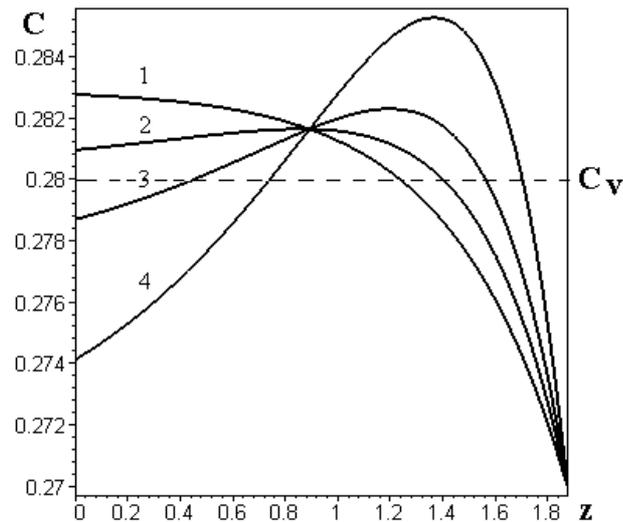


Рис. 2. Кривые распределения концентрации влаги по длине канала при $D_C = 0,01$ и $K_p = 1) 1 \cdot 10^{-11}$; 2) $5 \cdot 10^{-11}$; 3) $1 \cdot 10^{-10}$; 4) $2 \cdot 10^{-10}$

При отсутствии потока влаги за счет бародиффузии кривые распределения концентрации влаги в канале имеют монотонно убывающий характер.

5. Эксперимент

Для оценки теоретических результатов выполнен эксперимент на прямоточном экструдере диаметром 45 мм. Материал (крошка озимой ржи) доводился до влажности 28,3% и подавался в экструдер. Создаваемый в эксперименте уровень давления экструзии составлял $7 \cdot 10^6$ Н/м². В установившемся режиме работы экструдера (режим без нагрева) периодически проводился отбор образцов, затем экструдер останавливался, снималась экструзионная головка, экструдер включался и отбирались образцы в соответствии с витками нарезки на шнеке (Рис. 3). В процессе эксперимента измерялись и регистрировались давление экструзии и весовой расход. При проведении экспериментов все образцы сразу взвешивались. На следующем этапе образцы высушивались и снова взвешивались. На основании разности весов каждого образца до и после сушки определялось распределение влажности по длине шнек-винта.

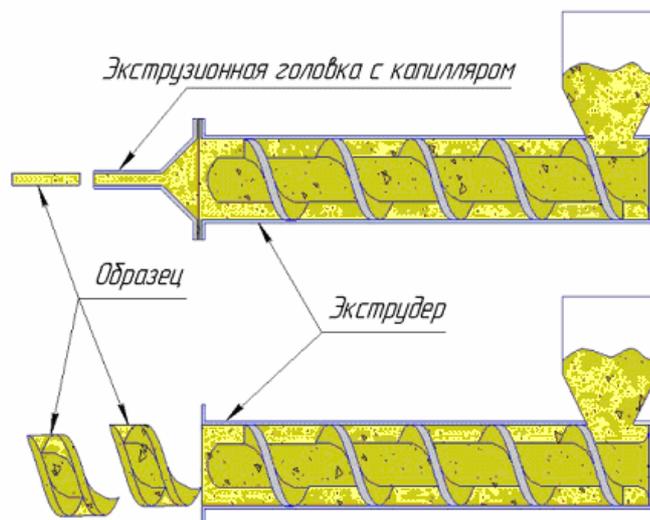


Рис. 3. Схема экспериментального определения распределения влаги в канале экструдера

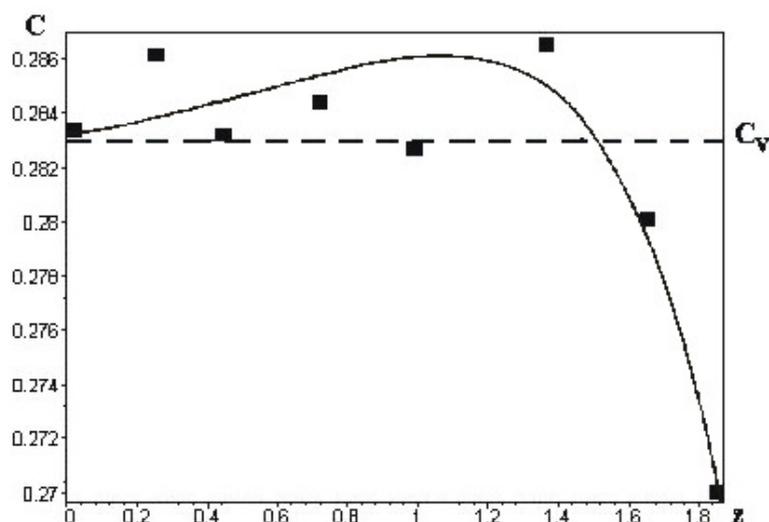


Рис. 4. Сравнение теоретических и экспериментальных данных при $D_c = 0,02$; $K_p = 5 \cdot 10^{-10}$
 ■ – экспериментальные данные, — – теоретическая кривая

6. Выводы

Эксперимент и соответствующее решение относятся к нормальным (корректно подобранным) режимам работы экструдера. В этом случае сравнение теоретических концентрационных кривых и экспериментальных данных, приведенных на рисунке 4, показывают удовлетворительное согласование результатов. Как в одном, так и другом случаях изменение концентрации влаги по длине канала не превышает 3%, что незначительно влияет на рабочие режимы экструдера, но оказывает заметное влияние на качество конечного продукта с точки зрения его пищевой ценности [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-96051-р_Урал_а, № 07-08-97603-р_Урал_офи).

Литература

1. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. – Москва: Химия, 1984. – 628с.
2. Раувендааль К. Экструзия полимеров. – Санкт-Петербург: Профессия, 2006. – 768с.
3. Славнов Е.В., Судаков А.И., Шакиров Н.В. Исследование реологических свойств увлажненной крошки озимой ржи. // Аграрный вестник Урала. – 2007. – № 6. – С. 57-61.
4. Бузмакова, С.В., Славнов Е.В., Судаков А.И., Шакиров Н.В. Определение реологических свойств озимой ржи. // Сборник материалов научно-практической конференции и выставки с международным участием «Управление реологическими свойствами пищевых продуктов». – Москва, 2008. – С. 10-14.
5. В.Г.Коротков, В.Ю. Полищук, Д.А. Мусиенко. Влияние влажности и высоты фильеры на процесс экструдирования комбикормов, // Вестник ОГУ. –2000. – № 2. – С. 117-119.
6. Зубкова Т.М., Насыров А.Ш. Учет характера движения материала в канале шнекового экструдирования растительного сырья. // Вестник ОГУ. – 2003. – № 1. – С. 147-151.
7. Стряпков А.В., Антимонов С.В., Соколова О.Я. Экструзионная обработка как фактор получения «экологически безопасных» продуктов из зерна и его производных. // Вестник ОГУ. – 2004. – № 2. С. 171-174.
8. Скульский О.И., Славнов Е.В. Численное моделирование экструзионной переработки зерна //Вестник ПГТУ «Вычислительная механика». – 2007. –№ 6. – С. 115-121.
9. Лыков А.В. Тепломассообмен. Справочник. – Москва: Энергия, 1972. – 560с.
10. Славнов Е.В., Коробов В.П., Лемкина Л.М. Получение концентрированных кормовых добавок экструзионной обработкой зерна озимой ржи с оценкой пищевой ценности. // Аграрный вестник Урала. – 2008. – № 2. – С. 80-83.