 Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. **1**, № 2. – С. 100-105

ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

И.Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия

Рассматриваются плоские задачи об определении напряженно-деформированного состояния изотропной упругой области с жесткопластическим включением. Показано, что поле напряжений и пластическая зона определяются однозначно. Рассмотрен пример плоскости с эллиптическим включением, напряженно-деформированное состояние которого будет однородным.

HARDPLASTIC INCLUSION IN ELASTIC MEDIUM

I.Yu. Tsvelodub

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

The plane problems of determination of the stress-strain state of an isotropic elastic domain with a hardplastic inclusion are considered. It is shown that the stress field and the plastic zone are defined in a unique fashion. As an example, we consider a plane with an elliptic inclusion whose stress-strain state is uniform.

1. Общая постановка задачи

Рассмотрим изотропную упругую область S с жесткопластическим включением S^*, которые находятся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. Их внешними границами служат замкнутые контуры L и L^* (последний отделяет S от S^*). В области S справедлив закон Гука [1]:

$$8\mu\varepsilon_{kl} = (æ-1)\sigma_{nn}\delta_{kl} + 4\sigma^{\circ}_{kl} ,$$
$$\sigma^{\circ}_{kl} = \sigma_{kl} - \sigma_{nn}\delta_{kl}/2 , \qquad (1)$$

где σ°_{kl} и δ_{kl} – компоненты плоского девиатора напряжений и единичного тензора; μ – модуль сдвига; $æ = 3-4\nu$ при плоской деформации и $æ = (3-\nu)/(1+\nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния; ν – коэффициент Пуассона; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2. В (1) и далее $k,\ l = 1,\ 2$.

Деформации ε_{kl} малы и выражаются через перемещения u_k известными соотношениями Коши.

Для жесткопластического включения S^*, подчиняющегося деформационной теории либо теории течения идеального пластического тела, имеем соответственно [1]:

$$\varepsilon^*_{kl} = \begin{cases} 0, & s < \sigma_T , \\ \lambda \partial s/\partial\sigma^*_{kl}, & s \ge \sigma_T , \end{cases} \qquad (2)$$

где $s = s(\sigma^*_{kl}) > 0$ – однородная первой степени выпуклая функция; σ_T – предел текучести; $\lambda = \lambda(s) > 0$, $\lambda'(s) > 0$ – для упрочняющегося материала и $\lambda > 0$ – неопределенный множитель для идеального пластического материала (в последнем случае второе неравенство в (2) следует заменить равенством $s = \sigma_T$), либо

$$\dot{\varepsilon}^*_{kl} = \begin{cases} 0, & s < \sigma_T \text{ или } s = \sigma_T \text{ и } \dot{s} < 0, \\ \lambda \partial s / \partial \sigma^*_{kl}, & s = \sigma_T \text{ и } \dot{s} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\lambda > 0$ – неопределенный множитель. Точка означает дифференцирование по параметру нагружения τ.

На внешней границе L области S заданы перемещения u_k или нагрузки $p_k = \sigma_{kl} n_l$ (n_k – компоненты единичного вектора нормали к L). На границе L^* областей S^* и S непрерывны перемещения и нагрузки.

Будем считать, что заданные на L величины u_k или p_k возрастают пропорционально параметру нагружения τ: $u_k = u_{k\circ}\tau$ или $p_k = p_{k\circ}\tau$; $\tau \ge 0$. При $\tau < \tau_T$ включение S^* является жестким, то есть $\varepsilon^*_{kl} = 0$ и $u^*_k = 0$ в S^*, а, следовательно, и $u^*_k = 0$ на L^*. Значение $\tau = \tau_T$ соответствует возникновению пластической зоны в S^*.

Необходимо определить напряженно-деформированное состояние (НДС) в области $S \cup S^*$.

2. О единственности решения задачи

Рассмотрим две стадии процесса нагружения.

Стадия I: $0 \le \tau < \tau_T$, то есть $\max\limits_{S^*} s < \sigma_T$, и включение S^* является жестким. Для области S имеем задачу в перемещениях или смешанную задачу (поскольку $u^*_k = 0$ на L^*, а на L заданы u_k или p_k), из решения которой найдем НДС в S, а, следовательно, и нагрузки $p^*_k = p_k \equiv \sigma_{kl} n^*_l$ на L^* (n^* – компоненты единичного вектора нормали к L^*).

Рассматривая далее жесткое включение S^* как упругую среду с модулем сдвига μ^* ($\mu^* \to \infty$), для функции напряжений F^* получим бигармоническое уравнение с заданными на L^* величинами F^* и $\partial F^* / \partial n^*$. Эта задача хорошо изучена [2]; ее решение дает поле напряжений σ^*_{kl} в S^*.

Стадия II: $\tau \ge \tau_T$, то есть $\max\limits_{S^*} s \ge \sigma_T$, и в области S^* возникает и развивается пластическая зона S^*_p. Покажем, что эта зона и напряжения в ней определяются однозначно. Доказательство аналогично приведенному в работе [3] для одной обратной задачи и базируется на условии устойчивости

$$\Delta\varepsilon^*_{kl} \Delta\sigma^*_{kl} \ge 0, \quad \Delta\varepsilon^*_{kl} = \varepsilon^{*(1)}_{kl} - \varepsilon^{*(2)}_{kl}, \quad \Delta\sigma^*_{kl} = \sigma^{*(1)}_{kl} - \sigma^{*(2)}_{kl} \tag{4}$$

для соотношений (2), либо

$$\Delta\dot{\varepsilon}^*_{kl} \Delta\sigma^*_{kl} \ge 0 \tag{5}$$

для соотношений (3).

Эти условия справедливы для любых напряжений $\sigma_{kl}^{*(1)}$ и $\sigma_{kl}^{*(2)}$ как в пластической, так и в жесткой областях.

Знак равенства в (4), где хотя бы одна компонента $\varepsilon_{kl}^{*(1)} \neq 0$ и $\varepsilon_{kl}^{*(2)} \neq 0$ (или в (5) при $\dot{\varepsilon}_{kl}^{*(1)} \neq 0$ и $\dot{\varepsilon}_{kl}^{*(2)} \neq 0$) возможен для пластически сжимаемой среды ($\partial s / \partial \sigma_{kk}^{*} \neq 0$) только при $\Delta \sigma_{kl}^{*} = 0$, а для несжимаемой ($\partial s / \partial \sigma_{kk}^{*} = 0$) – только при $\Delta \sigma_{kl}^{*} = \Delta p \delta_{kl}$, либо в случае $\varepsilon_{kl}^{*(1)} = \varepsilon_{kl}^{*(2)} = 0$. Кроме того, ситуация, когда $\varepsilon_{kl}^{*(1)} \neq 0,\ \varepsilon_{kl}^{*(2)} = 0$ (то есть $s_1 \geq \sigma_T,\ s_2 < \sigma_T$) и $\varepsilon_{kl}^{*(1)} \Delta \sigma_{kl}^{*} = 0$, невозможна.

Основой при доказательстве единственности является известное уравнение виртуальных работ, которое вследствие условий непрерывности перемещений и нагрузок на L^* будет иметь вид [1]:

$$\int_S \varepsilon_{kl} \sigma_{kl} dS + \int_{S^*} \varepsilon_{kl}^{*} \sigma_{kl}^{*} dS = \int_L u_k p_k dl \,. \qquad (6)$$

Здесь dl – дифференциал длины дуги контура L.

Рассмотрим случай, когда пластические деформации в жесткопластическом включении S^* определяются согласно соотношениям (2). Предполагая существование двух решений рассматриваемой задачи, для разностей соответствующих величин, которые будем обозначать с помощью символа Δ, из (6) получим

$$\int_S \varepsilon_{kl} \sigma_{kl} dS + \int_{S^*} \Delta\varepsilon_{kl}^{*} \Delta\sigma_{kl}^{*} dS = 0 \,. \qquad (7)$$

Предположим, что в S^* существуют две зоны пластичности, соответствующие двум возможным решениям – $S_{p1}^{*} \cup S_{p12}^{*}$ и $S_{p2}^{*} \cup S_{p12}^{*}$, которые пересекаются по области S_{p12}^{*}, то есть $\varepsilon_{kl}^{*(1)} = 0$ в S_{p2}^{*}, и $\varepsilon_{kl}^{*(2)} = 0$ в S_{p1}^{*}, и среди компонент $\varepsilon_{kl}^{*(1)}$ и $\varepsilon_{kl}^{*(2)}$ в S_{p12}^{*} есть отличные от нуля.

Учитывая, что в новой жесткой области $S_{\circ}^{*} \equiv S^{*} \setminus (S_{p1}^{*} \cup S_{p2}^{*} \cup S_{p12}^{*})$ все компоненты $\varepsilon_{kl}^{*} = 0$, из (7) найдем

$$\int_S \Delta\varepsilon_{kl} \Delta\sigma_{kl} dS + \int_{S_{p1}^{*}} \varepsilon_{kl}^{*(1)} \Delta\sigma_{kl}^{*} dS - \int_{S_{p2}^{*}} \varepsilon_{kl}^{*(2)} \Delta\sigma_{kl}^{*} dS + \int_{S_{p12}^{*}} \Delta\varepsilon_{kl}^{*} \Delta\sigma_{kl}^{*} dS = 0 \,. \qquad (8)$$

Вследствие (5) и неравенства: $\Delta\varepsilon_{kl} \Delta\sigma_{kl} \geq 0$ в S, вытекающего из (1), получим, что равенство (8) возможно лишь в том случае, если каждый из 4-х интегралов обращается в нуль. Отсюда $\Delta\sigma_{kl} = 0$ в S, $\varepsilon^{*(i)} = 0$ в S_{pi}^{*}, то есть $S_{pi}^{*} = \varnothing$ $(i = 1, 2)$; $\Delta\varepsilon_{kl}^{*} \Delta\sigma_{kl}^{*} = 0$ в S_{p12}^{*}. Таким образом, напряжения σ_{kl} в S и зона пластичности $S_p^{*} \equiv S_{p12}^{*}$ определяются однозначно, а напряжения в S_p^{*} – однозначно для сжимаемой среды и с точностью до постоянной (как следует из уравнений равновесия) величины Δp, то есть $\Delta\sigma_{kl}^{*} = \Delta p \delta_{kl}$, – для несжимаемой.

Возникает вопрос об определении напряжений σ_{kl}^{*} в новой жесткой области $S_{\circ}^{*} = S^{*} \setminus S_p^{*}$. Рассмотрим три возможных случая.

а). Пусть пластическая зона S_p^* с границей L_p^* возникает внутри S^*. Тогда на границе $L^* \cup L_p^*$ новой жесткой области $S_\circ^*$ будут известны нагрузки, так как по доказанному выше в S и S_p^* однозначно определяются напряжения. Рассматривая далее $S_\circ^*$ как упругую среду с модулем $\mu_\circ^* \to \infty$, приходим к первой основной задаче плоской теории упругости (см. Стадию I).

б). Пусть пластическая зона S_p^* выходит на часть L_{p1}^* границы L^*, то есть $L_{p1}^* \cup L_{p2}^*$ и $L_{p2}^* \cup L^* \setminus L_{p1}^*$ являются границами пластической S_p^* и жесткой $S_\circ^*$ областей соответственно. На L заданы u_k или p_k, на $L^* \setminus L_{p1}^*$ имеем $u_k = 0$, а на L_{p1}^* известны нагрузки p_k^*, так как напряжения σ_{kl}^* в S_p^* определяются однозначно (в указанном выше смысле). Отсюда находим НДС в области S и нагрузки на $L^* \setminus L_{p1}^*$, а на L_{p2}^* они известны (L_{p2}^* – часть границы пластической зоны S_p^*). Таким образом, на всей границе новой жесткой области $S_\circ^*$ заданы нагрузки, и опять приходим к задаче в напряжениях.

в). Пусть пластическая зона S_p^* выходит на всю границу L^*, следовательно, жесткая зона $S_\circ^*$ окружена пластической областью S_p^*, то есть L_p^* и $L_p^* \cup L^*$ являются границами $S_\circ^*$ и S_p^* соответственно. На L_p^* известны нагрузки, и для области $S_\circ^*$ имеем ту же задачу в напряжениях.

Заметим, что теорема единственности решения для напряжений в жесткой и пластической областях и для пластической зоны имеет место и при определяющих уравнениях (3). В этом случае в равенстве (8) надо заменить все деформации на их скорости, а затем проинтегрировать его по параметру нагружения τ от нуля до текущего значения. Тогда с учетом равенств $\Delta\sigma_{kl}\,|_{\tau=0} = 0$ получим

$$\frac{1}{2}\int_S \Delta\varepsilon_{kl}(\tau)\Delta\sigma_{kl}(\tau)dS + \int_0^\tau \left[\int_{S_{p1}^*} \dot{\varepsilon}_{kl}^{*(1)}\Delta\sigma_{kl}^* dS - \int_{S_{p2}^*} \dot{\varepsilon}_{kl}^{*(2)}\Delta\sigma_{kl}^* dS + \int_{S_{p12}^*} \dot{\varepsilon}_{kl}^{*}\Delta\sigma_{kl}^* dS\right] d\tau = 0.$$

Далее доказательство практически повторяет проведенное выше для уравнений (2).

3. Упругая плоскость с эллиптическим жесткопластическим включением

Рассмотрим частный случай сформулированной выше задачи, когда областью S является упругая плоскость, подчиняющаяся закону Гука (1), а S^* представляет собой эллиптическое включение, уравнение границы L^* которого в системе координат $0xy$ имеет вид: $x^2a^{-2} + y^2b^{-2} = 1$, $a \ge b$. На бесконечности действуют равномерно распределенные напряжения $\sigma_{kl}^\infty = \sigma_{kl\circ}^\infty \tau$, а вращение отсутствует.

В [1] исследовалась аналогичная задача для случая эллиптического физически нелинейного включения (ЭФН-включение) с определяющими уравнениями вида:

$$\varepsilon_{kl}^* = F_{kl}(\sigma_{mn}^*) \quad (k,l,m,n = 1,2), \tag{9}$$

где F_{kl} – нелинейные операторы, описывающие, например, упруговязкопластические свойства среды.

Показано, что поле напряжений во включении является однородным, и установлены следующие соотношения между НДС в ЭФН-включении и на бесконечности:

$$
\begin{aligned}
&F_i = \alpha_{ij} y_j + \beta_{ij} x_j \quad (i = 1,2,3)\,,\\
&F_1 = \varepsilon_{11}^*, \quad F_2 = \varepsilon_{22}^*, \quad F_3 = 2\varepsilon_{12}^*, \quad y_1 = \sigma_{11}^*, \quad y_2 = \sigma_{22}^*, \quad y_3 = \sigma_{12}^*,\\
&x_1 = \sigma_{11}^\infty, \quad x_2 = \sigma_{22}^\infty, \quad x_3 = \sigma_{12}^\infty, \quad \alpha_{11} = -\frac{(\text{æ}+1)(1-m)}{4\mu(1+m)},\\
&\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{(\text{æ-1})}{4\mu}, \quad \alpha_{22} = -\frac{(\text{æ}+1)(1+m)}{4\mu(1-m)}, \quad \alpha_{33} = -\frac{\text{æ}+\mathrm{m}^2}{\mu(1-m^2)}\\
&\beta_{11} == \frac{(\text{æ}+1)(3-m)}{8\mu(1+m)}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{(\text{æ}+1)}{8\mu}, \quad \beta_{22} = \frac{(\text{æ}+1)(3+\mathrm{m})}{8\mu(1-m)}\,,\\
&\beta_{33} = \frac{\text{æ}+1}{\mu(1-m^2)}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \quad (0 \le m < 1)\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Остальные α_{ij} и β_{ij} равны нулю. Суммирование в (10) проводится по *j* от 1 до 3.

Соотношения (9) и (10) представляют собой замкнутую систему для нахождения σ_{kl}^* по заданным напряжениям σ_{kl}^∞ на бесконечности. Эта система однозначно разрешима относительно σ_{kl}^* при указанных в [1] условиях. Зависимости, необходимые для определения НДС в упругой области *S*, также приведены в [1].

В рассматриваемом случае жесткопластического включения с определяющими уравнениями вида (2) или (3) на I стадии нагружения ($0 \le \tau < \tau_T$, то есть $F_i = 0, \;\; i = 1,2,3$) из (10) получим систему $\alpha_{ij} y_j + \beta_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1,2,3)$, из которой однозначно находятся $y_i = y_{i\circ}\tau$, где

$$
\begin{aligned}
&y_{1\circ} = (\text{æ}+1)[(\text{æ}+2-m)x_{1\circ} + (\text{æ}-2-m)x_{2\circ}]/[4\text{æ}(1-m)]\,,\\
&y_{2\circ} = (\text{æ}+1)[(\text{æ}-2+m)x_{1\circ} + (\text{æ}+2+m)x_{2\circ}]/[4\text{æ}(1+m)]\,,\\
&y_{3\circ} = (\text{æ}+1)x_{3\circ}/(\text{æ}+m^2)\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Рассмотрим II стадию нагружения ($\tau \ge \tau_T$), выбрав в качестве примера идеальное жесткопластическое включение, подчиняющееся уравнениям (3), где $s^2 = (y_1 - y_2)^2 + 4y_3^2$, что соответствует критерию Треска (в обоих случаях плоской задачи).

Значение τ_T, соответствующее началу пластического течения в S^*, найдем из условия $s = \sigma_T$ и соотношений (11): $\tau_T = \sigma_T[(y_{1\circ} - y_{2\circ})^2 + 4y_{3\circ}^2]^{-1/2}$.

Из (3) получим выражения для скоростей пластических деформаций

$$
\dot{F}_1 = -\dot{F}_2 = \lambda(y_1 - y_2)\sigma_T^{-1}, \quad \dot{F}_3 = 4\lambda y_3 \sigma_T^{-1}, \tag{12}
$$

где учтено, что $s = \sigma_T$.

Условию пластичности, то есть $(y_1 - y_2)^2 + 4y_3^2 = \sigma_T^2$, удовлетворим, полагая

$$
y_1 - y_2 = \sigma_T \cos\theta, \quad 2y_3 = \sigma_T \sin\theta\,. \tag{13}
$$

Из (12) и (13) получаются равенства $\dot{F}_1 = -\dot{F}_2 = \lambda \cos\theta$ и $\dot{F}_3 = 2\lambda \sin\theta$, подставляя которые в продифференцированные по τ соотношения (10) и разрешая их относительно $\dot{y}_i \quad (i = 1, 2, 3)$, получим систему для определения неизвестных θ и λ:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 - \dot{y}_2 = \sigma_T (\cos\theta)^\bullet = y_{1\circ} - y_{2\circ} - A\lambda\cos\theta\,, \\
&2\dot{y}_3 = \sigma_T (\sin\theta)^\bullet = 2y_{3\circ} - B\lambda\sin\theta\,, \\
&A = 4\mu(æm^2 + 1)/[æ(1 - m^2)] > 0\,, \\
&B = 4\mu(1 - m^2)/[(æ + m^2)] > 0\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Исключая из (14) величину λ и учитывая, что при $\tau = \tau_T$ имеют место равенства: $y_1 - y_2 = \sigma_T \cos\theta_T = (y_{1\circ} - y_{2\circ})\tau_T$ и $2y_3 = \sigma_T \sin\theta_T = 2y_{3\circ}\tau_T \quad (\theta_T = \theta(\tau_T))$, запишем уравнение 1-ого порядка

$$\dot{\theta} = \frac{A\sin\theta_T \cos\theta - B\cos\theta_T \sin\theta}{\tau_T (A\cos^2\theta + B\sin^2\theta)}$$

с начальным условием $\theta(\tau_T) = \theta_T$, которое дает решение $\theta = \theta(\tau)$ при $\tau > \tau_T$. Функция $\lambda = \lambda(\tau)$ находится из (14).

Заметим, что согласно с (13) напряжения y_1 и y_2 определяются с точностью до произвольного слагаемого, поскольку в рассмотренном примере среда является пластически несжимаемой.

4. Заключение

Выше исследуется задача об определении напряженно-деформированного состояния упругой области, содержащей жесткопластическое включение, подчиняющееся определяющим уравнениям (2) или (3), для которых справедливы неравенства (4) или (5), обеспечивающие единственность решения. Эта задача может быть обобщена на случай нескольких жесткопластических включений, каждое из которых удовлетворяет уравнениям (2) или (3) и неравенствам (4) или (5). Доказательство единственности решения базируется на равенстве (7), в котором интеграл в левой части берется не по одному, а по всем включениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00168, № 06-08-96002) и Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (грант НШ–3066.2008.1).

Литература

1. *Цвелодуб И.Ю.* Физически нелинейное включение в линейно-упругой среде (плоская задача) // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 5. – С. 72-84.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707с.
3. *Цвелодуб И.Ю.* Обратная упругопластическая задача // Изв. РАН. МТТ. – 1998. – № 1. – С. 35-43.