ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОБОБЩЕННЫМИ МЕТОДАМИ РУНГЕ — КУТТЫ

Ю.В. Немировский, А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН
Новосибирск, 630090, Россия

На основе обобщения методов Рунге — Кутты разработана оригинальная численная процедура интегрирования начально-краевых задач механики деформируемого твердого тела. Эффективность предложенного численного метода подтверждена многочисленными расчетами упругой и неупругой динамики однородных и композитных тонкостенных конструкций.

INTEGRATION OF DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS OF DEFORMABLE SOLIDS BY GENERALIZED RUNGE – KUTTA METHODS

Yu.V. Nemirovskii and A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS,
Novosibirsk, 630090, Russia

The original numerical procedure of integration of initial-boundary problems of mechanics of deformable solids is developed based on a generalization of Runge – Kutta methods. The efficiency of the proposed numerical method is confirmed by numerous calculations of the elastic and non-elastic dynamics of homogeneous and composite thin-walled structures.

Для анализа динамических процессов в задачах механики деформируемого твердого тела применяются различные методы интегрирования разрешающих систем уравнений. Выбор наиболее эффективного метода тесно связан с моделями поведения рассматриваемых элементов конструкций, идеализацией реальных свойств материала и типа внешних воздействий. Известные методы решения задач динамического деформирования твердых тел разделяются на точные и приближенные (аналитические и численные) методы. Аналитические методы интегрирования разработаны в основном для решения линейно-упругих [1, 2] или жесткопластических задач [3, 4], для тел простой конфигурации при некоторых ограничениях на вид внешних воздействий. Однако решение нелинейных задач динамики точными или приближенными (вариационными [5]) аналитическими методами наталкиваются на существенные трудности, поэтому широкое применение получили численные методы интегрирования.

Среди существующих в настоящее время численных методов интегрирования систем гиперболических уравнений, описывающих динамическое поведение, например, упругих тел, наиболее распространенными являются метод характеристик, метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и вариационно-разностные методы.

Метод характеристик [6] хорошо разработан для решения линейных и нелинейных одномерных задач о переходных волновых процессах в стержнях, цилиндрических и конических оболочках [7, 8]. Обобщение его на задачи динамики составных конструкций и многомерные задачи наталкивается на значительные трудности математического и алгоритмического характера [9].

Более универсальным методом решения задач динамического деформирования является МКР. Так как область определения в нестационарных задачах, кроме пространства, включает время, то методы численного решения на основе МКР предполагают дискретизацию определяющей системы уравнений и по этой переменной. Возможны два способа дискретизации: одновременное и последовательное пространственно-временное деление области интегрирования. При одновременном разбиении области определения [10] задача сводится к системе алгебраических уравнений, в которую входят неизвестные на всех временных слоях. Такой способ приводит к определенным трудностям (в частности, увеличивается объем хранимой информации, повышается вероятность зацикливания при решении жесткопластических задач методами линейного программирования и др.), которые ограничивают его применение на практике. Используемые до настоящего времени методы последовательной дискретизации базируются на разбиении области определения *в первую очередь по пространственным переменным*, сводя исходную задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени, для интегрирования которых применяются как явные, так и неявные разностные схемы. При решении прикладных задач динамического деформирования тонкостенных конструкций типа оболочек и пластин обычно используются явные трехслойные схемы типа «крест» второго порядка точности относительно шага по времени [9, 11]. Однако эффективность этого метода существенно снижается его условной устойчивостью, что приводит к необходимости использования шагов по времени на 3 … 4 порядка меньших характерного размера сетки по пространственным переменным [9]. Кроме того, недостатки схемы «крест» связаны с трудностями аппроксимации граничных условий и требованием постоянства шага по времени на всем временном промежутке интегрирования [9], что не позволяет без потери порядка точности гибко управлять этим шагом во временном интервале приложения, например, кратковременного высокоинтенсивного нагружения и после него — при движении конструкции по инерции.

Целью настоящего исследования является разработка на основе обобщенных методов Рунге — Кутты [12, 13] принципиально новых численных процедур решения начально-краевых динамических задач механики деформируемого твердого тела, которые базируются на последовательной дискретизации области определения сначала по времени, а затем по пространственным переменным, и лишены указанных недостатков схемы «крест».

В общем случае система N разрешающих уравнений движения деформируемого твердого тела в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{R}\mathbf{v}_{,t}+\mathbf{L}\left(\mathbf{v}_{,t}\right)=\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\alpha},\, t;\, \mathbf{v},\, \mathbf{u}\right)+\mathbf{D}\left(\mathbf{v},\, \mathbf{u}\right),\quad \mathbf{u}_{,t}=\mathbf{v}\left(\boldsymbol{\alpha},\, t\right), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}=\left\{u_1,\, u_2,\, ...,\, u_N\right\}^T;\quad \mathbf{v}=\left\{v_1,\, v_2,\, ...,\, v_N\right\}^T;\quad \mathbf{Q}=\left\{Q_1,\, Q_2,\, ...,\, Q_N\right\}^T;\\ &\boldsymbol{\alpha}=\left\{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3\right\}^T;\quad \mathbf{L}=\left\{L_1,\, L_2,\, ...,\, L_N\right\}^T;\quad \mathbf{D}=\left\{D_1,\, D_2,\, ...,\, D_N\right\}^T.\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь также приняты обозначения: $\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})$ — матрица $N\times N$ приведенных объемных плотностей; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — обобщенные перемещения и их скорости (в качестве обобщенных перемещений могут выступать и электрические потенциалы в задачах электроупругой динамики и т.п.); $\boldsymbol{\alpha}$, t — вектор пространственных координат и время соответственно; $\mathbf{Q}$ - матричный оператор (в частности, векторная функция), характеризующий обобщенные внешние распределенные массовые нагрузки, действующие на конструкцию, которые в общем случае могут зависеть от $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ (например, при магнитно-импульсном нагружении [11]), сюда же отнесены реакции вязкого, упругого или вязко-упругого основания (может быть использована модель типа Винклера, двух- или многопараметрическая модель основания [14] и др.), а также слагаемые, порожденные геометрической нелинейностью задачи (важной особенностью операторов Q_i $(1 \le i \le N)$ является то, что они не содержат производных по времени от неизвестных векторных функций $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и не порождают высших производных от этих функций в правой части уравнения (1) по пространственным переменным $\boldsymbol{\alpha}$); $\mathbf{D}$ — матричный дифференциальный оператор эллиптического типа, не содержащий производных по времени и содержащий высшие производные от $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ по переменным $\boldsymbol{\alpha}$ (может быть нелинейным, если рассматривается физически нелинейное поведение материала конструкции); $\mathbf{L}$ — линейный матричный дифференциальный оператор по переменным $\boldsymbol{\alpha}$, перестановочный с оператором дифференцирования по времени t (второе слагаемое в левой части (1) возникает, например, при учете инерции вращения поперечного сечения балок [15], подчиняющихся гипотезам Бернулли, а также кирхгофовских пластин и оболочек или при решении динамических задач электроупругости пьезоэлектрических оболочек [16]).

Индекс после запятой означает частное дифференцирование по времени t.

Для однозначного интегрирования системы (1) необходимы начальные

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}, t_0) = \mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha}), \tag{3}$$

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}, t_0) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha}) \tag{4}$$

и граничные условия. Конкретный вид граничных условий, которые для разных конструкций и моделей их деформирования могут быть весьма разнообразны, здесь не приводится, так он не принципиален для разрабатываемого ниже численного метода.

Для численного интегрирования по времени t начально-краевой задачи, соответствующей системе (1), используем обобщенные методы Рунге — Кутты, разработанные авторами [12, 13]. Не будем приводить схемы первого порядка по τ (τ — шаг по времени), так как устойчивыми являются лишь неявные схемы с опережением [12, 13, 17, 18], а перейдем сразу к построению схем второго порядка, которые, как будет показано ниже, требуют примерно тех же вычислительных затрат, что и схемы с опережением.

Используя двустадийный обобщенный метод Лобатто IIIA — метода трапеций (здесь и далее будем использовать терминологию, принятую в работе [19]), получим следующую схему интегрирования системы (1) с точностью второго порядка по τ:

$$\begin{gathered}\mathbf{R}\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right) = \mathbf{R}\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right) + \\ +0,5\tau\Big[\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\alpha}, t_{n+1}; \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right) + \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\alpha}, t_{n}; \mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right) + \\ +\mathbf{D}\left(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right) + \mathbf{D}\left(\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right)\Big];\end{gathered} \tag{5}$$

$$\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha}) + 0,5\tau\left(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

где (см. (2)) $\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha},\,t_n)$, $\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha},\,t_n)$, $t_{n+1}=t_n+\tau$, $n=0,\,1,\,2,\,...$ $(t_0=0)$.

Шаг по времени $\tau>0$ может быть переменным ($t_{n+1}=t_n+\tau_{n+1}$).

Уравнение (5) запишем в виде

$$\begin{gathered}-\tau\mathbf{D}\left(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)-\tau\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\alpha},\,t_{n+1};\,\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)+\\ +2\mathbf{R}\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})+2\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)=2\mathbf{R}\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})+2\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right)+\\ +\tau\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\alpha},\,t_n;\,\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right)+\tau\mathbf{D}\left(\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right).\end{gathered}\tag{7}$$

Если на n-ом по времени слое векторные функции $\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})$ известны, то система уравнений (6), (7) определяет решение на следующем ($n+1$)-ом слое. Недостатком уравнения (7) является то, что для вычисления его правой части необходимо к известным функциям $\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})$ применять дифференциальные операторы **D** и **Q**. Чтобы исключить из правой части уравнения (7) эти операторы, введем в рассмотрение векторные функции:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}^n(\boldsymbol{\alpha})=-\tau\mathbf{D}\left(\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right)-\tau\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\alpha},\,t_n;\,\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right)+2\mathbf{R}\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})+2\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right),\\ \mathbf{P}^n=\left\{P_1^n,\,P_2^n,\,...,\,P_N^n\right\}^T,\quad n=0,\,1,\,2\,...\end{gathered}\tag{8}$$

Тогда уравнение (7) примет вид

$$\begin{gathered}-\tau\mathbf{D}\left(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)-\tau\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\alpha},\,t_{n+1};\,\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)+2\mathbf{R}\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})+\\ +2\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)=\mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}),\quad n=0,\,1,\,2,\,...,\end{gathered}\tag{9}$$

где правая часть известна и определяется формулой

$$\mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})=-\mathbf{P}^{n}(\boldsymbol{\alpha})+4\mathbf{R}\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})+4\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})\right),\tag{10}$$

полученной в результате сопоставления выражения (8) и правой части (7), которая не содержит операторов **D** и **Q**. (Если в разрешающих уравнениях (1) выполняется условие $\mathbf{L}(\bullet)\equiv 0$, то правая часть в (9) определяется по рекуррентной формуле (10), вообще не содержащей дифференциальных операторов.)

Запишем выражение для векторных функций в начальный момент времени t_0. Учитывая выражения (3), (4), (8), получим

$$\mathbf{P}^0(\boldsymbol{\alpha})=-\tau\mathbf{D}\left(\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha})\right)-\tau\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\alpha},\,t_0;\,\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha}),\,\mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha})\right)+2\mathbf{R}\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha})+2\mathbf{L}\left(\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha})\right).\tag{11}$$

При нулевых начальных условиях

$$\mathbf{v}^0(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\quad \mathbf{u}^0(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\tag{12}$$

из (11) следует, что

$$\mathbf{P}^0(\boldsymbol{\alpha}) = -\tau\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_0; \mathbf{0}, \mathbf{0}), \tag{13}$$

где правая часть определяется только внешней нагрузкой, действующей в начальный момент времени.

Дальнейшее преобразование уравнения (9) зависит от выбранной модели поведения материала конструкции. Будем различать два случая поведения: вязкопластическое и упруго-вязко-пластическое.

Случай 1. При вязкопластическом деформировании материала конструкции (или материалов всех фаз, если конструкция композитная) определяющие уравнения строятся на основе известной зависимости напряжения σ при одноосном напряженном состоянии от скорости деформации $\dot{\varepsilon}$: $\sigma = \sigma(\dot{\varepsilon})$. При этом важной особенностью уравнения (9) является то, что его левая часть содержит высшие производные по переменным $\boldsymbol{\alpha}$ лишь от скоростей смещений $\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$ (эти производные порождаются оператором $\mathbf{D}$). Поэтому в рассматриваемом случае целесообразно исключить из уравнения (9) векторную функцию $\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$, используя для этого равенство (6):

$$\begin{gathered}
-\tau\mathbf{D}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\, \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right) - \tau\mathbf{Q}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\, \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right) + 2\mathbf{R}\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \\
+2\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right) = \mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}), \qquad n \ge 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь

$$\mathbf{D}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\, \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right) \equiv \mathbf{D}\left[\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}),\, \left(\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha}) + \tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})/2\right) + \tau\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})/2\right],$$

$$\mathbf{Q}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\, \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right) \equiv \mathbf{Q}\left[\boldsymbol{\alpha},\, t_{n+1};\, \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}),\, \left(\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha}) + \tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})/2\right) + \tau\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})/2\right].$$

Таким образом, в случае вязкопластического деформирования конструкции для определения скоростей смещений ее точек на ($n+1$)-ом по времени слое необходимо проинтегрировать систему уравнений (14) с известной правой частью (10)–(13) при соответствующих граничных условиях, которые получаются из граничных условий для системы уравнений (1) формальной заменой $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}^{n+1}$ и $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}^{n+1}$ с использованием равенства (6). Если скорости смещений $\mathbf{v}$ известны на n-ом и ($n+1$)-ом слоях по времени, то из системы (6) с учетом (4) можно определить перемещения $\mathbf{u}$ в момент времени t_{n+1}.

Система N уравнений (14) является системой квазилинейных уравнений эллиптического типа и ее можно интерпретировать как систему уравнений равновесия установившейся ползучести рассматриваемой конструкции на вязком (в общем случае, нелинейно-вязком) основании. В силу известного из монографии [20] формального сходства определяющих уравнений установившейся ползучести (в рамках теории течения) и уравнений теории упругопластических деформаций равенство (14) формально совпадает с системой N уравнений равновесия конструкции на упругом (в общем случае, нелинейно-упругом) основании при ее упругопластическом деформировании, если под $\mathbf{v}^{n+1}$ понимать перемещения точек тела. Поэтому для интегрирования граничной задачи, соответствующей системе уравнений (14), можно использовать известные методы статики или установившейся ползучести.

Для линеаризации операторов (14) используем известные методы: для оператора $\mathbf{D}^{n+1}(\alpha;\,\bullet)$ — метод секущего модуля, предложенный в работе [20] для решения задач установившейся ползучести и качественно аналогичный методу переменных параметров упругости, широко используемому при решении упругопластических задач статики [21]; для $\mathbf{Q}^{n+1}(\alpha;\,\bullet)$ — идею метода Ньютона [22]. После элементарных преобразований получим разрешающее уравнение на ($k+1$)-вой итерации

$$\begin{gathered}-\tau\mathbf{D}^{n+1}\left(\alpha;\,\mathbf{v}^{n+1}_{(k+1)}(\alpha)\right)+\left[2\mathbf{R}-\tau\mathbf{Q}^{n+1}_{\mathrm{v}}\left(\alpha;\,\mathbf{v}^{n+1}_{(k)}(\alpha)\right)\right]\mathbf{v}^{n+1}_{(k+1)}(\alpha)+2\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n+1}_{(k+1)}(\alpha)\right)=\\=\mathbf{P}^{n+1}(\alpha)+\tau\left[\mathbf{Q}^{n+1}\left(\alpha;\,\mathbf{v}^{n+1}_{(k)}(\alpha)\right)-\tau\mathbf{Q}^{n+1}_{\mathrm{v}}\left(\alpha;\,\mathbf{v}^{n+1}_{(k)}(\alpha)\right)\mathbf{v}^{n+1}_{(k)}(\alpha)\right],\quad n\ge 0,\end{gathered}\tag{15}$$

где $\mathbf{Q}^{n+1}_{\mathrm{v}}$ — линейный матричный оператор вида

$$\mathbf{Q}^{n+1}_{\mathrm{v}}\equiv\left\|\partial\mathbf{Q}^{n+1}/\partial\mathbf{v}^{n+1}\right\|,\qquad\left(\mathbf{Q}^{n+1}_{\mathrm{v}}\right)_{ij}\equiv\partial Q^{n+1}_i/\partial v^{n+1}_j,\qquad i,\,j=1,\,2,\,...,\,N.$$

После такой линеаризации на каждой итерации систему уравнений (15) можно рассматривать как линейную эллиптическую систему уравнений статического деформирования некоторой фиктивной неоднородной конструкции на линейно-упругом винклеровском или многопараметрическом (если $\mathbf{L}(\bullet)\ne\mathbf{0}$) основании и использовать для ее интегрирования хорошо разработанные для таких задач численные (МКР, МКЭ), вариационные и другие методы [14].

В качестве начального приближения $\mathbf{v}^{n+1}_{(0)}(\alpha)$ для вектор-функции $\mathbf{v}^{n+1}(\alpha)$ выберем решение на предыдущем по времени слое

$$\mathbf{v}^{n+1}_{(0)}(\alpha)=\mathbf{v}^{n}(\alpha),$$

а в случае $\mathbf{L}(\bullet)\equiv\mathbf{0}$ — векторную функцию

$$\mathbf{v}^{n+1}_{(0)}(\boldsymbol{\alpha})=3\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}^{n}(\boldsymbol{\alpha}),$$

получающуюся по формуле Тейлора $\mathbf{v}^{n+1}(\alpha)=\mathbf{v}^{n}(\alpha)+\tau\mathbf{v}_{,t}(\alpha,\,t_n)+O(\tau^2)$ в предположении, что на предыдущем n-ом по времени слое решение задачи уже известно. При этом учитываем выражения для производной $\mathbf{v}_{,t}$ в разрешающих уравнениях (1) и для оператора $\mathbf{D}\left(\mathbf{v}^{n}(\alpha),\,\mathbf{u}^{n}(\alpha)\right)+\mathbf{Q}\left(\alpha,\,t_n;\,\mathbf{v}^{n}(\alpha),\,\mathbf{u}^{n}(\alpha)\right)$ ($\mathbf{L}(\bullet)\equiv\mathbf{0}$) в формуле (8). Здесь $\mathbf{R}^{-1}$ — матрица, обратная матрице $\mathbf{R}$.

В случае вязкопластического деформирования конструкции система разрешающих уравнений динамики (1) является системой квазилинейных уравнений составного типа [23]. То есть, если операторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{Q}$ в (1) не зависят от $\mathbf{u}$ (в случае геометрической линейности), то эта система распадается на две подсистемы, интегрировать которые можно последовательно, причем первая подсистема (1) в этом случае является системой квазилинейных уравнений параболического типа относительно скоростей смещений $\mathbf{v}$. Из работы [24] известно, что для квазилинейных дифференциальных уравнений и систем общая теория устойчивости и сходимости конечно-разностных схем разработана недостаточно, поэтому основным критерием доверия той или иной конечно-разностной схеме служат приближенные решения для тестовых (модельных) задач, аналитические решения которых известны.

Авторам пока не удалось доказать устойчивость численной схемы (6), (9) в общем случае, когда операторы **D**, **Q** нелинейны. Но в пользу устойчивости этой схемы говорят физическая корректность (непротиворечивость) результатов многочисленных расчетов, проведенных ими для различных тонкостенных конструкций, и удовлетворительное совпадение результатов с известными аналитическими и апробированными численными решениями [15, 25–30]. В модельном случае линейной вязкости ($\sigma = \mu\dot{\varepsilon}$), а также в предположении о линейности оператора **Q** в (1) и его независимости от **u** доказать спектральную устойчивость схемы (7), (9) при $\mathbf{L}(\bullet) \equiv \mathbf{0}$ можно, повторив все рассуждения в [12, 13], касающиеся доказательства устойчивости обобщенных методов Рунге — Кутты при решении задачи нестационарной теплопроводности, которая описывается параболическим уравнением, содержащим производную по времени t только первого порядка (подобно первому уравнению (1) при $\partial\mathbf{D}/\partial\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Из спектральной устойчивости следует устойчивость по начальным данным, из которой, в свою очередь, для двухслойных схем, к которым относится и построенная выше схема, следует устойчивость по правой части [24]. При известных же $\mathbf{v}^n$, $\mathbf{v}^{n+1}$ схема (6) устойчива [19].

Случай 2. При линейно-упругом ($\sigma = E\varepsilon$), нелинейно-упругом или упругопластическом ($\sigma = \sigma(\varepsilon)$), а также при упруго-вязко-пластическом ($\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$) деформировании материала конструкции (или материалов всех фаз, если конструкция композитная) левая часть уравнения (9) содержит высшие производные по переменным $\boldsymbol{\alpha}$ лишь от перемещений $\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$. Следовательно, в этом случае, используя (6), целесообразно исключить из (9) векторную функцию $\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$. Тогда после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned}&-\tau^2\bar{\mathbf{D}}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)-\tau^2\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)+4\mathbf{R}\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})+4\mathbf{L}\left(\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)=\\&=\tau\mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})+2\mathbf{R}\left[2\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})+\tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})\right]+2\mathbf{L}\left[2\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})+\tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})\right],\end{aligned} \tag{16}$$

$$\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})=2\tau^{-1}\left(\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})\right)-\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}),\quad n=0,\,1,\,2,\,..., \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbf{D}}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)\equiv\mathbf{D}\left[2\tau^{-1}\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})-\left(2\tau^{-1}\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})\right),\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right],\\&\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right)\equiv\mathbf{Q}\left[\boldsymbol{\alpha},\,t_{n+1};\,2\tau^{-1}\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})-\left(2\tau^{-1}\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})\right),\,\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\right].\end{aligned}$$

Правая часть уравнения (16) с учетом формул (10)–(13) — известная функция.

Таким образом, в рассматриваемом случае деформирования конструкции (тела) для определения перемещений ее точек на $(n+1)$-ом по времени слое необходимо проинтегрировать систему уравнений (16) с известной правой частью при соответствующих граничных условиях, которые получаются из граничных условий для системы уравнений (1) формальной заменой **u** на $\mathbf{u}^{n+1}$ и **v** на $\mathbf{v}^{n+1}$ с использованием равенства (17). Если перемещения **u** известны на n-ом и $(n+1)$-ом слоях по времени, то из системы (16), (17) можно определить скорости смещений **v** точек конструкции в момент времени t_{n+1}.

Система N уравнений (16) является системой линейных или квазилинейных уравнений эллиптического типа и ее можно интерпретировать как систему уравнений равновесия упруго или упругопластически (в рамках деформационной теории) деформируемой конструкции на упругом (в общем случае нелинейно-упругом) основании.

Для линеаризации в (16) оператора $\bar{\mathbf{D}}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha};\bullet)$ используем метод переменных параметров упругости [21], а для линеаризации оператора $\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha};\bullet)$ — идею метода Ньютона [22]. После элементарных преобразований получим разрешающее уравнение на ($k+1$)-й итерации:

$$\begin{gathered}-\tau^2\bar{\mathbf{D}}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\,\mathbf{u}^{n+1}_{(k+1)}(\boldsymbol{\alpha})\right)+\left[4\mathbf{R}-\tau^2\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}_{\mathrm{u}}\left(\boldsymbol{\alpha};\,\mathbf{u}^{n+1}_{(k)}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right]\mathbf{u}^{n+1}_{(k+1)}(\boldsymbol{\alpha})+\\ +4\mathbf{L}\left(\mathbf{u}^{n+1}_{(k+1)}(\boldsymbol{\alpha})\right)=\tau\mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})+2\mathbf{R}\left[2\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})+\tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})\right]+2\mathbf{L}\left[2\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})+\tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})\right]+\\ +\tau^2\left[\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}\left(\boldsymbol{\alpha};\,\mathbf{u}^{n+1}_{(k)}(\boldsymbol{\alpha})\right)-\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}_{\mathrm{u}}\left(\boldsymbol{\alpha};\,\mathbf{u}^{n+1}_{(k)}(\boldsymbol{\alpha})\right)\mathbf{u}^{n+1}_{(k)}(\boldsymbol{\alpha})\right],\quad n=0,\,1,\,2,\,...,\end{gathered}\tag{18}$$

где $\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}_{\mathrm{u}}$ — линейный матричный оператор вида

$$\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}_{\mathrm{u}}\equiv\left\|\partial\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}/\partial\mathbf{u}^{n+1}\right\|,\qquad\left(\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}_{\mathrm{u}}\right)_{ij}\equiv\partial\bar{Q}^{n+1}_i/\partial u^{n+1}_j,\qquad i,\ j=1,\,2,\,...,\,N.$$

После такой линеаризации на каждой итерации систему уравнений (18) можно рассматривать как линейную эллиптическую систему уравнений равновесия некоторой фиктивной неоднородной конструкции на винклеровском или многопараметрическом (если $\mathbf{L}(\bullet)\neq\mathbf{0}$) основании и использовать для ее интегрирования различные численные (МКР [17, 18, 31, 32], МКЭ [33]), вариационные и другие методы [14]. В некоторых линейных задачах упругого деформирования конструкций систему уравнений (16) на каждом шаге по времени можно проинтегрировать аналитически [17, 18].

В качестве начального приближения $\mathbf{u}^{n+1}_{(0)}(\boldsymbol{\alpha})$ для вектор-функции $\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$ выберем функцию

$$\mathbf{u}^{n+1}_{(0)}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})+\tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}),$$

получающуюся по формуле Тейлора $\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})+\tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})+O(\tau^2)$ в предположении, что на предыдущем n-ом по времени слое решение задачи уже известно.

Авторы пока не смогли доказать устойчивость численной схемы (16), (17) в общем случае, когда операторы $\bar{\mathbf{D}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ нелинейны. Однако в пользу устойчивости этой схемы говорят физическая корректность результатов многочисленных расчетов, проведенных авторами для различных тонкостенных конструкций [31–33], и хорошее совпадение результатов с известными аналитическими решениями [17, 18, 31, 34]. В [17, 18, 34, 35]. Для линейно-упруго деформируемых стержней, балок и цилиндрических оболочек удалось строго доказать устойчивость численной схемы (16), (17). Используя подходы, предложенные в этих работах, можно доказать устойчивость схемы (16), (17) и в более общих случаях линейно-упруго деформируемых конструкций.

З а м е ч а н и е 1. Использование устойчивых обобщенных методов Рунге — Кутты первого порядка по τ (схем с опережением) для интегрирования системы (1) приводит к разрешающим уравнениям, которые по структуре совпадают с (9), (16) и отличаются от них лишь числовым множителем при матрице $\mathbf{R}$ в левых частях [12, 13, 17, 18, 34, 35].

Поэтому такие схемы по вычислительным затратам сопоставимы с построенными выше, но имеют на порядок меньшую точность по τ.

З а м е ч а н и е 2. Для построения на основе обобщенных методов Рунге — Кутты схемы четвертого порядка по τ для численного интегрирования уравнений (1) можно воспользоваться, например, трехстадийным методом Лобатто IIIB. При этом система разрешающих уравнений на каждом шаге по времени усложняется, а именно: вместо системы N разрешающих уравнений вида (9) или (16) получается качественно схожая система $2N$ уравнений относительно неизвестных $\mathbf{v}^{n+1/2}$, $\mathbf{v}^{n+1}$ (в случае вязкопластического деформирования) или $\mathbf{u}^{n+1/2}$, $\mathbf{u}^{n+1}$ (в случае упругого или упругопластического деформирования). В публикациях [17, 18, 34, 35] такие схемы построены для стержней, балок и цилиндрических оболочек, там же доказана и устойчивость этих схем. Повторяя рассуждения, приведенные в этих работах, можно построить аналогичные схемы для других случаев, описываемых системой (1).

З а м е ч а н и е 3. При наличии в уравнениях (1) оператора $\mathbf{L}(\bullet)$ использование для их интегрирования идеи метода «крест» приводит в конечном итоге к неявной численной схеме. Это обстоятельство, а также указанные во введении недостатки делают в этом случае применение метода «крест» нецелесообразным. Кроме того, явная схема «крест» (в том ее варианте, в каком она изложена в [9]), строго говоря, не позволяет решать динамические задачи упруго-вязко-пластического деформирования конструкций. Если этот метод интегрирования применяется в задачах упругопластической динамики, решение на ($n+1$)-ом по времени слое строится по состоянию материала конструкции на n-ом слое, а состояние в момент времени t_{n+1} вообще никак не учитывается. В разработанных выше схемах решение на ($n+1$)-ом по времени слое строится с учетом состояния материала в этот же момент времени, что позволяет более точно определять реальное динамическое поведение конструкции на больших временных интервалах.

В качестве примера эффективной реализации разработанного численного метода исследуем динамический упругопластический изгиб балки прямоугольного поперечного сечения шириной $b = \mathrm{const}$, высотой $H = 3$ см и длиной $l = 1$ м. Концы балки шарнирно оперты. Балка выполнена из алюминиевого сплава АДН с механическими характеристиками: $E = 71$ ГПа, $\sigma_s = 100$ МПа, $\sigma_y = 150$ МПа, $\delta = 6$ % [36]. Алюминиевый сплав выбираем из тех соображений, что его диаграмма деформирования практически не зависит от скорости деформирования [37].

Внешняя распределенная поперечная нагрузка является нагрузкой взрывного типа, и не зависит от пространственных переменных $\boldsymbol{\alpha}$:

$$Q_3 = p(t) = p_0 \exp(-\beta t), \quad Q_1 = Q_2 = 0 \quad (\beta = 12\,\mathrm{c}^{-1}, \quad t \ge t_0, \quad N = 3), \tag{19}$$

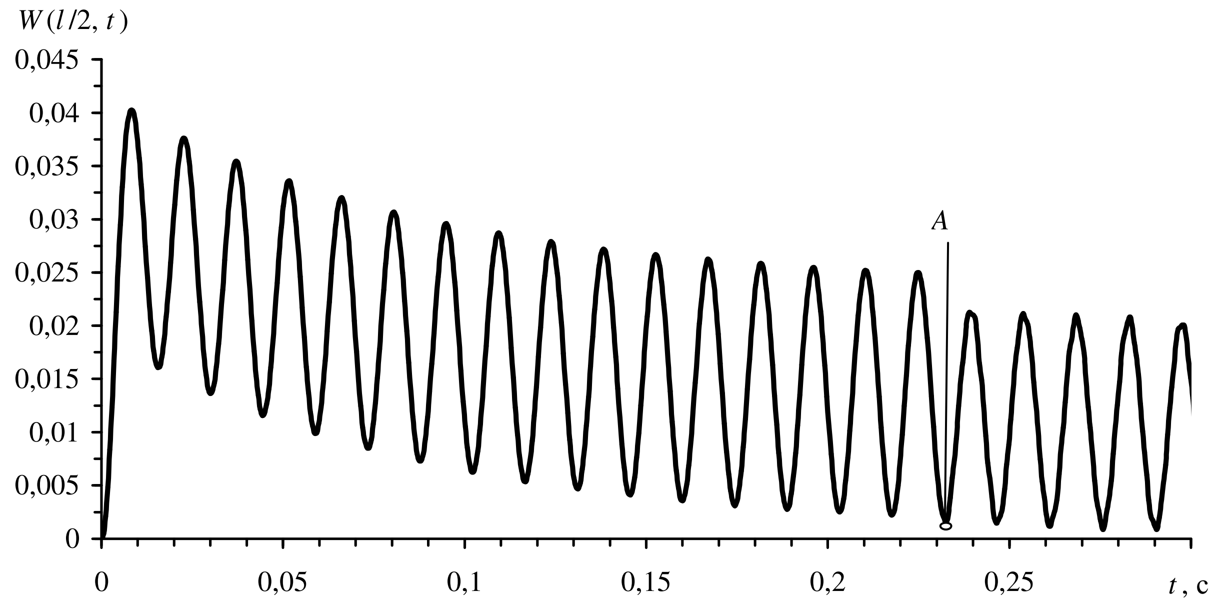
где p_0 — значение нагрузки в начальный момент времени $t = t_0 = 0$. Может быть задан другой закон изменения взрывной нагрузки по времени [4, 9], но в рамках разработанного численного метода это не принципиально. Конкретный вид оператора $\mathbf{D}$ (см. (1)) для рассматриваемого случая возьмем из статьи [31]. Для оператора выполним условие $\mathbf{L}(\bullet) \equiv \mathbf{0}$.

В качестве характерного периода времени $T > 0$, в течение которого исследуется упругопластический динамический процесс, выберем время, в течение которого нагрузка (19) уменьшается в 1000 раз ($T = T_{1000} = -\ln(0,001)/\beta = 0,576$ с). При $t > T_{1000}$ внешняя нагрузка ничтожно мала ($p(t) < 0,001 p_0$) и колебания можно считать установившимися.

В расчете разобьём время T на 1000 слоёв ($\tau = T/1000$), а по длине балки введем 401 узел. Заметим, что варьирование этих величин не приводит к существенному изменению результата расчета, что косвенно свидетельствует об устойчивости разработанного численного метода.

На рисунке изображена кривая, характеризующая колебания центрального сечения балки $\alpha_1 = l/2$ при значении нагрузки $p_0 = 112{,}9$ кПа. По оси абсцисс отложено время t, с (чтобы не загромождать рисунок, колебания изображены не на всем характерном отрезке времени $T_{1000} = 0{,}576$ с, а примерно на его половине), а по оси ординат — безразмерный прогиб $W = Hu_3/(2l^2\varepsilon_y)$, где $\varepsilon_y = 0{,}0076$ — некоторое характерное значение деформации конструкции.

Приведенная кривая соответствует случаю, когда в течение рассматриваемого периода времени T_{1000} в балке возникают первичная (в основном в течение времени достижения первого локального максимума на изображенной кривой) и вторичная (знакопеременная) пластичность, третичная пластичность не достигается. Поведение рассматриваемой кривой показывает, что после прохождения точки A амплитуда колебаний изменяется скачком. Это связано с тем, что точке A предшествует появление и развитие вторичной пластичности, которой соответствует диссипация кинетической энергии балки, то есть кинетическая энергия переходит в пластическую составляющую энергии деформаций. Вследствие этого амплитуда колебаний изменяется скачком. Левее точки A, в окрестности локальных экстремумов, изображенная кривая ведет себя достаточно гладко, правее же точки A, в окрестности локальных экстремумов, наблюдается нарушение гладкости, в частности, в окрестности этих точек кривизна кривой, определяемая производной $W,_{tt}$, меняет знак. Нарушение гладкости объясняется тем, что после возникновения и развития вторичной пластичности, после прохождения точки A, жесткость балки резко уменьшается, и с приближением прогиба к точкам экстремумов в конструкции повторно достигается и развивается первичная и вторичная пластичность (третичная пластичность не достигается). Но развитие этой пластичности столь незначительно, что практически не сказывается на амплитуде колебаний, однако влияет на кривизну изображенной кривой в окрестности экстремумов правее точки A.



Упругопластические колебания балки при динамическом нагружении взрывного типа

Из рисунка также видно, что к концу рассматриваемого периода времени $t = 0,3$ с приведенная кривая колеблется около ненулевого уровня, определяемого остаточными прогибами балки.

З а м е ч а н и е 4. По-видимому, впервые явление знакопеременной пластичности при динамическом нагружении тонкостенных конструкций было исследовано авторами монографии [9] с применением численного интегрирования по явной схеме «крест». Однако авторы этой работы изучали знакопеременную пластичность лишь на начальном этапе деформирования конструкции — в течение первой полуволны колебаний. При проведении практических расчетов на таком коротком интервале времени схема «крест» может оказаться вполне эффективной. Но приведенный выше пример показывает, что знакопеременная пластичность может возникнуть в конструкции значительно позже исследуемого в работе [9] характерного периода ее деформирования. При изучении поведения конструкции на таких «больших» временных интервалах схема «крест» теряет свою привлекательность, так как для ее устойчивости шаги по времени должны быть очень малы [9]. Авторам настоящего исследования представляется, что эффективным может оказаться комбинированное использование схемы «крест» и разработанных выше численных методов, а именно: — на протяжении малых промежутков времени, в течение которых действуют высокоинтенсивные кратковременные (порядка микросекунд) динамические нагрузки, вполне использовать схему «крест» с малыми, гарантирующими устойчивость этого метода шагами по времени; — при изучении дальнейшего движения конструкции использовать разработанные на базе обобщения методов Рунге — Кутты численные процедуры с достаточно большими (и, возможно, переменными) шагами по времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-90403_Укр_а).

Литература

1. *Айнола Л.Я., Нигул У.К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – Т. 14, № 1. – С. 3–63.
2. *Нигул У.К.* Линейные уравнения динамики упругой круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез // Тр. Таллин. политехн. ин-та / Таллинн. – 1960. – № 176.
3. *Мазалов В.Н., Немировский Ю.В.* Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упругопластических сред. – М.: Мир, 1975. – С. 155–247.
4. *Комаров К.Л., Немировский Ю.В.* Динамика жесткопластических элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1984. – 234 с.
5. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
6. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 592 с.
7. *Нигул У.К.* О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – Т. 14, № 3. – С. 345–384.
8. *Нигул У.К.* О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек // Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1966. – С. 593–599.
9. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
10. *Ерхов М.И.* Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
11. *Баженов В.Г., Ломунов В.К., Петров М.В., Угодчиков А.Г.* Исследование больших вязкопластических деформаций цилиндрических оболочек с применением магнитно-импульсного способа нагружения // Машиноведение. – 1983. – № 5. – С. 73–80.
12. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Обобщение методов Рунге – Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 51–76.
13. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Численное интегрирование начально-краевых задач с большими градиентами решения обобщенными методами Рунге – Кутты // Математические методы и физико-механические поля. – 2004. – Т. 47, № 1. – С. 43–62.

14. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
15. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Динамический вязкопластический изгиб армированных стержней переменного поперечного сечения // Математические методы и физико-механические поля. – 2006. – Т. 49, № 1. – С. 53–66.
16. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
17. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Эффективный метод расчета поперечно изгибаемых балок при динамических нагружениях и сейсмических колебаниях // Изв. вузов. Строительство. – 2007. – № 1. – С. 21–32.
18. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Эффективный метод численного интегрирования динамических осесимметричных задач цилиндрических оболочек // Краевые задачи и математическое моделирование: Тр. 8-й Всеросс. научн. конф. 1–3 декабря 2006 г., Новокузнецк. Т. 1. / НФИ КемГУ; под общ. ред. В.О. Каледина. Новокузнецк, 2006. – С. 76–83.
19. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
20. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
21. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
22. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
23. *Джураев А.* Системы уравнений составного типа. – М.: Наука, 1971. – 228 с.
24. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
25. *Янковский А.П.* Численное интегрирование задачи вязкопластической динамики слоисто-волокнистых прямоугольных удлиненных пластин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIX Всеросс. конф., Бийск, 28–31 августа 2005 г. / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: «Параллель», 2005. – С. 290–297.
26. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Вязкопластическая динамика изотропных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 123–134.
27. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Вязкопластическая динамика слоисто-волокнистых пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12, № 4. – С. 484–501.
28. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Особенности вязкопластического деформирования армированных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 2. – С. 85–98.
29. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Интегрирование задачи динамического вязкопластического деформирования изотропных цилиндрических оболочек обобщенным методом Рунге – Кутты // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. – 2008. – № 2(5).
30. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Динамика коротких и удлиненных вязкопластических оболочек // Наука. Промышленность. Оборона: Труды IX Всероссийской научно-технической конференции (Новосибирск, 23–25 апреля 2008 г.). – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – С. 274–279.
31. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге – Кутты // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 77–95.
32. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Упругопластическая динамика прямоугольных композитных пластин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. – 2006. – Вып. 68. – С. 78–85.
33. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Расчет и исследование продольного деформирования несущей колонны высотного здания при вертикальных сейсмических колебаниях основания. Сообщение 1. Метод расчета (Сообщение 2. Анализ результатов расчета) // Изв. вузов. Строительство. – 2007. – № 12. – С. 24–32 (– 2008. – № 2. – С. 4–9).
34. *Янковский А.П.* Определение продольных упругих колебаний стержня обобщенными методами Рунге – Кутта // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVIII Межресп. конф., Кемерово, 1–3 июля 2003 г. / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: Изд-во «Нонпарель», 2003. – С. 223–229.
35. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Рациональное проектирование армированных конструкций. – Новосибирск: Наука, 2002. – 488 с.
36. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
37. *Мейден (C.J. Maiden), Грин (S.J. Green).* Испытание на скоростное деформирование при сжатии для шести материалов при скоростях деформации от 10^{-3} до 10^{4} мм/сек // Прикл. механика: Тр. Амер. общ-ва. Сер. Е. – 1966. – № 3. – С. 20–30.