

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТОКСА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА

В.В. Пак

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, 690041, Россия.

В вариационной постановке решение уравнений Стокса сводится к минимизации функционала полной энергии на пространстве соленоидальных полей. В настоящей работе предлагается метод конечных элементов в сочетании с методом проекции градиента, позволяющий получить приближенное решение этой задачи путем безусловной минимизации квадратичного функционала в пространстве пониженной размерности, который ранее не использовался для решения задач подобного типа. Приводятся результаты численного решения ряда тестовых задач со свободной границей, показывающие преимущества разработанного метода по сравнению с методами штрафной функции и функции Лагранжа по точности, устойчивости и быстродействию.

NUMERICAL SOLUTION OF THE STOKES PROBLEM UNDER FREE BOUNDARY BY THE MODIFIED PROJECTION GRADIENT METHOD

V.V. Pak

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute FEB RAS, Vladivostok, 690041, Russia

From a variational standpoint, the solution of Stokes equation is reduced to the constrained minimization of the total energy functional over the space of solenoidal fields. The paper presents the finite element method combined with the gradient projection method to obtain the approximate solution of this problem by the unconstrained minimization of the quadratic functional with a reduced number of unknown variables, which has not been previously used for solving such a problem. The numerical solutions of a few test free boundary problems are presented to reveal the advantages of the developed method over the penalty and Lagrangian methods with respect to the accuracy, stability, and computer speed.

Введение

Модели стоксовых (ползущих) течений со свободной границей (границей, на которой задаются условия отсутствия внешних сил) находят широкое применение в геофизике для исследования движения ледников [12], всплывания легких плюмов в недрах Земли [14], роста соляных куполов (имеющее важное значение для поиска нефти и газа) [16] и т.д. Однако численное решение уравнений Стокса, описывающих подобные течения с достаточной степенью точности, имеет ряд принципиальных трудностей. Одна из них заключается в том, что в большинстве разработанных методов условие несжимаемости выполняется приближенно [3, 9], что может приводить к существенным искажениям искомого решения. Как показано в [16], эта погрешность особенно проявляется в задачах со свободной границей: в процессе решения жидкость будет непрерывно сжиматься к нулевому объему при постоянном приложении даже малейших гидростатических напряжений.

Один из способов решения указанной проблемы заключается в сведении задачи к бигармоническому уравнению относительно функции тока. Например, в работах [4, 16]

предлагаются эффективные алгоритмы численного решения бигармонического уравнения, в которых в качестве базисных функций используются бикубические сплайны. Однако при наличии свободной границы вариационное уравнение включает поверхностный интеграл, содержащий производные третьего порядка, что приводит к нарушению симметрии функционала и значительным искажениям искомого решения. Кроме того, эти алгоритмы не переносятся на регулярную сетку, матрица жесткости получается достаточно заполненной, а аппроксимирующие функции не выражаются непосредственно через узловые значения.

При решении задачи Стокса в естественных переменных методом конечных элементов (МКЭ) необходимо минимизировать квадратичный функционал на подпространстве, определенном системой ограничений, являющихся дискретной формой условия несжимаемости [3, 10]. Размерность этой задачи на достаточно подробной расчетной сетке может достигать значительных величин. Одним из наиболее распространенных является метод штрафной функции, который достаточно прост, универсален и программно легко реализуем [11]. В этом случае задача Стокса сводится к уравнениям Ламе с коэффициентом Пуассона, близким к 0,5 [9]. Однако его основным недостатком является низкая точность. В работе [16] приводится пример численного расчета при малом значении коэффициента штрафа, в котором изменение объема достигает 40%. При большом коэффициенте матрица жесткости получается плохо обусловленной.

За последние годы разработано несколько эффективных модификаций данного метода с использованием функции Лагранжа [13, 15]. Как показывают практические расчеты, хорошая сходимости может быть получена при умеренных значениях коэффициента штрафа. Однако за счет двойственных переменных значительно увеличивается размерность дискретной задачи и время ее решения, так как необходимо многократно применять процедуру безусловной минимизации.

В настоящей работе для решения задачи Стокса предлагается МКЭ в сочетании с методом проекции градиента, сводящий задачу условной оптимизации к безусловной минимизации в пространстве пониженной размерности, который ранее не использовался для решения задач подобного типа. С помощью предлагаемого метода выполнен ряд численных расчетов и проведен сравнительный анализ с методом штрафной функции, наглядно показавший его преимущества по точности и быстродействию. Применение метода при моделировании процесса миграции магмы под разломной зоной [7, 8] подтвердило его хорошую работоспособность.

Система уравнений. Вариационная постановка задачи

Рассмотрим область D с границей Γ , заполненную вязкой несжимаемой жидкостью в поле силы тяжести. Медленное (ползущее) течение жидкости достаточно хорошо описывается уравнениями Стокса [9]:

$$\left[\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \right]_{,i} - p_{,i} - \rho g \delta_{i2} = 0, \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0, \quad (2)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; g — ускорение силы тяжести; μ — коэффициент вязкости жидкости; ρ — плотность жидкости; u_i — компоненты скорости; p — давление.

Пусть Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. На части Γ_1 задано условие полного прилипания

$$u_i = 0, \quad (3)$$

а на Γ_2 — условие свободной границы (отсутствия внешних сил)

$$\left[-p \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] n_j = 0, \quad (4)$$

где n_j — направляющие косинусы нормали к границе Γ_2 .

Перейдем к эквивалентной вариационной формулировке уравнений движения [9], которая позволит рассмотреть в рамках единого подхода гладкое и разрывное распределения вязкости и плотности, а также решить проблемы, связанные с потерей гладкости искомых функций на границах разрыва. Для этого умножим скалярно уравнения (1) на соленоидальное поле (v_1, v_2) и преобразуем по формуле Остроградского-Гаусса. Используя симметричность тензора деформаций и краевые условия (3), (4), получим:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{v}) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \iint_D \mu(u_{i,j} + u_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i}) dx$ — мощность внутренних напряжений;

$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\iint_D \rho g v_2 dx$ — работа внешних сил.

Так как оператор $\mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ симметричный и положительно определенный, решение краевой задачи (1) существует и единственно [9]. Оно является минимумом функционала $\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ на пространстве функций, удовлетворяющих условию несжимаемости (2).

Описание метода

Численное решение задачи Стокса определяем МКЭ. Пусть $\varphi_i, i = \overline{1, N}$ — система базисных функций. Приближенное решение находим в виде:

$$\tilde{u}_i = \sum_{k=1}^N u_i^k \varphi_k, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (6)$$

где u_i^k — узловые значения искомой функции.

Подставляя (6) в (5), получаем задачу минимизации квадратичного функционала

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = (\mathbf{C}_1 \mathbf{q}, \mathbf{q}) - (\mathbf{F}_1, \mathbf{q}) \quad (7)$$

с линейными ограничениями типа равенств

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

где $\mathbf{q} = [q_i]$ — вектор размерности $2N$, компонентами которого являются узловые значения искомого поля скоростей $q_{2k-1} = u_1^k$, $q_{2k} = u_2^k$; \mathbf{C}_1 — симметричная положительно определенная матрица жесткости $2N \times 2N$; \mathbf{F}_1 — вектор-градиент размерности $2N$; $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ — матрица $M \times 2N$ с элементами

$$a_{j2k-1} = \iint_{\Delta_i} \varphi_{k,1} dx_1 dx_2, \quad a_{j2k} = \iint_{\Delta_i} \varphi_{k,2} dx_1 dx_2, \quad j = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N};$$

Δ_i — треугольные элементы.

Система (8) является дискретным аналогом условия несжимаемости (2).

Для решения задачи условной минимизации (7), (8) используем метод проекции градиента [2], суть которого заключается в следующем.

Пусть первые M столбцов матрицы \mathbf{A} являются базисными (в противном случае этого можно легко достичь соответствующей перестановкой столбцов). Если в структуре \mathbf{A} и \mathbf{q} явно выделить базисный минор \mathbf{A}_1 и соответствующий ему вектор \mathbf{q}_1 из первых M компонент \mathbf{q}

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2], \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix},$$

то получим систему ограничений в форме $\mathbf{A}_1 \mathbf{q}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$, которую можно явно решить относительно \mathbf{q}_1 :

$$\mathbf{q}_1 = -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{q}_2. \quad (9)$$

Подставив (9) в минимизируемый функционал (7), вычисляя его частные производные по компонентам вектора \mathbf{q}_2 и приравнявая их к нулю, получим систему линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_2^T (\mathbf{A}_1^T)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_2^T (\mathbf{A}_1^T)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}, \quad (10)$$

где T — оператор транспонирования; $\mathbf{0}$ и \mathbf{I} — нулевая и единичная матрицы размерности $2N$.

Таким образом, задачу сводим к решению линейной системы (10) размерности $2N - M$, левая часть которой является проекцией градиента функционала (7) на подпространство вектора \mathbf{q}_2 .

Несмотря на внешнюю простоту, применение этого метода для решения задач большой размерности весьма затруднительно. Это связано с определением базисного минора \mathbf{A}_1 и необходимостью его обращения: хотя \mathbf{A}_1 является разреженной, в большинстве случаев, обратная матрица получается заполненной. Однако, используя структурные особенности матриц \mathbf{C}_1 и \mathbf{A} , можно обойти указанные затруднения. Покажем это на примере

кусочно-квадратичных функций, у которых узловые точки расположены в вершинах и на серединах ребер.

Рассмотрим треугольный элемент Δ_i . Обозначим через $i_{2k-1}, i_{2k}, k = \overline{1,3}$ номера узлов, расположенных соответственно в вершинах и на серединах сторон элемента. Используя формулу Остроградского-Гаусса, преобразуем двойной интеграл в поверхностный

$$\iint_{\Delta_i} \tilde{u}_{i,i} dx_1 dx_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_{ik}} (\tilde{u}_1 n_1^{i_{2k}} + \tilde{u}_2 n_2^{i_{2k}}) d\Gamma = \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_{ik}} \left[\sum_{l=2k-1}^{l=2k+1} \varphi_l (u_1^l n_1^{i_{2k}} + u_2^l n_2^{i_{2k}}) \right] d\Gamma = 0,$$

где $\Gamma_{ik}, k = \overline{1,3}$ — стороны треугольного элемента Δ_i , а $n_1^{i_{2k}}, n_2^{i_{2k}}, k = \overline{1,3}$ — направляющие косинусы нормали к серединам сторон элемента.

Введем сеточную функцию S^i , определенную в вершинах расчетной сетки и удовлетворяющую равенствам:

$$S^{i_{2k+1}} - S^{i_{2k-1}} = \int_{\Gamma_{ik}} \left[\sum_{l=2k-1}^{l=2k+1} \varphi_l (u_1^l n_1^{i_{2k}} + u_2^l n_2^{i_{2k}}) \right] d\Gamma, \quad k = \overline{1,3}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что S^i является дискретным аналогом функции тока. Для узловых значений на серединах ребер треугольных элементов перейдем от горизонтальной и вертикальной составляющих скорости к нормальной и касательной:

$$u_n^{i_{2k}} = u_1^{i_{2k}} n_1^{i_{2k}} + u_2^{i_{2k}} n_2^{i_{2k}}, \quad u_\tau^{i_{2k}} = -u_1^{i_{2k}} n_2^{i_{2k}} + u_2^{i_{2k}} n_1^{i_{2k}}, \quad k = \overline{1,3}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), разрешим систему относительно $u_n^{i_2}, u_n^{i_4}, u_n^{i_6}$:

$$u_n^{i_{2k}} = \frac{1}{\alpha_k^{i_{2k}}} \left[S^{i_{2k+1}} - S^{i_{2k-1}} - \sum_{l=1}^2 \alpha_k^{i_{2l-1}} (u_1^{i_{2l-1}} n_1^{i_{2k}} + u_2^{i_{2l-1}} n_2^{i_{2k}}) \right], \quad k = \overline{1,3}, \quad (13)$$

где $\alpha_k^{i_l} = \int_{\Gamma_{ik}} \varphi_l d\Gamma, \quad k = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,6}$.

Таким образом, получаем явное решение системы (8) относительно нормальных составляющих скорости для узлов на серединах ребер треугольных элементов, и при этом обратная матрица является разреженной.

Определим относительное уменьшение размерности преобразованной матрицы жесткости системы (10) по сравнению с C_1 (которую обозначим через α) для регулярной прямоугольной сетки $m \times n$, каждая ячейка которой разделена диагональю на два треугольных элемента. В этом случае $N = N_u + N_m$, где $N_u = mn$ — общее число узлов в вершинах треугольных элементов, а $N_m = (m-1)n + (2m-1)(n-1)$ — общее число узлов на серединах ребер. При переходе к дискретной функции тока добавляется N_u новых переменных и исключается N_m . Тогда для больших m и n получим для α :

$$\alpha = \frac{(m-1)n + (2m-1)(n-1) - mn}{2N} = \frac{2(m-1)n}{2(2m+1)(2n+1)} \approx \frac{1}{4}, \quad (14)$$

Таким образом, модифицированный метод проекции градиента позволяет свести задачу условной минимизации (7), (8) к безусловной минимизации на пространстве пониженной размерности с сохранением разреженной структуры матрицы жесткости для любых лагранжевых треугольных элементов, так как все они имеют хотя бы один узел интерполяции на каждом ребре расчетной сетки, за исключением линейных элементов, непригодных для аппроксимации соленоидальных полей [9].

Численные результаты

Численные результаты приводятся на рисунках 1–3, причем на рисунках 1–3, а представлены результаты, полученные модифицированным методом проекции градиента, а на рисунках 1–3, б — методом штрафной функции. Если обозначить через H, μ_0, ρ_0 масштабы длины вязкости, плотности и принять за масштабы давления и скорости величины $p_0 = \rho_0 g H$, $u_0 = \rho_0 g H^2 / \mu_0$, то вид уравнений Стокса в безразмерных переменных не изменится, так как при подстановке $\rho = \rho_0 \rho'$, $\mu = \mu_0 \mu'$, $x_i = H x'_i$, $u_i = u_0 u'_i$, $p = p_0 p'$ в (1), (2) все размерные параметры сокращаются. Поэтому для удобства расчеты выполнялись в безразмерных величинах: $H' = 1$, $\rho' = 1$, $\mu' = 1$.

1. Тестовый пример (Рис. 1)

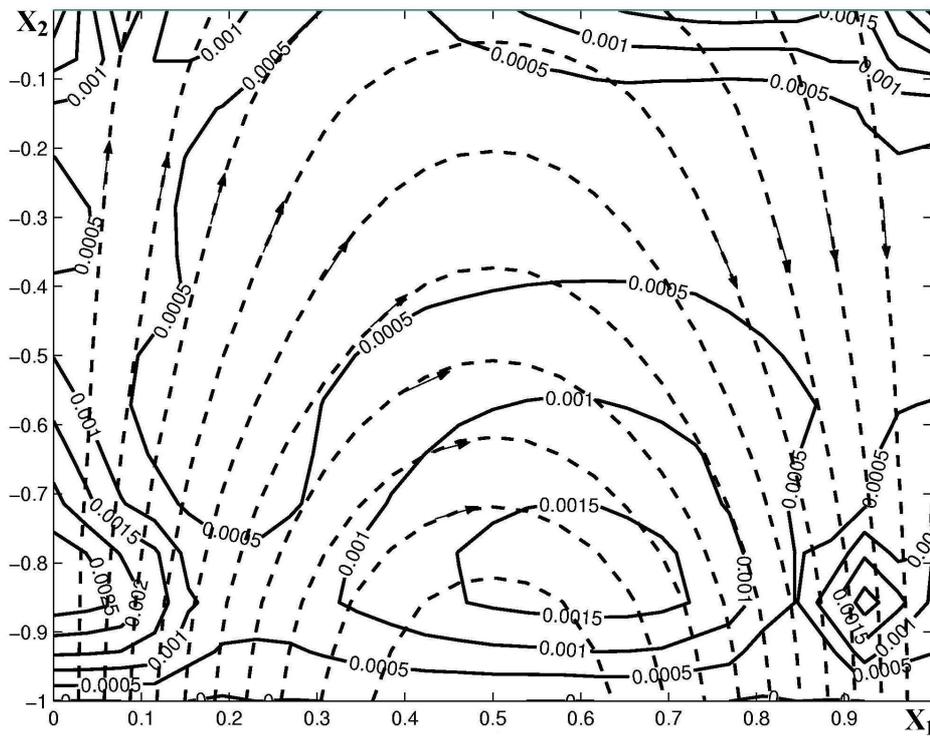
В качестве тестового примера выполнен численный расчет при следующих условиях.

Верхняя граница является свободной, боковые границы — гладкие неподвижные стенки, а на нижней границе задаются скорости $u_1 = 0$, $u_2 = \cos \pi x$. Для получения точного аналитического решения этой задачи используется метод Фурье (см., например, работы [1, 6]):

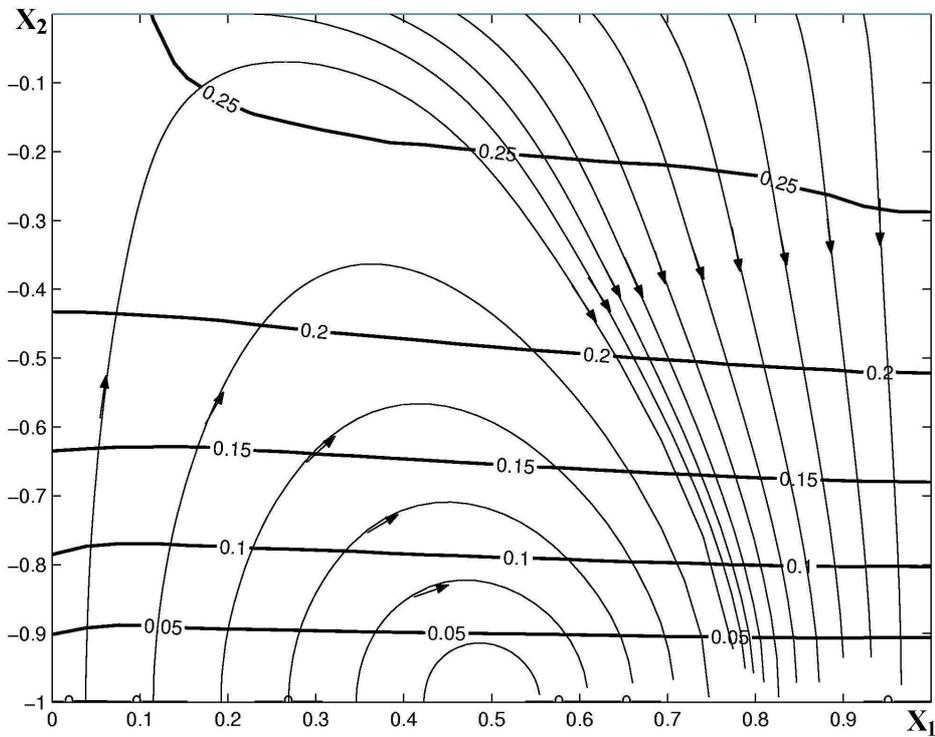
$$u_1(x, y) = -\sin \pi x \left[\operatorname{sh} \pi y - \frac{\pi - \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi}{\pi^2 + \operatorname{ch}^2 \pi} \pi y \operatorname{sh} \pi y - \frac{\operatorname{ch}^2 \pi}{\pi^2 + \operatorname{ch}^2 \pi} (\operatorname{sh} \pi y + \pi y \operatorname{ch} \pi y) \right],$$

$$u_2(x, y) = \cos \pi x \left[\operatorname{ch} \pi y + \frac{\pi - \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi}{\pi^2 + \operatorname{ch}^2 \pi} (\operatorname{sh} \pi y - \pi y \operatorname{ch} \pi y) - \frac{\operatorname{ch}^2 \pi}{\pi^2 + \operatorname{ch}^2 \pi} \pi y \operatorname{sh} \pi y \right].$$

На рисунке 1, а приводится численное решение, полученное методом проекции градиента, на рисунке 1, б — методом штрафной функции с коэффициентом штрафа, равным 1 000. В изолиниях показан модуль невязки, в тонких изолиниях со стрелками показаны линии тока. Максимальное значение невязки решения методом проекции градиента равно 0,15%.

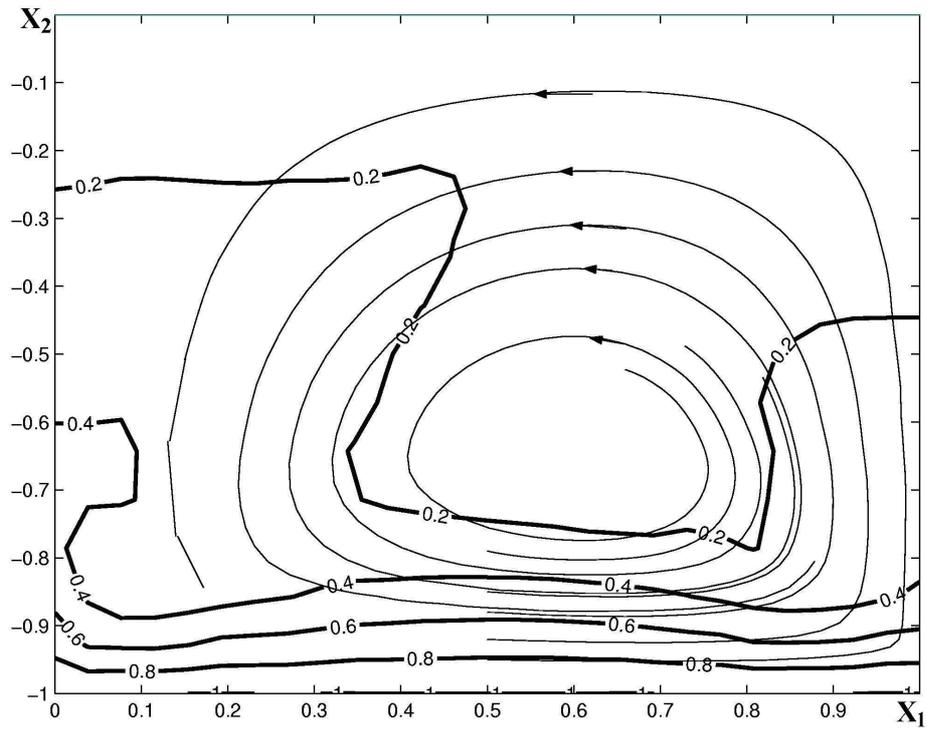


а

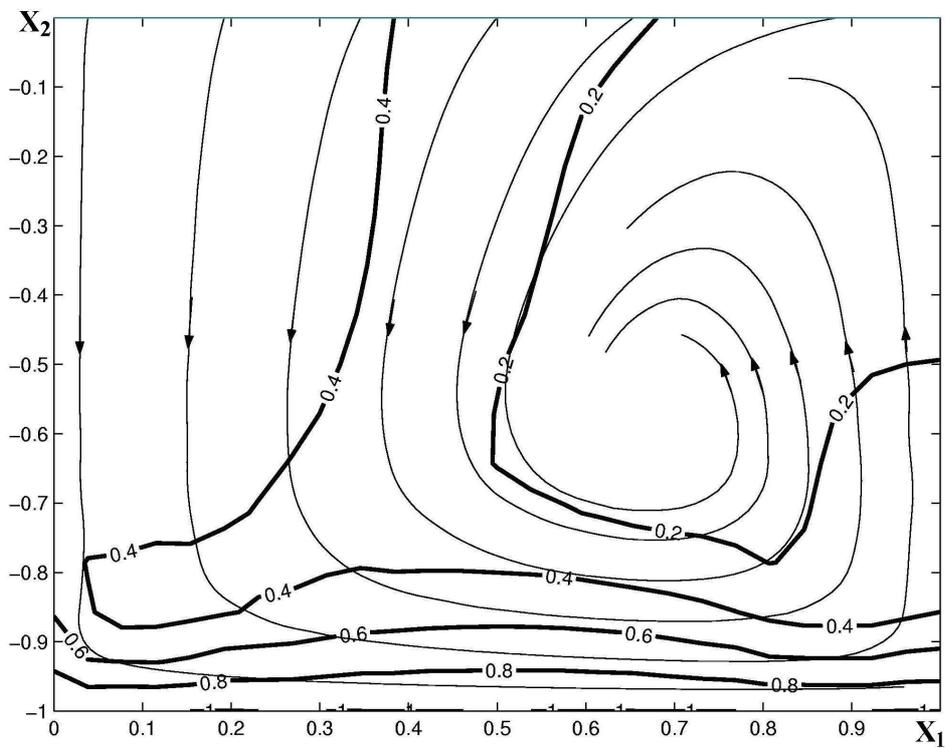


б

Рис.1. Тестовый пример

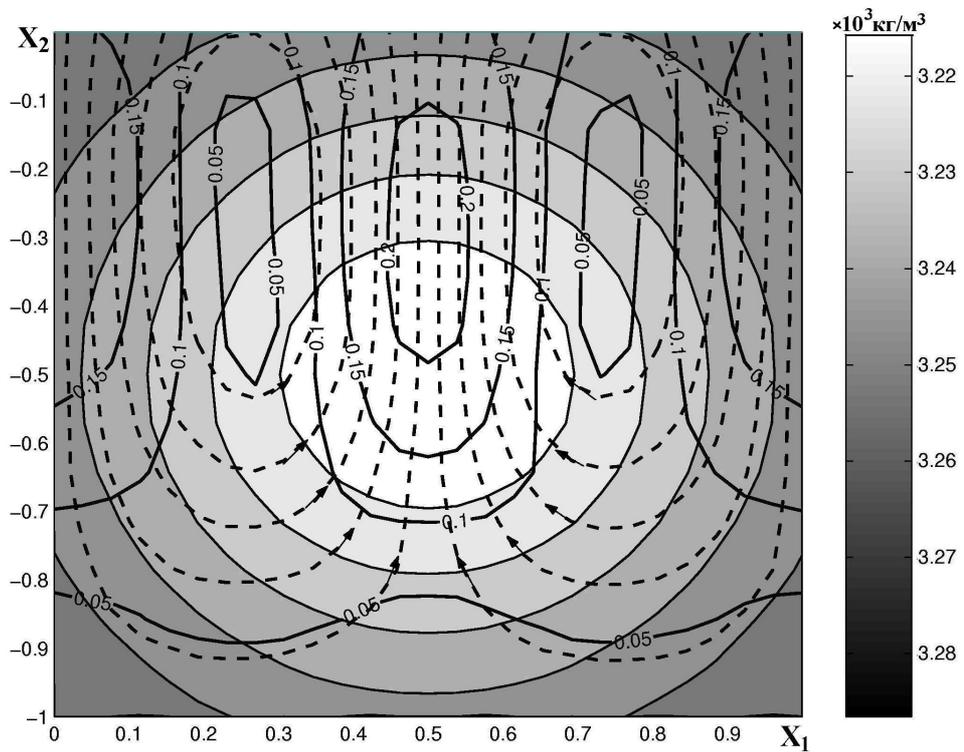


а

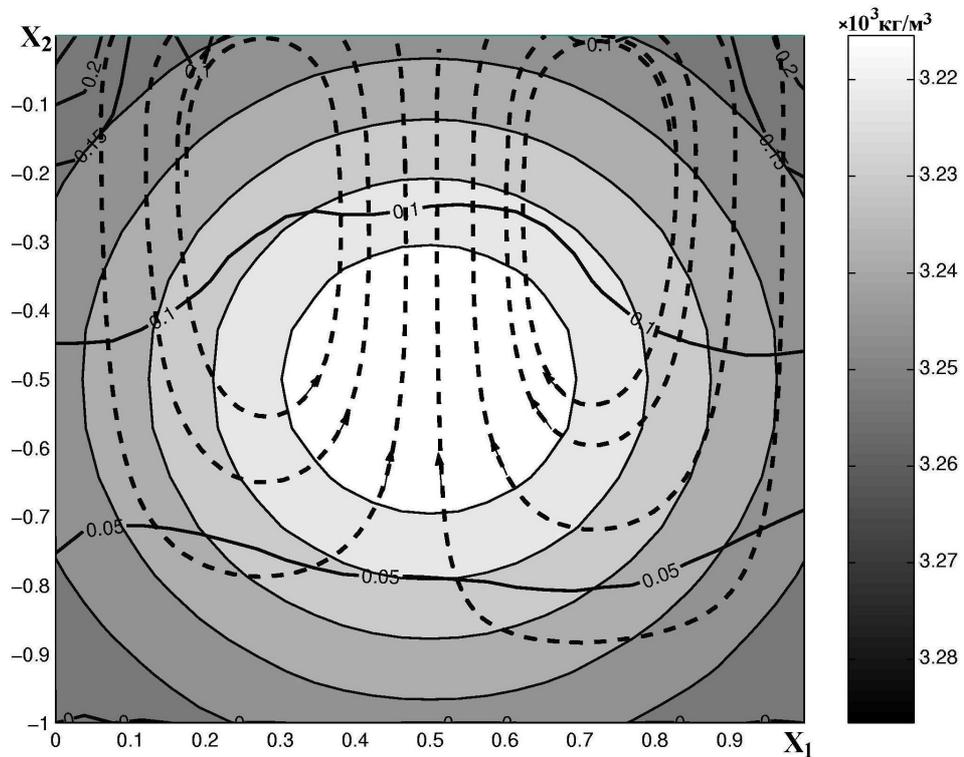


б

Рис.2. Течение в каверне



а



б

Рис.3. Всплытие легкой плотностной неоднородности в области со свободной верхней границей

Области ее наибольших значений расположены в окрестности угловых точек расчетной области. Для метода штрафной функции невязка составляет 25%, и наибольшие значения располагаются в окрестности свободной границы. В решении, полученном методом штрафной функции, наблюдается отсутствие симметрии, тогда как для решения методом проекции градиента получена симметрия с хорошей точностью.

2. Течение в каверне (Рис. 2)

Расчет проводился при условиях, заданных в [9], с той лишь разницей, что горизонтальная составляющая скорости движения задавалась не на верхней, а на нижней границе. В этом примере коэффициент штрафа задавался равным 10 000. Максимальное значение невязки решений равнялось 15% и располагалось в окрестности правого нижнего угла. В решении, полученном методом штрафной функции наблюдается значительное смещение центра вихря вправо, тогда как для решения методом проекции градиента это смещение незначительно и результат достаточно хорошо совпадает с численным решением из [9], полученным методом модифицированной функции Лагранжа за 20 итераций по двойственным переменным.

3. Всплывание легкой плотностной неоднородности в области со свободной верхней границей (Рис. 3)

Эта задача представляет интерес для геофизики при изучении движения легких плюмов в недрах Земли [14]. В данном примере плотность и вязкость неоднородны, поэтому дополнительно решались уравнения переноса для плотности и вязкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\rho u_k)_{,k}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = -(\mu u_k)_{,k}. \quad (15)$$

Для численного решения (15) использована абсолютно устойчивая схема покомпонентного расщепления второго порядка точности [5].

На рисунках 3, а, б приводятся результаты расчетов для одной итерации по времени. Неоднородность имеет круглую форму и показана на графике цветом. Максимальная разность плотностей составляла $0,03 \text{ г/см}^3$, а вязкость задавалась равной 10^{22} пуаз. Эти значения выбирались из геологических параметров мантии Земли. Коэффициент штрафа равнялся 100 000, так как при значении 10 000 получилась очень большая погрешность. Из расчетов следует, что максимальное значение невязки решений равно 13% и располагается в окрестности свободной границы. Максимальная скорость всплывания равняется 0,2 см/год.

Анализ результатов

Как видно из численных результатов, слабая сжимаемость вызывает существенное искажение численного решения. В вариантах с каверной (Рис. 2) и всплыванием круглой неоднородности (Рис. 3) решение искажается в областях с наибольшими деформациями сжатия. В тестовом примере в решении, полученном методом штрафной функции, нарушается симметрия (Рис. 1, б), то есть центр образовавшегося вихря смещается вправо. Этот эффект наблюдается и в результатах численного решения методом функции Лагранжа,

который приводится в работе [9]. В решении модифицированным методом проекции градиента симметрия выполняется с хорошей точностью (Рис. 1, а).

Такие искажения значительно возрастают при решении задачи со свободной границей. Это связано с тем, что на решение накладывается эффект сжимаемости жидкости под действием гравитационных сил. Поэтому максимальная погрешность решения получается вблизи свободной поверхности. Для получения удовлетворительной точности требуется значительное увеличение коэффициент штрафа.

На практике для устранения этих искажений, обычно, предполагают, что плотность является слабо возмущенной $\rho(x, y) = \rho_0 + \delta\rho(x, y)$, и по формуле Остроградского-Гаусса исключают ρ_0 из интеграла работы силы тяжести:

$$\iint_{D_1} \rho_0 g v_2 dx = \iint_{D_1} (0 v_1 + \rho_0 g v_2) dx = \int_{\Gamma} \rho_0 g y v_i n_i ds - \iint_{D_1} \rho_0 v_{i,i} dx.$$

Так как поле скоростей соленоидально, в правой части равенства второй интеграл равен нулю, однако поверхностный интеграл обращается в нуль только при неподвижных границах расчетной области. Таким образом, этот прием не пригоден для задач со свободной границей.

Использование разработанного метода для численного решения задачи о миграции магмы под разломной зоной подтвердило его высокую эффективность [7, 8].

Заключение

Разработан модифицированный метод конечных элементов в сочетании с методом проекции градиента для расчета стоксовых течений вязкой жидкости со свободной границей, который сводит задачу Стокса к безусловной минимизации на пространстве пониженной размерности с сохранением разреженной структуры матрицы жесткости. Предлагаемый метод позволяет получить численное решение с выполнением условия соленоидальности с высокой точностью.

Получены численные результаты расчета стоксовых течений разработанным методом и методом штрафной функции. Проводится их сравнение и анализируются причины появления погрешности решения, характерные для методов штрафной функции и функции Лагранжа в задачах со свободной границей. Показывается принципиальная неустранимость эффекта сжимаемости жидкости в методе штрафной функции путем варьирования коэффициента штрафа и использования только вариации плотности. Результаты расчетов и сравнительный анализ подтверждают преимущества разработанного метода по сравнению с методами штрафной функции и функции Лагранжа по точности, устойчивости и быстродействию.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 14 «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий», раздел II «Высокопроизводительные вычисления и многопроцессорные системы».

Литература

1. Григорьев А.С., Шахмуралова З.Е. Теоретическое определение скоростей движения дневной поверхности при некоторых механизмах деформирования земной коры // Современные движения земной коры. – Тарту, 1973. – Вып. 5. – С. 595–603.
2. Данилин Ю.М. О минимизации функции в задачах с ограничениями типа равенств // Кибернетика. – 1971.

- № 2.– С. 88–95.
3. *Кобельков Г.М.* О сведении краевой задачи для бигармонического уравнения к задаче типа Стокса // Докл. АН СССР. – 1985.– Т. 283, № 1. – С. 539–542.
 4. *Малевский А.В.* Механика процесса образования астеносферного диапира // Численное моделирование и анализ геофизических процессов: Вычисл. сейсмология: вып. 20. – М.: Наука, 1987. – С. 52–60
 5. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – Новосибирск: Наука, 1978. – 536 с.
 6. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: ИЛ, 1954. – 863 с.
 7. *Пак В.В.* Численная модель двухфазной среды со слабосжимаемым скелетом и некоторые геофизические приложения // Дальневосточный математический журнал. – 2007.– Т. 7, № 1–2. – С. 79–90.
 8. *Пак В.В.* Многотемпературная модель компакция магматического расплава в астеносфере (Численный подход) // Физика Земли. – 2007. – № 9. – С. 79–86.
 9. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981.– 408 с.
 10. *Тимухин Г.И.* О построении некоторых схем приближенного решения уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости // Числ. методы механ. сплош. ср. – Новосибирск: Наука, 1972.– Т. 3, № 2. – С. 77–85.
 11. *Han, Hou-de.* An analysis of penalty nonconforming finite element method for Stokes equations // J. Comput. Math. – 1986. – V. 4, № 2. – P. 164–172.
 12. *Loewenherz D.S. and Lawrence C.J.,* The effect of viscosity stratification on the instability of a free surface flow at low Reynolds number // Phys. of fluids A 1. – 1989. – V. 10. – P. 1686 – 1693.
 13. *Lukas D, Dostal Z.* Optimal multigrid preconditioned semi-monotonic augmented Lagrangians applied to the Stokes problem // Numerical linear algebra with applications. – 2007. – V. 14, № 9. – P. 741–750.
 14. *Schmeling H.G., Alexander R., Marquari G.* Finite deformation in and around a fluid sphere moving through a viscous medium: implications for diapic ascent. // Tectonophysics. – 1988, – V. 149, № 1–2. – P. 17–34.
 15. *Wieners C.* Robust multigrid methods for nearly incompressible elasticity // Computing. – 2000. – V. 64, № 4. – P. 289–306.
 16. *Woidt W.D. Neugebauer H.J.* Finite element models of density instability by means of bicubic spline interpolation // Phys. Earth and Planet. Inter. – 1980. – V.21, № 2/3. – P. 176–180.