

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕКЛЮЮЩИХСЯ ТЕЛАХ

О.Ю. Сметанников, Н.А. Труфанов

Пермский государственный технический университет, Пермь, 614000, Россия

Рассмотрена общая постановка краевой задачи термомеханики полимерных материалов в условиях релаксационного перехода, включающая предложенные авторами определяющие соотношения. Изложен численный пошаговый алгоритм решения задачи с применением на каждом шаге процедуры метода конечных элементов. Отмечены особенности численного решения при учете вязкоупругих свойств стеклообразного состояния. Осуществлена адаптация предложенной физической модели в конечно-элементный пакет ANSYS. Приведено решение задачи о прогнозировании полей технологических и остаточных напряжений в стеклющемся сплошном коротком эпоксидном цилиндре.

NUMERICAL ANALYSIS OF TECHNOLOGICAL AND RESIDUAL STRESSES IN VITRIFIED MEDIA

O.Yu. Smetannikov and N.A. Trufanov

Perm State Technical University, Perm, 614000, Russia

The general description of a thermomechanical boundary-value problem for polymeric materials in conditions of relaxation transition, including author's physical model, is presented. The numerical step-by-step algorithm is proposed to solve this problem by the application of finite element method procedure on each step. The specific features of the numerical solution to the problem, taking into accounting viscoelastic properties of the medium in glassy state, are demonstrated. Adaptation of the proposed physical model to the finite-element program ANSYS is carried out. The solution of the problem on forecasting the fields of technological and residual stresses in a vitrifying continuous short epoxy-polymer cylinder is given.

Проблема описания термомеханического поведения вязкоупругих аморфных полимерных материалов имеет важное значение в связи с необходимостью прогнозирования явлений и закономерностей протекания технологических процессов производства изделий, сопровождающихся терморелаксационными переходами, одним из которых, и наиболее ярким, является стеклование.

В работах [1, 2] на основе физических механизмов межмолекулярного взаимодействия в охлаждающейся аморфной полимерной системе и их проявлений на макроуровне получены феноменологические определяющие соотношения, позволяющие подробно проанализировать изменение напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов в сложных термомеханических режимах нагружения. Уравнения основаны на представлении среды в виде композиции исходного (размягченного) и полностью отвержденного (застеклованного) материала с учетом истории непрерывного зарождения и деформирования материала в новом состоянии в интервале температур релаксационного перехода. При этом для определения материальных функций и констант предполагается использование ряда простых и методически отлаженных экспериментов на образцах при температурах, соответствующих отдельным релаксационным состояниям. Показано, что использование

предложенных соотношений приводит к достаточно хорошему количественному соответствию опытным результатам, в том числе при описании эффектов «замораживания» деформированного состояния при понижении температуры и «размораживания» и полной обратимости деформации при повышении температуры [1, 2]. На основе предложенных физических соотношений построены математические модели для численного анализа закономерностей образования и эволюции полей технологических и остаточных напряжений в полимерных материалах и конструкциях в процессе их изготовления.

1. Постановка краевой задачи термомеханики стеклующегося тела

В общем случае постановка краевой квазистатической задачи без учета объемных сил включает в себя следующие уравнения

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = ((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) / 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2)$$

с начальными

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

и граничными условиями вида:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \quad (5)$$

где $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ — тензоры напряжений и деформаций с компонентами σ_{ij} и ε_{ij} соответственно; \mathbf{u}, \mathbf{n} — векторы перемещений и внешней единичной нормали к поверхности S с компонентами соответственно u_i, n_i ; \mathbf{x} — радиус-вектор произвольной точки тела, имеющий компоненты x_i ; \mathbf{U} — заданный на части S_u границы S вектор перемещений с компонентами U_i ; \mathbf{P} — заданный на части S_σ границы S вектор поверхностных сил с компонентами P_i ; $S_u \cup S_\sigma \equiv S$; $i, j = 1, 2, 3$.

Система уравнений задачи механики замыкается определяющими соотношениями, которые, в зависимости от условий задачи и свойств конкретного материала, записываются либо в упругом приближении [1]

$$\begin{aligned} \hat{s}(\mathbf{x}, t) = 2G_1(T(\mathbf{x}, t))\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + 2G_2(T(\mathbf{x}, t)) \int_{T_H}^{T(t)} [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) - \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)] dN(T(\mathbf{x}, \tau)), \\ \sigma(\mathbf{x}, t) = B_1(T(\mathbf{x}, t))[\theta(\mathbf{x}, t) - 3\hat{\varepsilon}_T(\mathbf{x}, t)] + \\ + B_2(T(\mathbf{x}, t)) \int_{T_H}^{T(t)} \{[\theta(\mathbf{x}, t) - 3\hat{\varepsilon}_T(\mathbf{x}, t)] - [\theta(\mathbf{x}, \tau) - 3\hat{\varepsilon}_T(\mathbf{x}, \tau)]\} dN(T(\mathbf{x}, \tau)), \end{aligned} \quad (6)$$

либо в более полной форме с учетом вязкоупругих свойств в стеклообразном состоянии [2]:

$$\hat{s}(\mathbf{x}, t) = 2G_1(T)\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + 2 \int_0^{N(t)} \left[\int_{-\omega}^t R^G(T, t - \omega, \tau - \omega) d\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) \right] dN(T(\mathbf{x}, \omega));$$

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = B_1(T) [\theta(\mathbf{x}, t) - 3\varepsilon_T(\mathbf{x}, t)] +$$

$$+ \int_0^{N(t)} \left[\int_{-\omega}^t R^B(T, t - \omega, \tau - \omega) d(\theta(\mathbf{x}, \tau) - 3\varepsilon_T(\mathbf{x}, \tau)) \right] dN(T(\mathbf{x}, \omega)). \quad (7)$$

где $\theta = \varepsilon_{kk}$; $e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\theta(t)\delta_{ij}$; $s_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \sigma(t)\delta_{ij}$; $G_2 = G^s - G_1$; $B_2 = B^s - B_1$;

G_1, G^s, B_1, B^s — сдвиговые и объемные модули в высокоэластическом и стеклообразном

состояниях соответственно; $\hat{\varepsilon}_T(t) = \int_{T_H}^{T(t)} \hat{\alpha}(T) dT(\tau)$; $\hat{\alpha}$ — тензор коэффициентов

линейного температурного расширения; $R^G(t, \tau) = R_{12}(t, \tau) - G_1$ ($R_{12}(t, \tau)$ — функция сдвиговой релаксации полностью застеклованного материала); $R^B(t, \tau) = R_{11}(t, \tau) - B_1$ ($R_{11}(t, \tau)$ — функция объемной релаксации материала в стеклообразном состоянии).

Если в застеклованном состоянии материал проявляет терморологически простое поведение в опытах на сдвиговую и на объемную релаксацию (или ползучесть), то возможно использование принципа температурно-временной аналогии с двумя независимыми функциями температурно-временного сдвига (для функции объемной релаксации — $a_T^{(R^B)}$ и для функции сдвиговой релаксации — $a_T^{(R^G)}$) и, как следствие, введение двух различных модифицированных времен

$$t'_B = \int_0^t a_T^{(R^B)}(T(\tau)) d\tau, \quad \tau'_B = \int_0^\xi a_T^{(R^B)}(T(\tau)) d\tau,$$

$$t'_G = \int_0^t a_T^{(R^G)}(T(\tau)) d\tau, \quad \tau'_G = \int_0^\xi a_T^{(R^G)}(T(\tau)) d\tau$$

для уравнений (7). В этом случае соотношения связи напряжений и деформаций преобразуются к виду:

$$\hat{s}(\mathbf{x}, t) = 2G_1(T)\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + 2 \int_0^{N(t)} \left[\int_{-\omega}^t R^G(t'_G - \tau'_G) d\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) \right] dN(T(\mathbf{x}, \omega));$$

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = B_1(T) [\theta(\mathbf{x}, t) - 3\varepsilon_T(\mathbf{x}, t)] +$$

$$+ \int_0^{N(t)} \left[\int_{-\omega}^t R^B(t'_B - \tau'_B) d(\theta(\mathbf{x}, \tau) - 3\varepsilon_T(\mathbf{x}, \tau)) \right] dN(T(\mathbf{x}, \omega)). \quad (8)$$

При этом зависимость $N(T)$ задается, например, распределением Лапласа [3]:

$$N_L(T, \dot{T}) = \begin{cases} 1 - 0,5e^{-\frac{\gamma_L(T - T_g(\dot{T}))}{\gamma_L}}, & T < T_g; \\ 0,5e^{-\frac{\gamma_L(T - T_g(\dot{T}))}{\gamma_L}}, & T \geq T_g, \end{cases}$$

где $T_g(\dot{T})$ — температура стеклования; \dot{T} — скорость изменения температуры; γ_L — параметр, определяющий ширину интервала стеклования.

Уравнения (1)–(8) содержат зависимость от времени, которая возникает за счет возможного изменения во времени внешних силовых и кинематических воздействий, а также нестационарного температурного поля $T(\mathbf{x}, t)$, определяемого из решения краевой задачи нестационарной теплопроводности [4]

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T)\text{grad}T(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t^*), \quad (9)$$

с начальными условиями

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_H \quad (10)$$

и граничными условиями вида:

$$\lambda(T)\mathbf{n} \cdot \text{grad}T(\mathbf{x}, t) = \alpha_T(T(\mathbf{x}, t) - T_{cp}(t)), \quad \mathbf{x} \in S_3, \quad (11)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}T(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad (12)$$

где $c(T)$, $\rho(T)$, $\lambda(T)$ — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала; α_T — коэффициент конвективного теплообмена с окружающей средой, имеющей температуру T_{cp} ; S_3 — граничная область с условиями конвективного теплообмена; S_0 — с отсутствием теплообмена.

2. Алгоритм численного решения задачи методом конечных элементов

Пусть каким-либо известным способом, например, методом конечных элементов [5], получено решение задачи (9)–(12), то есть найдено изменение во времени поля температур в области Ω . Рассмотрим формулировку МКЭ для решения краевой задачи (1)–(6) в случае упругого приближения.

Используем некоторый конечный элемент, перемещения любой точки которого характеризуется вектором-столбцом перемещений

$$\{f(\mathbf{x}, t)\} = \begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{x}, t) \\ u_2(\mathbf{x}, t) \\ u_3(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix},$$

связанным при помощи матрицы функций формы $[N^e(\mathbf{x})]$ с вектором узловых неизвестных элемента $\{\delta^e(t)\}$ [5]:

$$\{f(\mathbf{x}, t)\} = [N^e(\mathbf{x})]\{\delta^e(t)\}.$$

Вектор-столбец деформаций элемента $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}\}$ выражается через вектор-столбец узловых неизвестных $\{\delta^e(t)\}$ известным образом [5] с помощью матрицы градиентов $[B(\mathbf{x})]$:

$$\{\varepsilon(\mathbf{x}, t)\} = [B(\mathbf{x})]\{\delta^e(t)\}.$$

Представим в матричном виде физические соотношения (6), введя в рассмотрение вектор-столбец напряжений $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}\}$ и опуская для краткости аргумент \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \{\sigma(t)\} = & [D^{(1)}(t)](\{\varepsilon(t)\} - \{\varepsilon_T(t)\}) + \{D^{(2)}(t)\}(\{\varepsilon(t)\} - \{\varepsilon_T(t)\})N(t) - \\ & - [D^{(2)}(t)] \int_0^{N(t)} (\{\varepsilon(\tau)\} - \{\varepsilon_T(\tau)\}) dN(\tau), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\{\varepsilon_T\}^T = \{I\}^T \int_{T_0}^{T(t)} \alpha(\tau) dT(\tau), \quad \{I\}^T = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\},$$

а отличные от нуля компоненты матриц $[D^{(1)}]$, $[D^{(2)}]$ равны:

$$D_{kk}^{(i)} = B_i(T) + \frac{4}{3}G_i(T), \quad k = 1, 2, 3;$$

$$D_{mn}^{(i)} = B_i(T) - \frac{2}{3}G_i(T), \quad m, n = 1, 2, 3, \quad m \neq n;$$

$$D_{kk}^{(i)} = G_i(T), \quad k = 4, 5, 6; \quad i = 1, 2.$$

Представим отрезок времени $[0, t]$ в виде набора отрезков $[0, t] = \bigcup_{m=1}^M [t_{m-1}, t_m]$, то

есть на оси времени введем в рассмотрение сетку с узловыми точками t_0, t_1, \dots, t_M . Тогда возможна аппроксимация интеграла в (13) конечной суммой с использованием правосторонней формулы прямоугольников:

$$\begin{aligned} [D^{(2)}] \int_0^{N(t)} (\{\varepsilon(\tau)\} - \{\varepsilon_T(\tau)\}) dN(\tau) \approx & [D^{(2)}(t_M)] \times \\ \times \sum_{m=1}^M [(\{\varepsilon(t_m)\} - \{\varepsilon_T(t_m)\}) (N(T(t_m)) - N(T(t_{m-1})))]. \end{aligned}$$

После вынесения неизвестного вектора текущей деформации $\{\varepsilon(t_M)\}$ из-под знака суммирования и подстановки в (13) физические соотношения принимают вид:

$$\{\sigma(t_M)\} = [D(t_M)]\{\varepsilon(t_M)\} + \{\sigma_0(t_M)\},$$

где

$$[D(t_M)] = [D^{(1)}(t_M)] + [D^{(2)}(t_M)]N(T(t_{M-1}));$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_0(t_M)\} = & -[D(t_M)]\{\varepsilon_T(t_M)\} - \\ & -[D^{(2)}(t_M)] \sum_{m=1}^{M-1} (\{\varepsilon(t_m)\} - \{\varepsilon_T(t_m)\})(N(T(t_m)) - N(T(t_{m-1}))). \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, численное решение краевой задачи (1)–(7) сводится к пошаговой процедуре, в которой на каждом шаге по времени t_M решается краевая задача теории упругости относительно узловых неизвестных $\{\varepsilon(t_M)\}$ с некоторым начальным для данного шага полем напряжений $\{\sigma_0(t_M)\}$. Поле вычисляется из соотношений (14) по найденным к моменту времени t_M значениям узловых неизвестных $\{\varepsilon(t_m)\}$, ($m = 0, 1, \dots, M-1$).

Векторы узловых сил конечного элемента вычисляются обычным образом [5]:

$$\{F_{\sigma_0}^e(t_M)\} = - \int_{\Omega^e} [B(\mathbf{x})]^T \{\sigma_0(\mathbf{x}, t_M)\} d\Omega^e(\mathbf{x}) \quad \text{— вектор узловых сил от начальных}$$

напряжений;

$$\{F_P^e(t_M)\} = \int_{S^e} [N^e(\mathbf{x})]^T \{P(\mathbf{x}, t_M)\} dS^e(\mathbf{x}), \quad \text{— вектор узловых поверхностных сил.}$$

Здесь Ω^e — объем конечного элемента; S^e — часть его поверхности, принадлежащая границе S_σ области Ω .

В результате построения традиционным способом [5] глобальных матриц системы конечных элементов приходим для каждого текущего момента времени $t = t_M$ к алгебраическому аналогу системы интегро-дифференциальных уравнений (1)–(7):

$$[K(t_M)]\{\delta(t_M)\} = \{F_P(t_M)\} + \{F_{\sigma_0}(t_M)\},$$

$$\{F_{\sigma_0}(t_0)\} = 0. \quad (15)$$

Вычисление вектора $\{F_{\sigma_0}(t_M)\}$ связано с подсчетом суммы (14), учитывающей деформационную историю. Сумма будет равняться нулю для моментов времени,

соответствующих температурам $T > T_{g1}$ и некоторой постоянной величине для моментов времени, соответствующих $T \leq T_{g2}$.

3. Особенности численного алгоритма при учете вязкоупругих свойств

Рассмотрим один из возможных вариантов численного решения краевой задачи (1)–(5) с определяющими соотношениями (8), учитывающими вязкоупругий характер поведения полимерного материала в стеклообразном состоянии. Для простоты будем предполагать, что шаровые части тензоров напряжений и деформаций как в размягченном, так и в застеклованном состояниях, связаны упругим образом, то есть в соотношениях (8) примем $R^B(t) = B_2 = \text{const}$. Для (8) получим:

$$\begin{aligned} \hat{s}(\mathbf{x}, t) &= 2G_1(T)\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + 2 \int_0^{N(t)} \left[\int_{\omega} R^G(t'_G - \tau'_G) d\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) \right] dN(T(\mathbf{x}, \omega)); \\ \sigma(\mathbf{x}, t) &= B_1(T(\mathbf{x}, t)) [\theta(\mathbf{x}, t) - 3\varepsilon_T(\mathbf{x}, t)] + \\ &+ B_2(T(\mathbf{x}, t)) \int_0^{N(t)} \{ [\theta(\mathbf{x}, t) - 3\varepsilon_T(\mathbf{x}, t)] - [\theta(\mathbf{x}, \tau) - 3\varepsilon_T(\mathbf{x}, \tau)] \} dN(T(\mathbf{x}, \tau)), \end{aligned} \quad (16)$$

где для удобства использованы обозначения: $t' = t'_G$; $\tau' = \tau'_G$; $R(t) = R^G(t)$; $a_T = a_T^{R^G}$.

Конечно-элементная реализация решения поставленной задачи, как и в случае упругого приближения (см. раздел 2), основывается на методе пошагового интегрирования. Вновь представим отрезок времени $[0, t]$ в виде набора отрезков $[0, t] = \bigcup_{m=1}^M [t_{m-1}, t_m]$. На введенной сетке с узловыми точками t_0, t_1, \dots, t_M построим следующие аппроксимации интегралов в выражениях (16) конечными суммами с использованием правосторонней формулы прямоугольников:

$$\begin{aligned} &\int_0^{N(t)} \left[\int_{\omega} R(t' - \tau') d\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) \right] dN(T(\mathbf{x}, \omega)) \approx \\ &\approx \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=m+1}^M R(t'_M - \tau'_n) (\hat{\varepsilon}(t_n) - \hat{\varepsilon}(t_{n-1})) \right) (N(T(t_m)) - N(T(t_{m-1}))) = \\ &= R(0) \hat{\varepsilon}(t_M) N(t_{M-1}) - R(0) \hat{\varepsilon}(t_M) N(t_{M-2}) - \\ &- R(0) \hat{\varepsilon}(t_{M-1}) N(t_{M-1}) + R(0) \hat{\varepsilon}(t_{M-1}) N(t_{M-2}) + \\ &+ \sum_{m=1}^{M-1} \left(\sum_{n=m+1}^{M-1} R(t'_M - \tau'_n) (\hat{\varepsilon}(t_n) - \hat{\varepsilon}(t_{n-1})) \right) (N(T(t_m)) - N(T(t_{m-1}))), \end{aligned} \quad (17)$$

$$t'_n - \tau'_n = \sum_{k=m}^n a_T(T(t_k))(t_k - t_{k-1}), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{N(t)} (\theta(\tau) - 3\varepsilon_T(\tau)) dN(T(\tau)) \approx \\ & \approx \sum_{m=1}^M (\theta(t_m) - 3\varepsilon_T(t_m)) (N(T(t_m)) - N(T(t_{m-1}))). \end{aligned} \quad (19)$$

Используя конечно-элементные аппроксимации перемещений и деформаций в элементе и аппроксимации по времени (17)–(19), запишем в матричном виде физические соотношения (8), вновь для краткости опуская аргумент x :

$$\{\sigma(t_M)\} = [D(t_M)]\{\varepsilon(t_M)\} + \{\sigma_0(t_M)\}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} [D(t_M)] &= [D^{(1)}(t_M)] + [D^{(2)}(t_M)] \cdot N(T(t_{M-1})) + [\bar{D}^{(2)}] \cdot N(T(t_{M-2})), \\ \{\sigma_0(t_M)\} &= -[D(t_M)]\{\varepsilon_T(t_M)\} - \\ & - [\bar{D}^{(2)}(t_M)] \sum_{m=1}^{M-1} (\{\varepsilon(t_m)\} - \{\varepsilon_T(t_m)\}) (N(T(t_m)) - N(T(t_{m-1}))) - \\ & - [\bar{D}^{(2)}] (\{\varepsilon(t_{M-1})\} - \{\varepsilon_T(t_{M-1})\}) (N(T(t_{M-1})) - N(T(t_{M-2}))) + \\ & + \frac{1}{R(0)} [\bar{D}^{(2)}] \sum_{m=1}^{M-1} \left(\sum_{n=m+1}^{M-1} R(t'_M - t'_n) (\{\varepsilon(t_n)\} - \{\varepsilon(t_{n-1})\} - \{\varepsilon_T(t_n)\} + \{\varepsilon_T(t_{n-1})\}) \right) \times \\ & \times (N(T(t_m)) - N(T(t_{m-1}))). \end{aligned} \quad (20)$$

При записи соотношения (20) использованы следующие матрицы:

$$[D^{(1)}(t_M)] = \begin{bmatrix} B_1 + \frac{4}{3}G_1 & B_1 - \frac{2}{3}G_1 & B_1 - \frac{2}{3}G_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 - \frac{2}{3}G_1 & B_1 + \frac{4}{3}G_1 & B_1 - \frac{2}{3}G_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 - \frac{2}{3}G_1 & B_1 - \frac{2}{3}G_1 & B_1 + \frac{4}{3}G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{D}^{(2)}(t_M)] = \begin{bmatrix} B_2 & B_2 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & B_2 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & B_2 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\bar{D}^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}R(0) & -\frac{2}{3}R(0) & -\frac{2}{3}R(0) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}R(0) & \frac{4}{3}R(0) & -\frac{2}{3}R(0) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}R(0) & -\frac{2}{3}R(0) & \frac{4}{3}R(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R(0) \end{bmatrix},$$

$$\left[D^{(2)}(t_M) \right] = \left[\bar{D}^{(2)}(t_M) \right] + \left[\bar{\bar{D}}^{(2)} \right],$$

причем $B_1 = B_1(T(t_M))$, $B_2 = B_2(T(t_M))$, $G_1 = G_1(T(t_M))$. Поэтому матрицы $\left[D^{(1)}(t_M) \right]$ и $\left[\bar{D}^{(2)}(t_M) \right]$ изменяются на каждом шаге по времени, а матрица $\left[\bar{\bar{D}}^{(2)} \right]$ состоит из констант, так как в силу используемой гипотезы о справедливости в стеклообразном состоянии температурно-временной аналогии мгновенное значение функции сдвиговой релаксации материала не должно зависеть от температуры.

Таким образом, численное решение краевой задачи (1)–(5) с определяющими соотношениями (16) снова сводится к пошаговой процедуре, в которой на каждом шаге по времени t_M решается краевая задача теории упругости относительно узловых неизвестных $\{\varepsilon(t_M)\}$ с некоторым начальным для данного шага полем напряжений $\{\sigma_0(t_M)\}$. Поле вычисляется из соотношений (20) по найденным к моменту времени t_M значениям узловых неизвестных $\{\varepsilon(t_m)\}$, $m = 0, 1, \dots, M-1$. При использовании метода конечных элементов задача вновь сводится к системе линейных алгебраических уравнений вида (15), в которых для подсчета вектора сил $\{F_{\sigma_0}(t_M)\}$ следует применять выражение (20).

4. Численный анализ технологических и остаточных напряжений в коротком сплошном стеклюющемся эпоксидном цилиндре

С использованием приведенной общей пошаговой процедуры решалась частная задача об охлаждении короткого сплошного цилиндра из эпоксидной смолы ЭДТ-10 длиной 15 см и диаметром 7 см. Запись соотношений из разделов 2 и 3 для осесимметричного случая в силу очевидности здесь не приводится. На поверхности цилиндра выполнялись температурные граничные условия третьего рода (10), причем $T_{cp} = \text{const}$. Термомеханические параметры материала в системе СИ имели следующие значения: $\lambda = 0.423$ Вт/(м·К); $C = 1200$ Дж/(кг·К); $\rho = 1600$ кг/м³; $B = 2062 \cdot 10^9$ Па (модуль объемного сжатия). При проведении вычислений принималась гипотеза об отсутствии у материала цилиндра в застеклованном состоянии объемной релаксации: $B_2 = R^B(0) = \text{const}$. В рамках данного предположения определялись компоненты функции продольной релаксации $R(t)$ на базе эксперимента по одноосному нагружению ЭДТ-10 при разных температурах [6]. По данным эксперимента на ползучесть из [6]

использовалась аппроксимация функции релаксации в виде суммы экспонент:

$$R(t) = E \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\gamma_j} - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\gamma_j} \exp(-\gamma_j t) \right).$$

Значения коэффициентов аппроксимации функции релаксации приведены в таблице.

По данным работы [6] материал полагался терморологически простым, функции температурно-временной редукции описывались уравнением Вильямса-Ланделла-Ферри:

$$\ln a_T = \frac{c_1 (T - T_0)}{1 + c_2 (T - T_0)},$$

где $T_0 = 20^\circ\text{C}$. В расчетах использовались следующие значения констант: $c_1 = 0.322 \text{ K}^{-1}$; $c_2 = 0.00339 \text{ K}^{-1}$.

Цилиндр охлаждался от $T_0 = 160^\circ\text{C}$ до $T_{cp} = 20^\circ\text{C}$. Скорость охлаждения в отдельных вариантах расчета изменялась за счет варьирования коэффициента теплоотдачи α_T . Расчет проводился на равномерной сетке конечных элементов с 2500 узлами, временной интервал разбивался на 200 неравномерных шагов. Полагалось, что цилиндр остыл полностью в момент t^* , если выполняется условие: $T_0 - \bar{T}(t^*) \geq 0.95(T_0 - T_{cp})$, где \bar{T} — осредненная по объему цилиндра температура.

На рисунке 1 приведены поля остаточных напряжений в цилиндре после остывания с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_T = 500 \text{ Дж}/(\text{м}\cdot\text{К})$. Как видно из рисунка, в центральной части цилиндра все нормальные напряжения — растягивающие, что создает условия для его потенциального разрушения. Максимальных по модулю значений напряжения достигают на поверхности цилиндра в среднем поперечном сечении, при этом внешние слои находятся в состоянии сжатия.

На рисунке 2 показаны кривые распределения остаточных напряжений в центральном сечении цилиндра через 1 час после полного остывания, вычисленные для двух разных значений коэффициента теплоотдачи. Видно, что снижение интенсивности теплообмена с окружающей средой приводит к уменьшению уровня остаточных напряжений, а также к росту погрешности расчета по модели упругого приближения, что объясняется увеличением, в среднем по объему, приведенного времени релаксации и реальной длительности процесса.

Таблица. Параметры функций релаксации связующего ЭДТ-10

j	m_j, c^{-1}	γ_j, c^{-1}
1	0.90244e-13	0.43873e-10
2	0.12257e-10	0.18286e-8
3	0.69911e-8	0.14199e-6
4	0.72452e-6	0.44526e-5
5	0.27437e-4	0.97101e-4
6	0.23912e-3	0.18647e-2
7	0.52182e-2	0.56849e-1
8	0.18740	1.87281
9	7.72474	62.62810
10	76.21483	1883.91335

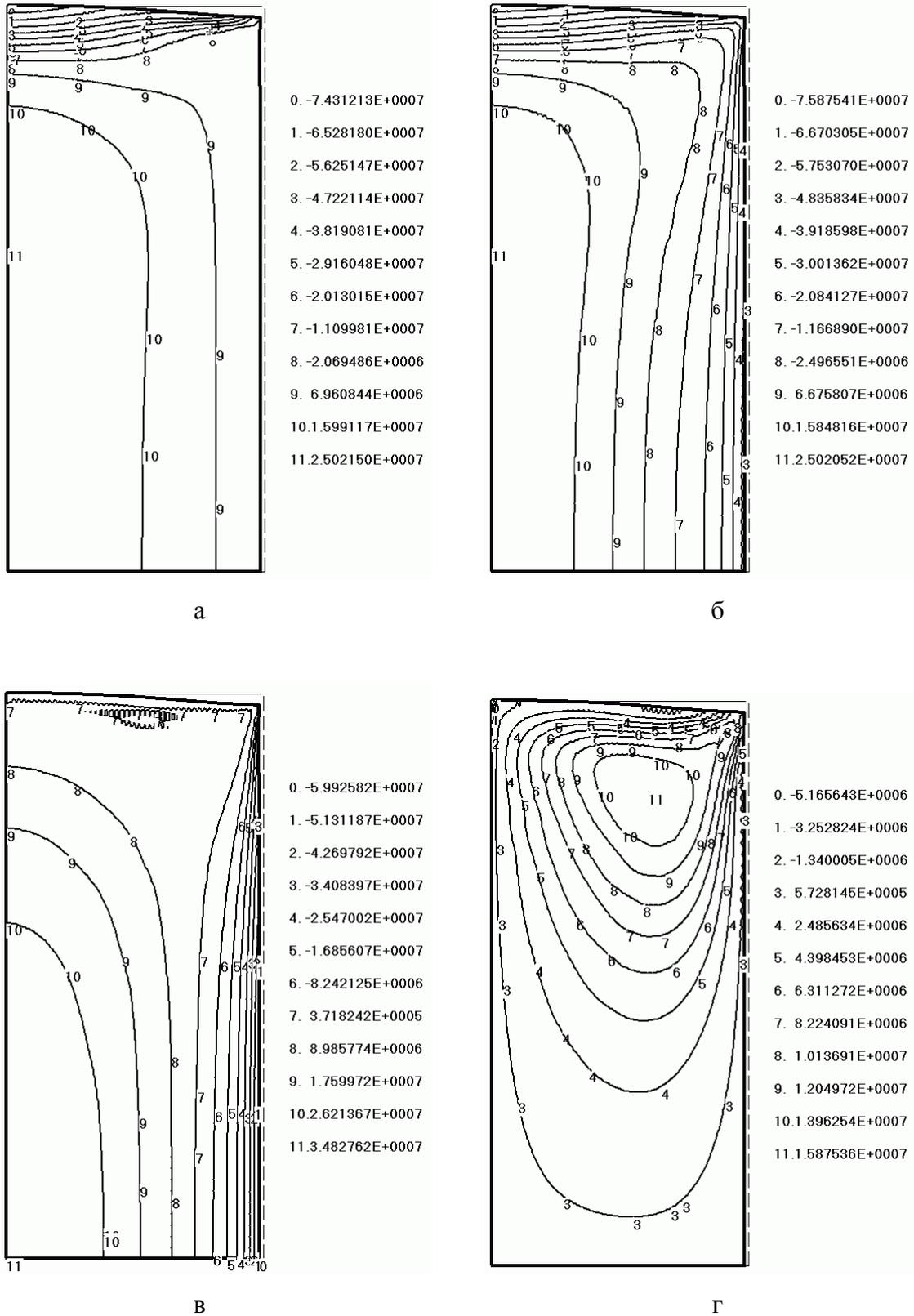


Рис. 1. Модель упругого приближения. Распределение остаточных напряжений (Па) в цилиндре из ЭДТ-10: а — σ_r ; б — σ_φ ; в — σ_z ; г — τ_{rz}

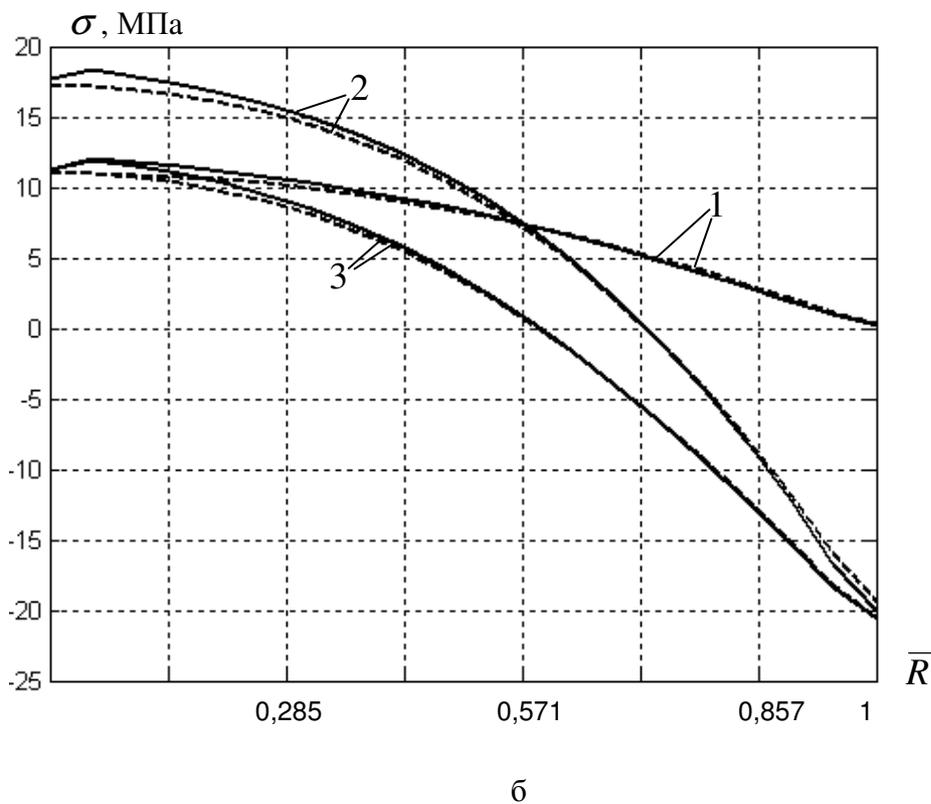
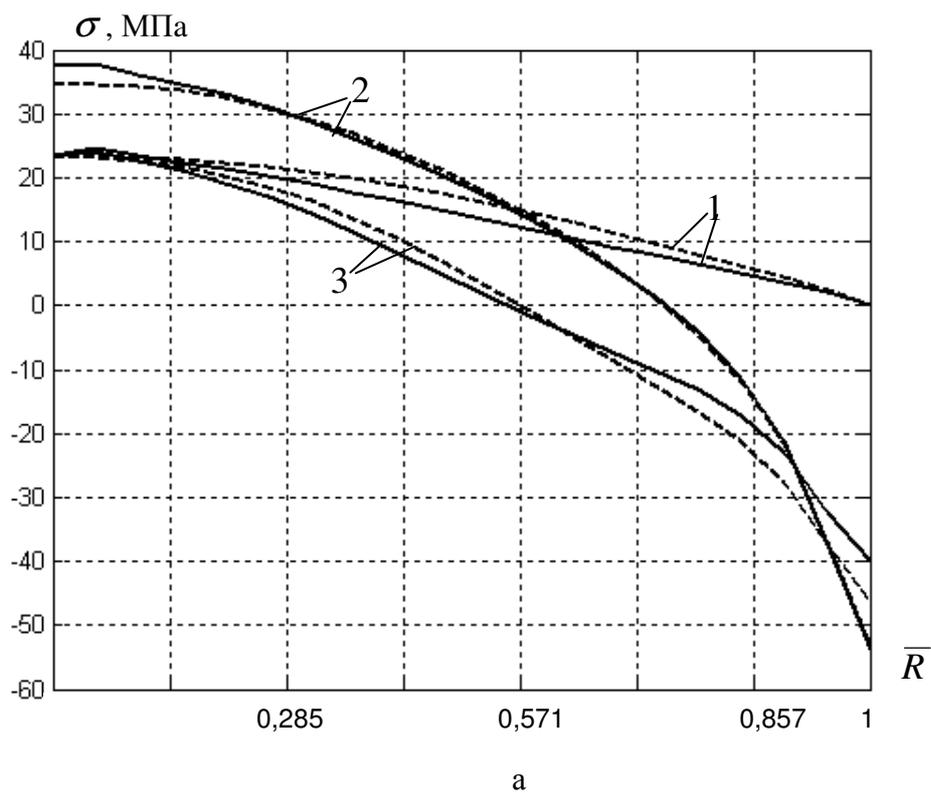


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений по радиусу в центральном сечении цилиндра:
 а — $\alpha_T = 500$ Дж/(м·К); б — 20 Дж/(м·К). Штриховые линии — расчет по модели упругого приближения, сплошные — с учетом вязкоупругости в стеклообразном состоянии. 1 — σ_r ; 2 — σ_z ; 3 — σ_φ

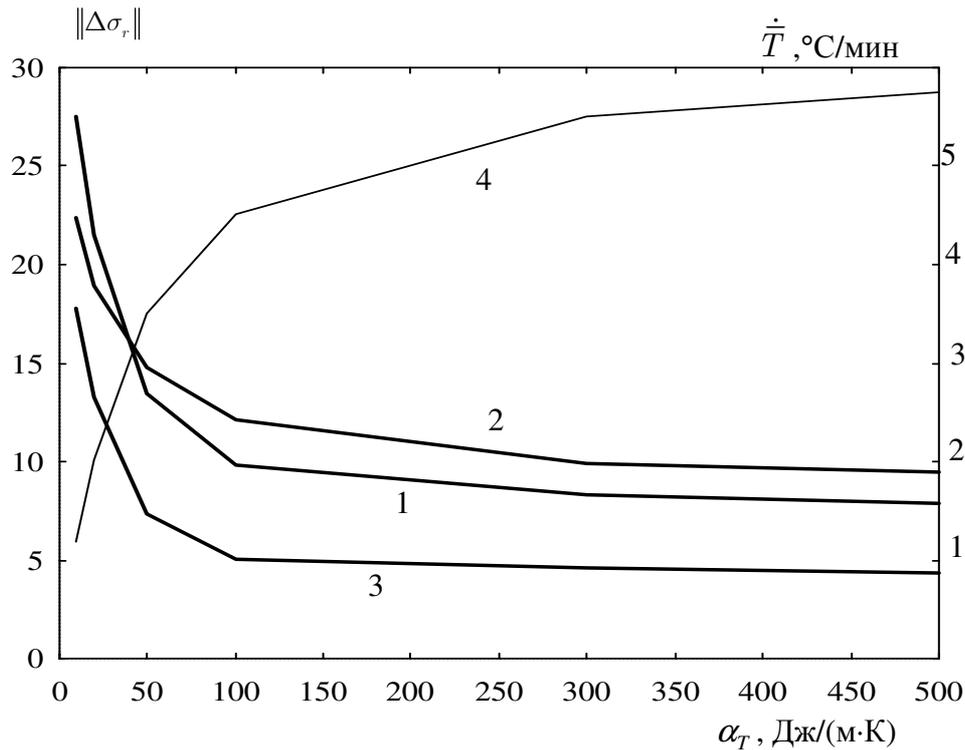


Рис. 3. Зависимость невязки по напряжениям и средней скорости остывания от коэффициента теплоотдачи:

$$1 - \|\Delta\sigma_r\|; 2 - \|\Delta\sigma_z\|; 3 - \|\Delta\sigma_\varphi\|; 4 - \dot{T}$$

Рисунок 3 иллюстрирует зависимости нормированной погрешности $\|\Delta\sigma_{ij}\| = \|\sigma_{ij}^{(4)} - \sigma_{ij}^{(2)}\|_{L_2} / \|\sigma_{ij}^{(4)}\|_{L_2} \cdot 100\%$ и средней скорости охлаждения $\dot{T} = \bar{T}(t^*)/t^*$, ($\|\sigma_{ij}^{(k)}\|_{L_2}$ — среднеквадратичная по объему норма компонента тензора напряжений, вычисленного по k -той модели) от коэффициента теплоотдачи α_T . Из рисунка видно, что для данных параметров задачи допустимо с инженерной точностью применение упрощенной физической модели в диапазоне средних скоростей охлаждения выше 4...4,5°C/мин, что соответствует $\alpha_T > 75...100$ Дж/(м·К).

5. Адаптация определяющих соотношений к пакету ANSYS

В настоящее время широкое применение для прочностных, тепловых и газогидродинамических расчетов получил конечно-элементный пакет ANSYS [7]. Данный программный продукт предоставляет исследователю большой набор физических моделей, возможность учета геометрической нелинейности (большие деформации и перемещения), более 200 различных типов элементов. Несомненным преимуществом при работе в ANSYS является простота построения конечно-элементных сеток любой размерности, независимо от степени сложности исходной геометрии рассматриваемой конструкции, а также возможность создания пользовательских процедур и функций (User Subroutines) на языке FORTRAN с последующей компиляцией их в исполняемый файл ANSYS.exe.

За основу бралась процедура UsrViscEl, используемая совместно с квадратичным элементом Visco88.

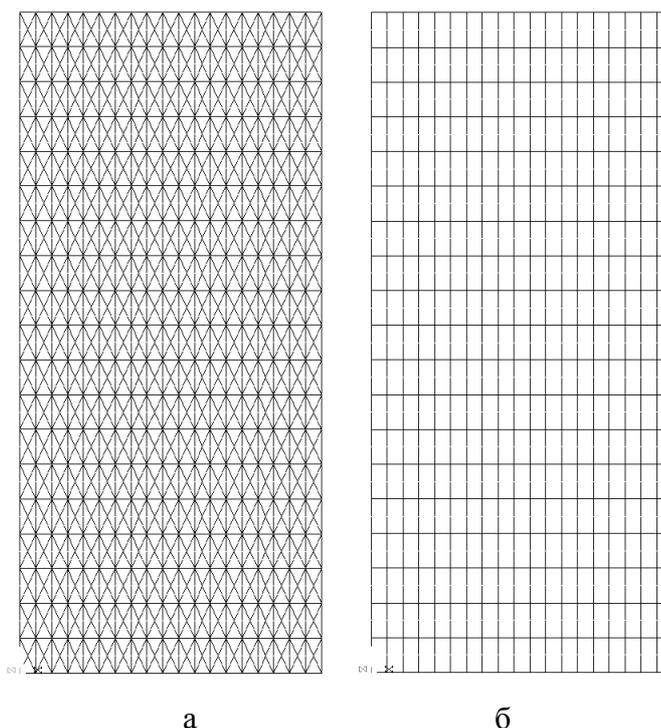


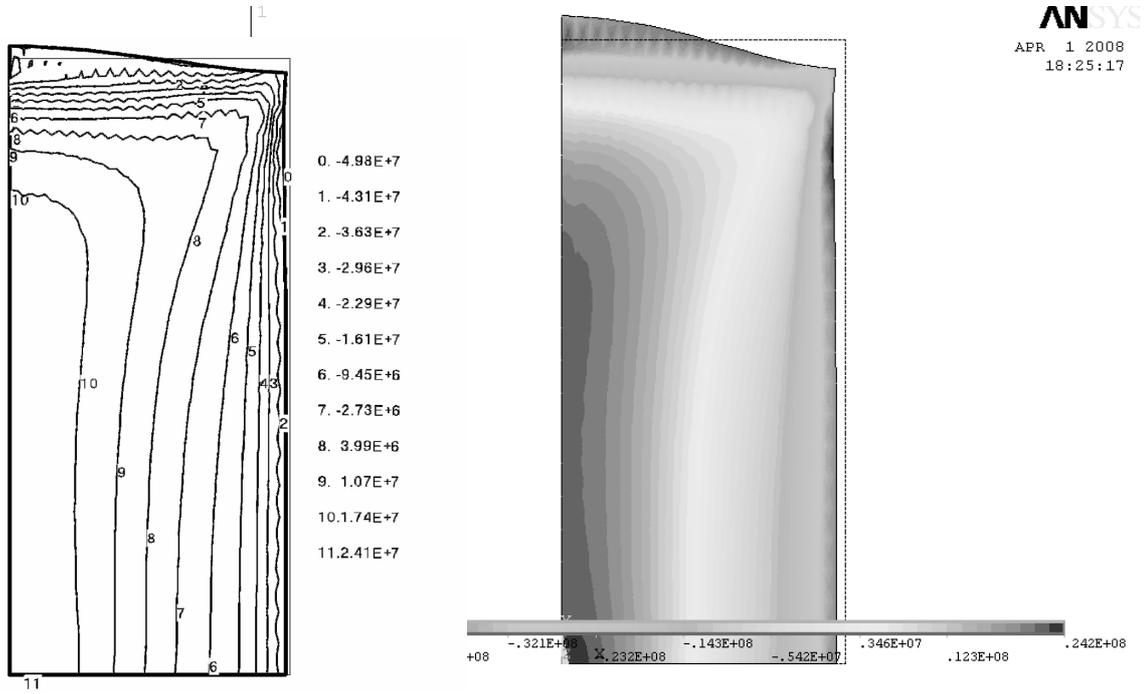
Рис. 4. Конечно-элементная сетка:
а — треугольные элементы (Delphi, ANSYS); б — четырехугольные (ANSYS)

Свойства вязкоупругого материала задавались командой TB, EVISC. Модель содержала 95 констант, большинство из которых — материальные характеристики вязкоупругой среды. При этом константа $C5 = 20$ указывала на пользовательскую процедуру описания вязкоупругого поведения.

При расчете полагалось, что коэффициент объемного сжатия остается постоянным (отсутствует объемная релаксация). Для описания сдвиговой релаксации застеклованного материала использовались данные из приведенной выше таблицы (константы $C51-C70$). Температурно-временная аналогия (материал считался терморологически простым) вводилась с применением функции Вильямса-Ланделла-Ферри (константы $C1-C2$). Параметры модели функции стеклования Лапласа вводились в качестве констант $C76-C77$.

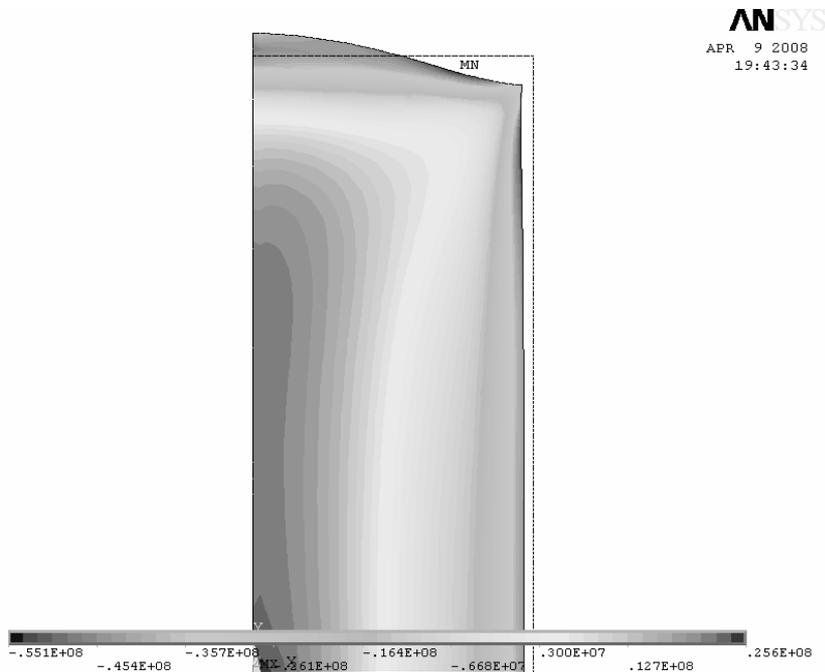
С использованием приведенной расчетной схемы решена задача об охлаждении короткого сплошного цилиндра из эпоксидной смолы ЭДТ-10 (см. раздел 4). Предварительно решена нестационарная температурная задача с использованием элемента PLANE77.

Результаты решения представлены на рисунках 5-7. Для сравнения на рисунке 5, а приведено решение, полученное с использованием собственной программы, написанной в среде Delphi. В этом варианте решения применялись изопараметрические шести-узловые элементы с квадратичной аппроксимацией неизвестных (соответствующая сетка показана на рисунке 4, а). Задача в среде ANSYS решалась с использованием как треугольной (Рис. 4, а), так и четырехугольной восьми-узловой (Рис. 4, б) модификации элемента Visco88. Из приведенных на рисунке 5 результатов видно, что решения в Delphi и ANSYS на треугольной сетке практически совпадают (Рис. 5, а, б). При этом в обоих случаях наблюдаются осцилляции на линиях равного уровня напряжений, что, по-видимому, связано с особенностями топологии треугольных элементов. Результат на четырехугольной сетке — более гладкий (Рис. 5, в). Экстремальные значения компонентов напряжений в данном варианте расчета в среднем на 5...7% превышают аналогичные данные на треугольной сетке.



а

б



в

Рис. 5. Остаточные напряжения σ_φ , Па: а — расчет по программе на Delphi; б — расчет в ANSYS, треугольные элементы; в — расчет в ANSYS, четырехугольные элементы

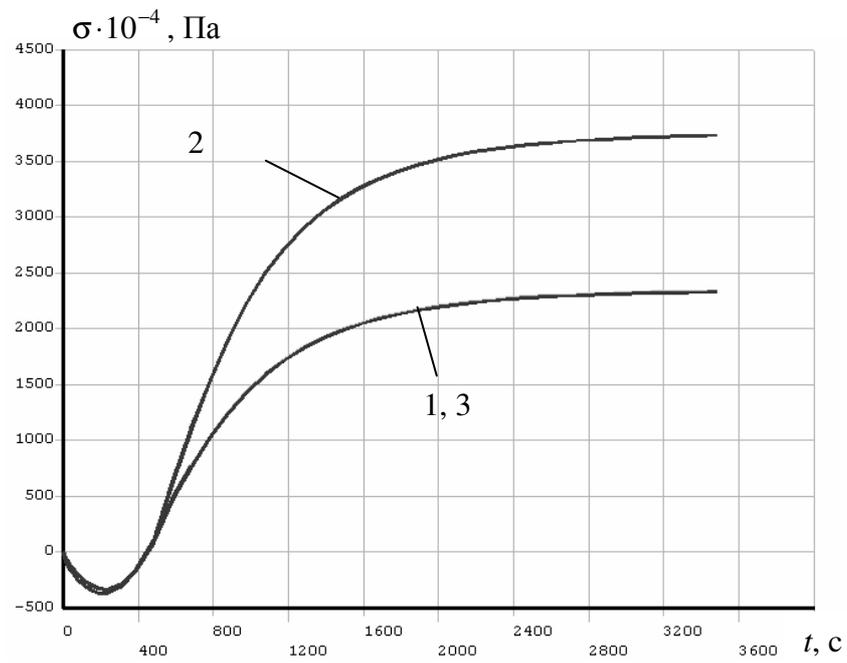


Рис. 6. Изменение напряжений в центральной точке цилиндра во времени (расчет в ANSYS):
1 — σ_r ; 2 — σ_z ; 3 — σ_φ

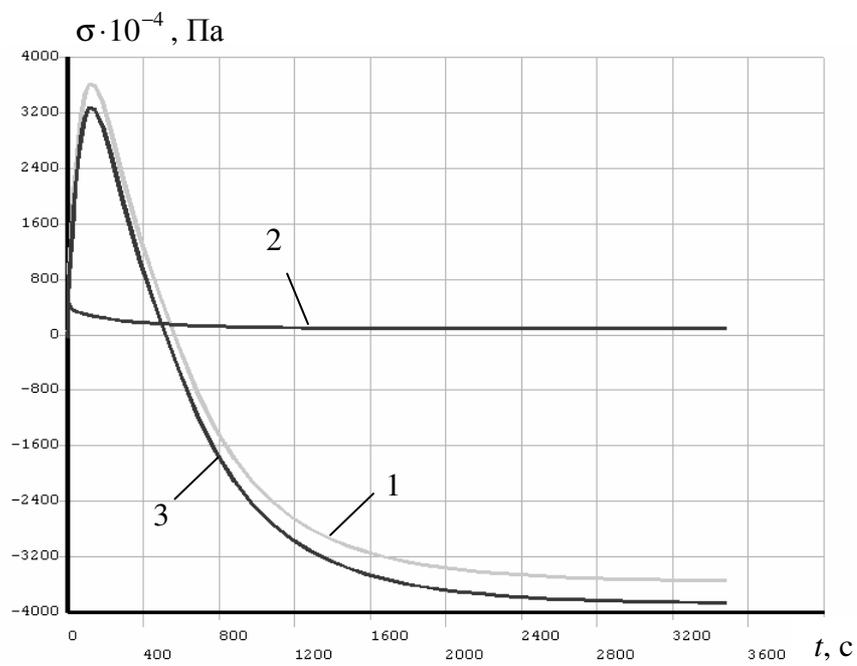


Рис. 7. Изменение напряжений в центре торцевой поверхности цилиндра во времени (расчет в ANSYS):
1 — σ_r ; 2 — σ_z ; 3 — σ_φ

На рисунке 6 показано изменение напряжений в центре цилиндра. В течение 200 секунд материал испытывает возрастающее сжатие за счет охлаждения наружных слоев. В дальнейшем напряжения постепенно снижаются до 0 ($t = 420$ с) и становятся растягивающими, причем их уровень непрерывно возрастает до конца охлаждения ($t = 3500$ с). Напряжения σ_r , σ_ϕ на торцевой поверхности цилиндра (Рис. 7), наоборот, вначале являются положительными, а впоследствии переходят в область сжимающих напряжений. Отклонение от нулевого значения нормального напряжения σ_z иллюстрирует погрешность расчета в выполнении естественного граничного условия, которая в разные моменты времени составляет величину от 9 до 2% относительно максимального значения напряжений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-96009-р_Урал_а).

Литература

1. *Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Определяющие соотношения термомеханического поведения полимерных материалов в условиях стеклования и размягчения // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 3. – С.106-114.
2. *Сметанников О.Ю.* Об одной модели термомеханического поведения полимерных материалов с релаксационным переходом // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия – 2007. – № 9/1 (59). – С. 216–231
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
4. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы теории теплопроводности. Ч.2. – М.: Высшая школа, 1982. – 304 с.
5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
6. *Уржумцев Ю.С.* Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. – М.: Наука, 1982. – 222 с.
7. Интернет-сайт: <http://ansys.com/products/multiphysics.asp>