

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В.И. Ерофеев, Н.В. Ключева, И.Н. Солдатов

*Нижегородский филиал Института машиноведения РАН,
Нижний Новгород, 603024, Россия*

Рассмотрено распространение объемных и поверхностной волн во вращающемся упругом изотропном теле. Исследован общий случай, когда направление распространения волн составляет произвольный угол с осью вращения.

WAVE PROPAGATION IN ROTATING ELASTIC SOLID

V.I. Erofeev, N.V. Kluyeva and I.N. Soldatov

*Nizhny Novgorod Branch of the Mechanical Engineering Research Institute RAS,
Nizhny Novgorod, 603024, Russia*

The propagation of bulk and surface waves in a rotating solid is studied. Analysis is carried out for a general case when the angle between the direction of wave propagation and rotation axis is arbitrary.

Введение

В технике находит применение немало машин, содержащих вращающиеся части: турбины, центрифуги и т.д. Во многих случаях желателен ультразвуковой неразрушающий контроль непосредственно во время эксплуатации, без остановки устройства. Несмотря на то, что используемые на практике ультразвуковые приборы кажутся, на первый взгляд, достаточно высокочастотными (1 - 5 мегагерц и выше), зачастую нельзя игнорировать влияние сил Кориолиса, чтобы пренебречь эффектами вращения. Так в работе [1] предложено ультразвуковое устройство (способ) для измерения давления в шинах, в [2] — для измерения трения во время вращения колеса, в [3] — для контроля качества бумажной массы, вращающейся на специальном барабане, в [4] — для определения дефектов на поверхности роликовых подшипников. Одновременно возрастает интерес к аппаратам, специально созданным для практического использования специфических эффектов, возникающих при распространении упругих волн во вращающейся среде. По-видимому, в [5] впервые предложено использовать для определения угловой скорости вращения изменения в скорости поверхностной волны, возникающие под влиянием силы Кориолиса. Из других работ по ультразвуковым датчикам вращения (гироскопам) отметим [6–10].

В работе [11], первой работе, в которой рассматривалось распространение волн во вращающемся изотропном упругом теле, отмечено, что волны во вращающейся среде становятся диспергирующими, однако исследование дисперсионных свойств распространяющихся волн не было выполнено. В работе [12] рассмотрен один частный

случай распространения объемных волн перпендикулярно оси вращения. Для того же частного случая в [13] и [14] исследовалось распространение поверхностной волны в изотропном полупространстве, в [15] и [16] — в орторомбическом и моноклинном кристаллах соответственно (см. также работу [17]), в [18] — в кристалле с тетрагональной симметрией. В ряде работ [19–22] учитывалось влияние магнитного поля, теплопроводности и другое.

Для технических приложений интересен не только случай распространения упругих волн перпендикулярно оси вращения, но и самый общий случай распространения волн под произвольным углом.

Влияние вращения на волновые процессы достаточно многообразно. Оно приводит, во-первых, к повороту вектора поляризации у поперечной волны; во-вторых, — к видоизменению продольной волны, приобретающей под воздействием Кориолисовой силы поперечную составляющую; в-третьих, — к возникновению угла между направлениями распространения волны и потока энергии; и так далее.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением влияния вращения преимущественно на фазовые и групповые скорости объемных и поверхностных волн, распространяющихся под углом к оси вращения. Заметим, что ранее распространение акустической волны в газе под углом к оси вращения рассматривалось в [23].

Объемные волны в равномерно вращающейся среде

Введем связанную со стационарно вращающейся упругой средой правую ортогональную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Наряду с обозначением координат x_j ($j=1, 2, 3$) будем использовать обозначения x, y, z . Во введенной неинерциальной системе координат уравнения движения упругой среды имеют вид [11]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + 2[\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}] - [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u}]] - [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}]], \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = (u, v, w)^T$ — вектор перемещений; $\mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ — скорость частиц; $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения среды; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, связанный с деформациями обобщенным законом Гука $\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$; C_{ijkl} — тензор модулей упругости. Второе слагаемое в правой части (1) — Кориолисова сила, играющая ключевую роль в рассматриваемых ниже эффектах. В изотропной упругой среде динамическая часть уравнения (1) записывается как

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (c_p^2 - c_s^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + c_s^2 \Delta \mathbf{u} + 2[\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}] - [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u}]], \quad (2)$$

где $c_p^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$, $c_s^2 = \mu / \rho$, λ и μ — модули упругости Ламе; ρ — плотность. Последний член в динамической части (2) уравнений движения, определяющий влияние центробежной силы, нередко опускают (например, в [13]).

Выберем ось Ox_3 системы координат так, чтобы она совпадала с осью вращения. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся под углом χ к оси вращения в плоскости Ox_1x_3 . Векторное уравнение (2) в развернутой форме с учетом того, что движение частиц происходит в плоскости Ox_1x_3 , записывается в виде следующей системы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial x} (u_x + w_z) - c_s^2 (u_{xx} + u_{zz}) - 2\Omega \frac{\partial}{\partial t} v - \Omega^2 u &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 (v_{xx} + v_{zz}) + 2\Omega \frac{\partial}{\partial t} u - \Omega^2 v &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial z} (u_x + w_z) - c_s^2 (w_{xx} + w_{zz}) &= 0.\end{aligned}$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем эту систему к одному уравнению для радиальной компоненты u вектора перемещений \mathbf{u} :

$$\begin{aligned}\partial_t^6 u - [(c_p^2 + 2c_s^2)(\partial_x^2 + \partial_z^2) - 2\Omega^2] \partial_t^4 u + \\ + [c_s^2(2c_p^2 + c_s^2)(\partial_x^2 + \partial_z^2)^2 + \Omega^2(c_p^2 - c_s^2)(\partial_x^2 - 2\partial_z^2) + \Omega^4] \partial_t^2 u - \\ - c_p^2 c_s^4 (\partial_x^2 + \partial_z^2)^3 u - \Omega^2 c_s^2 [(c_p^2 + c_s^2) \partial_x^2 + (3c_p^2 + c_s^2) \partial_z^2] \partial_t^2 u - \\ - 2\Omega^2 c_p^2 c_s^2 \partial_z^2 u - \Omega^4 (c_s^2 \partial_x^2 + c_p^2 \partial_z^2) u = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь обозначено $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ и так далее. Подставляя в (3) решение в виде плоской волны с амплитудой \hat{u} , распространяющейся под углом χ к оси вращения

$$u = \hat{u} e^{ik(x \sin \chi + z \cos \chi - ct)}, \quad (4)$$

получим уравнение для фазовой скорости $c' = c/c_s$ (ниже штрих опускаем):

$$\begin{aligned}(-1 + 4/\tau^2 + 1/\tau^4) c^6 + \{2 + c_p^2/c_s^2 - [5 - c_p^2/c_s^2 - 5(1 - c_p^2/c_s^2) \cos^2 \chi] / \tau^2 - \\ - [1 - (1 - c_p^2/c_s^2) \cos^2 \chi] / \tau^4\} c^4 + \{-1 - 2c_p^2/c_s^2 + \\ + [1 - c_p^2/c_s^2 - (1 - c_p^2/c_s^2) \cos^2 \chi] / \tau^2\} c^2 + c_p^2/c_s^2 = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где $\tau = \omega/\Omega$ — отношение частоты волны к частоте вращения.

В отличие от невращающейся безграничной изотропной упругой среды, где существуют две (продольная и сдвиговая) объемные волны со скоростями c_p и c_s , в рассматриваемом случае существуют три волны, которые обозначим через ql , m и qt . Эти волны являются диспергирующими, то есть их фазовые скорости (c^{ql} , c^m и c^{qt} соответственно) зависят от частоты (Рис. 1). В пределе низкой частоты вращения $\tau \rightarrow \infty$ волна ql — это продольная волна $c^{ql} \rightarrow c_p$, а m и qt — поперечные волны разной поляризации. Условно назовем волну ql квазипродольной. Условность названия заключается в том, что с уменьшением отношения частот τ вектор перемещений приобретает под воздействием Кориолисовой силы значительную поперечную компоненту, так что при τ , близком к 2 и менее, волна становится ближе по свойствам к поперечной, а не к продольной волне. Фазовые скорости c^{qt} , c^m волн qt и m стремятся при $\tau \rightarrow \infty$ к скорости сдвиговой волны c_s в невращающейся среде, причем c^m приближается к c_s сверху, а c^{qt} — снизу. Волне qt соответствует в неподвижной среде

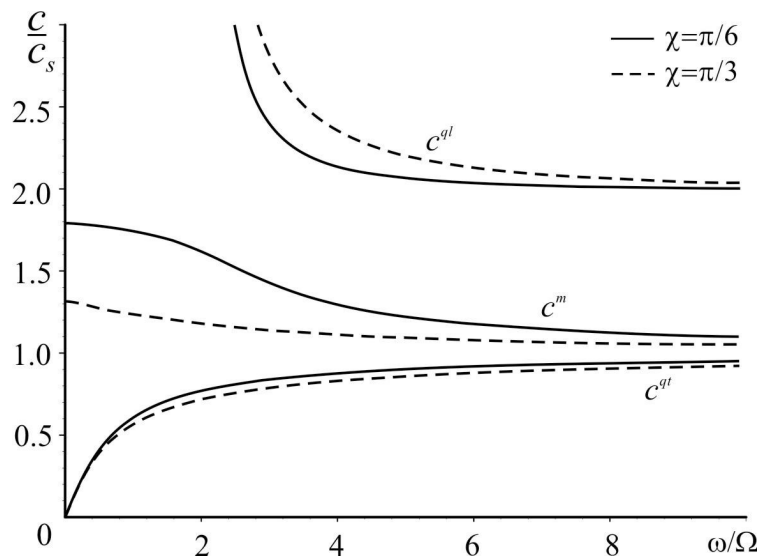


Рис. 1. Зависимости фазовых скоростей объемных волн от отношения частот τ

сдвиговая волна, у которой вектор перемещений перпендикулярен плоскости Oxz . Под воздействием Кориолисовой силы её вектор поляризации образует тупой угол с волновым вектором, фазовая скорость становится меньше c_s , а при $\tau \rightarrow 0$ она стремится к нулю. Графики фазовых скоростей показывают, что объемные упругие волны являются сильно диспергирующими в области низких τ .

Угол χ , под которым излучается волна, оказывает заметное влияние на дисперсионные характеристики (Рис. 1). На рисунке показаны зависимости фазовых скоростей от отношения частот τ для двух значений угла (коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$). Сплошные кривые соответствуют значению $\chi = \pi/6$, а штриховые — $\chi = \pi/3$. При $\chi = 0$ вращение не оказывает никакого влияния на продольную волну. Отметим, что если пренебречь влиянием центробежной силы (последним членом в правой части уравнения (2)), то при $\chi \neq 0$ для квазипродольной волны ql обнаруживается критическая частота (частота запирания) $\omega_c = 2\Omega$, ниже которой волна распространяться не может. При $\omega < 2\Omega$ могут распространяться только две квазипоперечные волны.

2. Поверхностная волна на границе равномерно вращающегося полупространства

Используем для волнового вектора \mathbf{k} поверхностной волны следующее представление:

$$\mathbf{k} = k(\mathbf{m} + p\mathbf{n})$$

где k — действительное, а $p = p' + ip''$ — комплексное число; \mathbf{m} — единичный вектор, задающий направление распространения поверхностной волны и лежащий в плоскости Π , ограничивающей упругое тело; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к плоскости Π , так что $(\mathbf{m}, \mathbf{m}) = 1$, $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0$, $(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1$.

Следуя работам [16, 17], поверхностную волну представим как суперпозицию парциальных волн вида:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \exp[-i\omega t + ik(\mathbf{m}, \mathbf{x}) + ikp(\mathbf{n}, \mathbf{x})]. \quad (6)$$

В отличие от предыдущего раздела, здесь для удобства выберем оси прямоугольной декартовой системы координат так, что $x_1 = (\mathbf{m}, \mathbf{x})$, $x_3 = (\mathbf{n}, \mathbf{x})$. Тогда выражение (6) запишем следующим образом

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \exp[-i\omega t + ikx_1 + ikpx_3]. \quad (7)$$

Поскольку из рассмотрения объемных волн видно, что исходно изотропная упругая среда, приведенная во вращение, приобретает черты анизотропной среды, то естественно обратиться к общему уравнению (1), учитывая, что тензор упругих модулей имеет вид $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, где δ_{ij} — дельта Кронекера. Как и ранее, в (1) опустим последний, не зависящий от времени член. Подставляя решение (6) в уравнения движения (1) и придерживаясь обозначений работы [24], получим

$$[\langle mm \rangle - \tilde{\lambda} \mathbf{E} + p(\langle mn \rangle + \langle nm \rangle) + p^2 \langle nn \rangle] \mathbf{a} = 0. \quad (8)$$

Здесь угловые скобки (в отличие от круглых, используемых для записи скалярного произведения) обозначают тензор $\langle ab \rangle = a_j C_{ijkl} b_l$. Также приняты обозначения: $\mathbf{E} = (1 + \tau^{-2}) \mathbf{I} - 2i\tau^{-1} \mathbf{W} + \tau^{-2} \mathbf{W} \mathbf{W}^T$ (верхний индекс T обозначает транспонирование); $\tilde{\lambda} = \frac{\rho \omega^2}{k^2}$; $\tau = \omega / \Omega$; \mathbf{I} — единичная матрица. Матрица $W_j = \Omega_j / \Omega$ имеет вид:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & W_3 & -W_2 \\ -W_3 & 0 & W_1 \\ W_2 & -W_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривиальность правого собственного вектора \mathbf{a} обеспечивается условием

$$\det[\langle mm \rangle - \tilde{\lambda} \mathbf{E} + p(\langle mn \rangle + \langle nm \rangle) + p^2 \langle nn \rangle] = 0 \quad (9)$$

Нам интересны собственные значения p с $\text{Im}(p) > 0$, поскольку амплитуда перемещений при распространении поверхностной волны должна убывать при удалении от свободной поверхности. Выражение для поверхностной волны как суперпозиции парциальных волн запишем в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{q} \exp[-i\omega t + ik(\mathbf{m}, \mathbf{x})], \quad (10)$$

где $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$; $\mathbf{D} = \text{diag}(e^{ikp_1(\mathbf{n}\mathbf{x})}, e^{ikp_2(\mathbf{n}\mathbf{x})}, e^{ikp_3(\mathbf{n}\mathbf{x})})$; \mathbf{q} — постоянный вектор.

Подставив (10) в граничные условия $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = n_j \boldsymbol{\sigma}_{ij} = 0$, получим

$$\mathbf{B} \mathbf{q} = 0, \quad (11)$$

где $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$,

$$\mathbf{b}_\alpha = \{\langle nm \rangle + p_\alpha \langle nn \rangle\} \mathbf{a}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (12)$$

По α суммирования нет.

Из условия нетривиальности вектора \mathbf{q} следует уравнение $\det \mathbf{B} = 0$. Из уравнений движения вытекает:

$$\mathbf{b}_\alpha = p_\alpha^{-1} \{\tilde{\lambda}^2 \mathbf{E} - \langle mm \rangle - p_\alpha \langle mn \rangle\} \mathbf{a}_\alpha \quad (13)$$

Опуская индекс α , уравнения (12), (13) объединим в одно матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}^2 \mathbf{E} - \langle mm \rangle & \mathbf{0} \\ -\langle nm \rangle & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \langle mn \rangle & \mathbf{I} \\ \langle nn \rangle & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (14)$$

После небольших преобразований получим следующий вид уравнения (14):

$$\mathbf{N} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 + \tilde{\lambda}^2 \mathbf{E} & \mathbf{N}_1^T \end{pmatrix}$.

где

$$\mathbf{N}_1 = -\langle nn \rangle^{-1} \langle nm \rangle, \quad \mathbf{N}_2 = \langle nn \rangle^{-1}, \quad \mathbf{N}_3 = -\langle mm \rangle + \langle mn \rangle \langle nn \rangle^{-1} \langle nm \rangle.$$

Обобщим уравнение (15) для любого целого n , включая отрицательные:

$$\mathbf{N}^n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = p^n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Второе уравнение системы (16) для $p = p_1, p_2, p_3$ и $n = 1$ запишем в виде:

$$(\mathbf{N}_3 + \tilde{\lambda}^2 \mathbf{E}) \mathbf{A} + \mathbf{N}_1^T \mathbf{B} = \mathbf{B} \text{diag}(p_1, p_2, p_3). \quad (17)$$

После умножения (17) слева на $\bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}^T$, справа на \mathbf{q} и с учетом (11) получим:

$$\bar{\mathbf{a}}_R^T (\mathbf{N}_3 + \tilde{\lambda}^2 \mathbf{E}) \mathbf{a}_R = 0, \quad (18)$$

где $\mathbf{a}_R = \mathbf{A} \mathbf{q}$ — вектор поляризации на свободной поверхности (черта над символом используется для обозначения комплексного сопряжения). В общем случае для произвольного целого n имеем $\bar{\mathbf{a}}_R^T \mathbf{K}^{(n)} \mathbf{a}_R = 0$, где $\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{N}_3 + \tilde{\lambda} \mathbf{E}$,

$\mathbf{K}^{(-1)} = \langle nn \rangle - \langle nm \rangle (\langle mm \rangle - \tilde{\lambda}^2 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{N}_2^{(-1)} \langle mn \rangle$ и так далее. Из теоремы Кэли-Гамильтона [25] следует, что из 6×6 матриц только пять матриц \mathbf{N}^n являются линейно независимыми. Для двухкомпонентной волны достаточно выбрать любые три целых числа n , например, $n = -1, 1, 2$.

Вектор \mathbf{a}_R возьмем в виде $\mathbf{a}_R = (1, \boldsymbol{\alpha})^T$, тогда из (18) следует:

$$K_{12}^{(n)} \boldsymbol{\alpha} + K_{21}^{(n)} \bar{\boldsymbol{\alpha}} + K_{22}^{(n)} \boldsymbol{\alpha} \bar{\boldsymbol{\alpha}} = K_{11}^{(n)}. \quad (19)$$

В случае двухкомпонентной волны, распространяющейся вдоль поверхности вращающегося изотропного упругого полупространства, для элементов матриц $\mathbf{K}^{(1)}$, $\mathbf{K}^{(-1)}$, $\mathbf{K}^{(2)}$ имеем следующие выражения:

$$K_{11}^{(1)} = \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} - \lambda - 2\mu + \tilde{\lambda}[1 + \tau^{-2}(2 - W_1^2)],$$

$$K_{12}^{(1)} = -\tilde{\lambda}[2i\tau^{-1}W_3 - \tau^{-2}W_1W_2], \quad K_{12}^{(1)} = \tilde{\lambda}[2i\tau^{-1}W_3 - \tau^{-2}W_1W_2],$$

$$K_{22}^{(1)} = \tilde{\lambda}[1 + \tau^{-2}(2 - W_2^2)],$$

$$K_{11}^{(-1)} = -\tilde{\lambda}\mu \left\{ -(\lambda + 2\mu - \tilde{\lambda})\tau^4 + [3\tilde{\lambda}(1 - W_3^2) - \lambda(2 - W_2^2) - \mu(W_3^2 + W_1^2)]\tau^2 + \right. \\ \left. + \tilde{\lambda}(2 + W_3^2 + W_3^4 + W_3^2W_1^2 + W_3^2W_2^2) \right\},$$

$$K_{12}^{(-1)} = \tilde{\lambda}\mu[2i\tau W_3 - W_1W_2]\tau^2, \quad K_{12}^{(-1)} = -\tilde{\lambda}\mu[2i\tau W_3 + W_1W_2]\tau^2,$$

$$K_{22}^{(-1)} = [-\tilde{\lambda}^2(\lambda + 2\mu) + \tilde{\lambda}\mu(5\lambda + 6\mu) - 4\mu^2(\lambda + \mu)]\tau^4 +$$

$$+ [3\tilde{\lambda}^2(\lambda + 2\mu)(-1 + W_3^2) + \tilde{\lambda}(6\lambda\mu + 3\lambda\mu W_1^2 + 4\lambda\mu W_3^2 + 8\mu^2 +$$

$$+ 2\mu^2W_1^2 + 4\mu^2W_3^2)]\tau^2 - 2\tilde{\lambda}^2(\lambda + 2\mu)(1 + W_3^2),$$

$$K_{11}^{(2)} = 2\tilde{\lambda}(\lambda + 2\mu)\lambda\tau^{-2}W_1W_2,$$

$$K_{12}^{(2)} = -\left(\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} - \lambda - 2\mu \right) \mu^2 - \tilde{\lambda}\mu^2[1 + \tau^{-2}(2 - W_1^2)] - \tilde{\lambda}\lambda(\lambda + 2\mu)[1 + \tau^{-2}(2 - W_2^2)],$$

$$K_{21}^{(2)} = K_{12}^{(2)}, \quad K_{22}^{(2)} = 2\tilde{\lambda}\mu^2\tau^{-2}W_1W_2,$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} - \lambda - 2\mu + \tilde{\lambda}[1 + \tau^{-2}(2 - W_1^2)] & -\tilde{\lambda}[2i\tau^{-1}W_3 - \tau^{-2}W_1W_2] \\ \tilde{\lambda}[2i\tau^{-1}W_3 - \tau^{-2}W_1W_2] & \tilde{\lambda}[1 + \tau^{-2}(2 - W_2^2)] \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в выражениях для элементов $\mathbf{K}^{(-1)}$ опущен общий делитель. Введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\kappa}_1 = \left((K_{21}^{(1)} + K_{12}^{(1)})/2, (K_{21}^{(-1)} + K_{12}^{(-1)})/2, (K_{21}^{(2)} + K_{12}^{(2)})/2 \right)^T,$$

$$\boldsymbol{\kappa}_2 = \left(i(K_{12}^{(1)} - K_{21}^{(1)})/2, i(K_{12}^{(-1)} - K_{21}^{(-1)})/2, i(K_{12}^{(2)} - K_{21}^{(2)})/2 \right)^T,$$

$$\mathbf{\kappa}_3 = (K_{22}^{(1)}, K_{22}^{(-1)}, K_{22}^{(2)})^T, \quad \mathbf{b} = (-K_{11}^{(1)}, -K_{11}^{(-1)}, -K_{11}^{(2)})^T,$$

$$h_1 = \alpha + \bar{\alpha}, \quad h_2 = i(\alpha - \bar{\alpha}), \quad h_3 = \alpha\bar{\alpha}.$$

С учетом введенных обозначений уравнения (19) запишутся в виде

$$\mathbf{\kappa}_j h_j = \mathbf{b}. \quad (20)$$

Переменные h_j не являются независимыми. Из связи между ними следует дисперсионное уравнение:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 4\Delta_3\Delta = 0, \quad (21)$$

где

$$\Delta_1 = \det|\mathbf{b} \quad \mathbf{\kappa}_2 \quad \mathbf{\kappa}_3|; \quad \Delta_2 = \det|\mathbf{\kappa}_2 \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{\kappa}_3|;$$

$$\Delta_3 = \det|\mathbf{\kappa}_1 \quad \mathbf{\kappa}_2 \quad \mathbf{b}|; \quad \Delta = \det|\mathbf{\kappa}_1 \quad \mathbf{\kappa}_2 \quad \mathbf{\kappa}_3|.$$

Далее ограничимся случаем, когда $W_1 = 0$, $W_3 = \cos \chi$, $W_2 = \sin \chi$. Поверхностная волна на границе вращающегося упругого тела в отличие от классической волны Рэлея является диспергирующей. На рисунке 2 представлены зависимости от τ фазовой скорости волны, распространяющейся вдоль поверхности изотропного упругого тела с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$ для двух углов χ : $\chi = 0$ и $\chi = \pi/6$. Горизонтальная пунктирная линия на рисунке соответствует невращающейся среде.

Максимальное проявление эффекта вращения наблюдается при $\chi = 0$. С уменьшением отношения ω/Ω (увеличением угловой скорости вращения при фиксированной частоте волны) уменьшается фазовая скорость поверхностной волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-01-00270 и № 06-02-17158) и Фонда содействия отечественной науке.

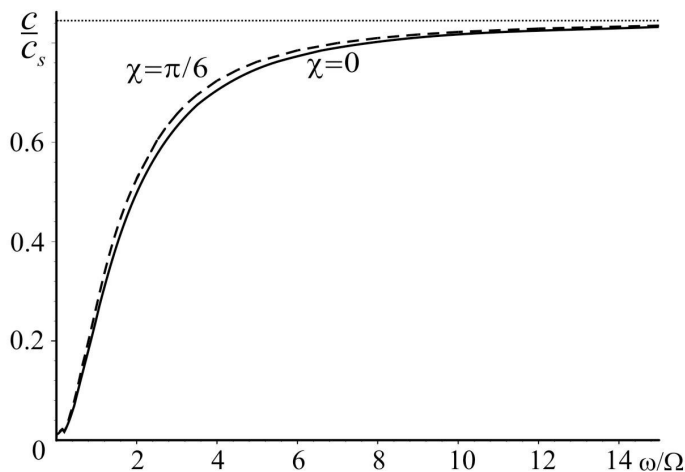


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости поверхностной волны от τ для двух значений угла χ

Литература

1. Pohl A., Ostermayer G., Reindl L., Seifert F. Monitoring the tire pressure at cars using passive SAW sensors. // IEEE Ultrasonic Symposium. – 1997. – V. 1. – P. 471-474.
2. Pohl A., Steindl R., Reindl L. The intelligent tire' utilizing passive SWA sensors – Measurement of tire friction. // IEEE Trans. Instrum. Meas. – 1999. – V. 48. – P. 1041-1046.
3. Hall M.S. et al. System for measuring the ultrasonic velocity in the thickness direction of moving webs without errors due to delay in the outset of digitations // J. Acoust. Soc. Am. – 1996. – V. 100, № 2. – Pt. 1. P. 686 (U.S. Patent №. 5493911).
4. Kawasaki K., Sekiguchi M., Matsuhisa T. Detecting flaws formed in surfaces of rotating members with ultrasonic waves // J. Acoust. Soc. Am. – 1991. – V. 90. – P. 3386.
5. Lao B.Y. Gyroscopic effect in surface acoustic waves // IEEE Ultras. Symp. – 1980. – P. 687-690.
6. Jahangir E., Howe R.M. Time-optimal attitude control scheme for spinning missile // J. Guidance Contr. Dyn. – 1993. – V. 16. – P. 346-353.
7. Clarke N.S., Burdess J.S. A rotation rate sensor based upon a Rayleigh resonator // ASME J. Appl. Mech. – 1994. – V. 61. – P. 139-143.
8. Kurosawa M., Fukuda Y., Takasaki M., Higuchi T. A surface-acoustic wave gyroscope sensor // Sens. Actuators A. – 1998. – V. 66. – P. 33-39.
9. Varadan V.K., Suh W.D., Xavier P.B., Jose K.A., Varadan V.V. Design and development of a MEMS-IDT gyroscope. – J. Smart Mater. Struct. – 2000. – V. 9. – P. 898-905.
10. Jose K.A., Suh W.D., Xavier P.B., Varadan V.K., Varadan V.V. Surface acoustic wave MEMS gyroscope // Wave Motion. – 2002. – V. 36. – P. 367-381.
11. Schoenberg M., Censor D. Elastic waves in rotating media // Quart. Appl. Math. – 1973. – V. 31. – P. 115-125.
12. Hamisch H. Die Ausbreitung elastischer Wellen im rotierenden Medium // Acustica. – 1990. – V. 72 (4). – P. 275-279.
13. Григорьевский В.И., Гуляев Ю.В., Козлов А.И. Акустические волны во вращающейся упругой среде // Акуст. ж. – 2000. – Т. 46. – № 2. – С. 282-284.
14. Clarke N.S., Burdess J.S. Rayleigh waves on a rotating surface // ASME J. Appl. Mech. – 1994. – V. 61. – P. 724-726.
15. Destrade M. Surface acoustic waves in rotating orthorhombic crystals // Proc. R. Soc. London. – 2003. – V. 460. – P. 653-665.
16. Destrade M. Rayleigh waves in anisotropic crystals rotating about the normal to a symmetry plane // ASME J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71. – № 4. – P. 516-520.
17. Ting T.C.T. Surface waves in a rotating anisotropic elastic half-space // Wave Motion. – 2004. – Vol. 40. – P. 329-346.
18. Fang H., Yang J., Jiang Q. Rotation perturbed surface acoustic waves propagating in piezo-electric crystals // Int. J. Solids Struct. – 2000. – Vol. 37. – P. 4933-4947.
19. Wauer J. Waves in rotating conducting piezoelectric media // J. Acoust. Soc. Am. 1999. – V. 106. – P. 626-636.
20. Roy Choudhuri S.K., Debnath L. Magneto-thermo-elastic plane waves in rotating media. // Int. J. of Engineering Science. 1983. – V. 39. – P. 1217-1232.
21. Zhou Y.H., Jiang Q. Effects of Coriolis force and centrifugal force on acoustic waves propagating along the surface of a piezoelectric half-space. // Z. Angew. Math. Phys. – 2001. – V.52. – P. 950-965.
22. Othman M.I. Effect of rotation on plane waves in generalized thermo-elasticity with two relaxation times // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – V. 41. – P. 2939-2956.
23. Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. Акустические волны во вращающемся идеальном газе // Акуст. ж. – 2000. – Т. 46. – № 5. – С. 642-647.
24. Shuvalov A.L. On the theory of plane inhomogeneous waves in anisotropic elastic media // Wave Motion. – 2001. – V. 34. – P.401-429.
25. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552с.