

## ВИНТОВОЕ ДИНАМО В ТОРЕ

Р.А. Степанов, А.В. Чупин, П.Г. Фрик

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, 614013, Россия*

Численно исследована задача о генерации магнитного поля при винтовом движении в торе. Показано, что в пределе тонкого тора решение совпадает с известным решением для винтового динамо в цилиндре, с наложенным на него требованием периодичности. В пределе толстого тора появляется принципиально новое для винтовых динамо решение. В этом случае возникает «глобальное» магнитное поле, не затухающее на внешней оси тора и имеющее масштаб максимального геометрического размера тора.

## SCREW DYNAMO IN A TORUS

R. Stepanov, A. Chupin and P. Frick

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, 614013, Russia*

The problem of magnetic field generation under screw motion in a torus is studied numerically. It is shown that under periodicity requirement the solution for a thin torus coincides with the known solution for screw — dynamos in a cylinder. For a thick torus, a principally new solution to the screw dynamo problem is obtained. In this case the arising “global” magnetic field does not decay on the external torus axis and has the scale of a maximal geometrical size of the torus.

Магнитогидродинамическим (МГД) динамо называется процесс генерации магнитного поля движущимся потоком электропроводной жидкости. Одним из простейших примеров движения проводящей среды, вызывающего генерацию магнитного поля, является динамо Пономаренко [1], описывающее винтовое движение проводящего цилиндра бесконечной длины в среде с той же проводимостью. В задаче Пономаренко цилиндр движется как твёрдое тело, без трения, но при идеальном электрическом контакте с окружающей покоящейся средой. На основе задачи Пономаренко рассмотрен целый класс винтовых течений, приводящих к генерации поля и названных винтовыми динамо [2, 3]. Именно винтовое динамо Пономаренко легло в основу первого лабораторного динамо-эксперимента [4], в ходе подготовки которого численно исследованы режимы генерации поля в различных ламинарных и турбулентных винтовых потоках [5].

Большое внимание к винтовому динамо объясняется тем, что оно характеризуется минимальным порогом генерации в сравнении с другими вариантами ламинарного динамо. Специальным случаем винтового динамо является динамо на основе винтового течения в замкнутом кольцевом канале (торе). В такой модели течение создаётся в ограниченном объёме, что приближает её к реальным природным объектам, приводящим к динамо. На подобной геометрии потока основывается лабораторный эксперимент, реализуемый в ИМСС (г. Пермь) [6]. В эксперименте винтовой поток возбуждается во вращающемся канале, что накладывает существенные ограничения на его массу и, следовательно, на толщину стенок канала. Влияние толщины и проводимости стенки на

порог генерации поля детально изучался в работе [7], причём для нестационарного течения, реализуемого в реальном эксперименте, в том числе, и численно. Однако все расчёты велись в цилиндрической геометрии с условиями периодичности по оси канала [8].

Цель данной работы — численное исследование особенностей винтового динамо в торе. Эти особенности могут быть обусловлены как кривизной канала, так и взаимодействием полей, генерируемых в диаметрально противоположных областях канала. Специфика динамо в толстом торе может оказаться важной для оптимизации осуществляемого в ИМСС динамо-эксперимента.

## 1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим тор конечной проводимости, находящийся в бесконечной среде с такими же свойствами. Тор характеризуется внешним радиусом  $r_c$  — расстоянием от внешней оси тора  $z$  до его внутренней оси (Рис.1), и внутренним  $R$  — радиусом кругового сечения в вертикальной плоскости. Для описания поля скорости в торе используется тороидально-цилиндрическая система координат  $\{\rho, \varphi, \zeta\}$ , показанная на рисунке 1. Прототипом поля скорости является винтовое движение, при котором среда движется вдоль внутренней оси тора и вращается вокруг неё. Поле скорости, удовлетворяющее условию несжимаемости, задаётся следующим способом:

$$\vec{V} = \left\{ 0, \frac{U \rho \lambda}{(\lambda - \rho \cos \theta) \sqrt{1 + \chi^2}}, \frac{U \chi}{\sqrt{1 + \chi^2}} \right\}, \quad (1)$$

где  $\lambda = r_c / R$  — безразмерный параметр кривизны,  $\chi$  — параметр, характеризующий степень закрученности поля скорости. Множитель  $\sqrt{1 + \chi^2}$  нормирует поле скорости так, чтобы скорость на границе канала ( $\rho = 1$ ) была порядка  $U$ .

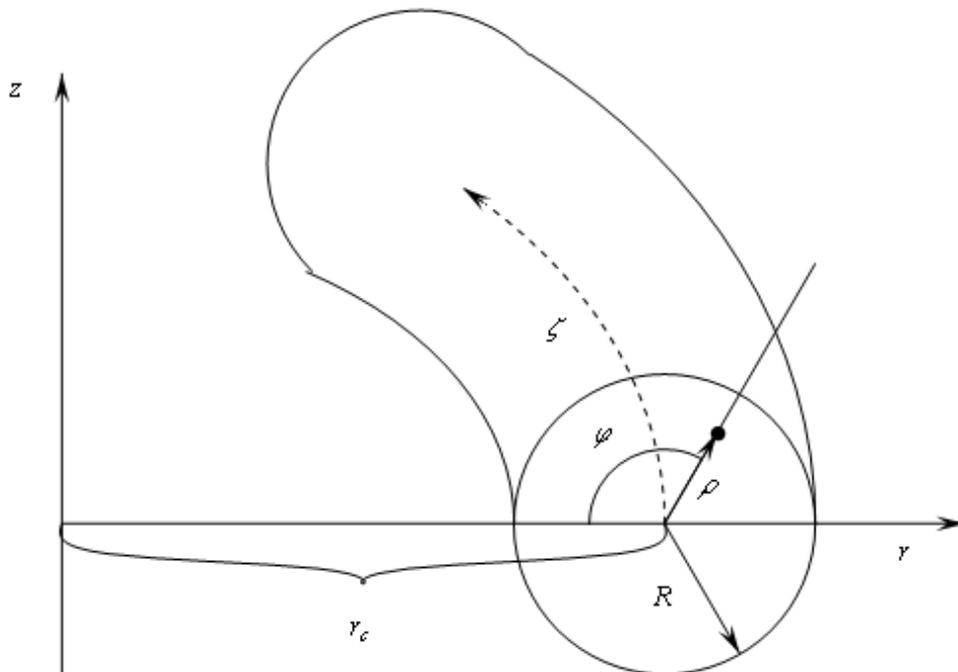


Рис. 1. Угловой сектор тора и система координат

Эволюция магнитного поля  $\vec{B}$  описывается уравнением индукции для движущейся среды, безразмерная форма которого имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{Rm} \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{B}), \quad (2)$$

где  $\vec{V}$  — поле скорости;  $\text{Rm} = UR/\eta$  — магнитное число Рейнольдса, характеризующее соотношение индукционных и диффузионных механизмов;  $\eta$  — коэффициент магнитной диффузии. Такой вид уравнения получается при выборе внутреннего радиуса тора  $R$  в качестве единицы длины, а диффузионного времени  $R^2/\eta$  — в качестве единицы времени.

Задача решается в кинематическом приближении. В этом случае поле скорости считается заданным. Это справедливо при условии, что энергия магнитного поля остается существенно меньше кинетической энергии движения.

Магнитное поле должно быть соленоидальным (выполняется условие  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ). Это создаёт значительные сложности при численном решении уравнения (2). Возникающую проблему можно обойти переходом к векторному магнитному потенциалу, определяемому формулой:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{Rm} \vec{V} \times (\nabla \times \vec{A}) + \Delta \vec{A} - \nabla \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \Phi, \quad (4)$$

где  $\Phi$  — электрический потенциал, а векторный потенциал  $\vec{A}$  определён с точностью до произвольного потенциального поля, что допускает использование калибровочных функций. Применение калибровки  $\nabla \cdot \vec{A} = \Phi$  приводит к взаимному уничтожению двух последних слагаемых в уравнении (4) [8]. Введение векторного потенциала решает также проблему разрыва поля скорости на границе тора. При решении уравнения (4) отпадает необходимость в вычислении пространственных производных от поля скорости. Решение для  $\vec{A}$  получается гладким, а для  $\vec{B}$  — непрерывным.

Постановка граничных условий в задачах динамо представляет собой отдельную проблему. В общем случае можно утверждать только то, что вдали от источников электрического тока магнитное поле затухает:  $\vec{B} \rightarrow 0$  на бесконечности. На практике граничные условия ставятся на границе расчётной области, достаточно удалённой от источников магнитного поля. Эта граница представляется разделом между проводником и вакуумом. На ней можно использовать условие непротекания электрического тока, которое формулируется в виде:  $A_{\perp} = 0$ ,  $\frac{\partial A_{\parallel}}{\partial n} = 0$ . С начальными условиями дело обстоит проще. На математическом языке генерация может рассматриваться как потеря устойчивости начального тривиального решения уравнения (4). Это значит, что начальное распределение магнитного поля представляет собой возмущения, которые со временем могут нарастать или затухать. В силу линейности уравнения индукции амплитуда возмущений изменяется по экспоненциальному закону

$$A \sim \exp(\gamma t + i \omega t), \quad (5)$$

где  $\gamma + i\omega$  — комплексный инкремент.

Минимальное значение магнитного числа Рейнольдса, при котором существует незатухающее возмущение, то есть  $\gamma \geq 0$ , соответствует критическому значению  $Rm^*$  и определяет важнейшую характеристику динамо – порог генерации. Поскольку заранее пространственная структура критического возмущения неизвестна, начальное распределение должно содержать весь спектр возмущений. Случайное равномерное распределение хорошо подходит для этой цели.

При заданных управляющих параметрах задачи  $Rm$ ,  $\lambda$  и  $\chi$  уравнение (4) решается численно двумя способами. В первом подходе тор погружается в прямоугольную сеточную область со сторонами  $L \times L \times H$  (Рис. 2, а). Размер области выбирается из тех соображений, что граница не должна оказывать влияния на полученное решение. Это достигается выбором  $L = 2(\lambda + 4)$  и  $H = 8$ . Такой подход является достаточно эффективным при умеренных значениях  $\lambda$ , соответствующих толстому тору. Однако при  $\lambda \gg 1$  тор становится тонким и слишком протяжённым в пространстве, так что большинство узлов сетки попадает в область, где нет генерации. К тому же количество узлов, необходимое для сохранения разрешения внутри канала, растёт как  $\lambda^2$ . Второй подход заключается в переходе к расчётной области вокруг тора, заданной в цилиндрической системе координат (Рис. 2, б). В случае нахождения решения, периодического вдоль канала, расчётная область представляет собой угловой сектор. Подобный выбор сетки и системы координат позволяет избежать сложностей поиска решения на внешней и внутренней осях тора.

Интегрирование по времени выполняется с использованием явной схемы Рунге-Кутты-Фельберга с коэффициентами Кэша-Карпа 5-го порядка точности с адаптивным выбором шага [9]. Пространственные производные аппроксимируются центральными разностями 6-го порядка точности:

$$f_i' = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{60} f_{i-3} + \frac{3}{20} f_{i-2} - \frac{3}{4} f_{i-1} + \frac{3}{4} f_{i+1} - \frac{3}{20} f_{i+2} + \frac{1}{60} f_{i+3} \right),$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{90} f_{i-3} - \frac{3}{20} f_{i-2} + \frac{3}{2} f_{i-1} - \frac{49}{18} f_i + \frac{3}{2} f_{i+1} - \frac{3}{20} f_{i+2} + \frac{1}{90} f_{i+3} \right).$$

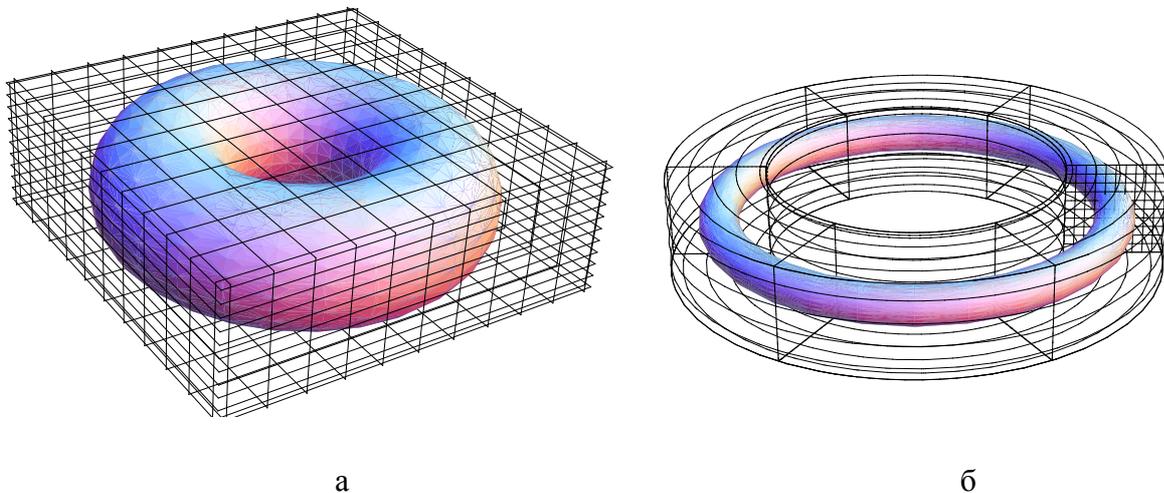


Рис. 2. Схема расчётных областей для толстого и тонкого тора

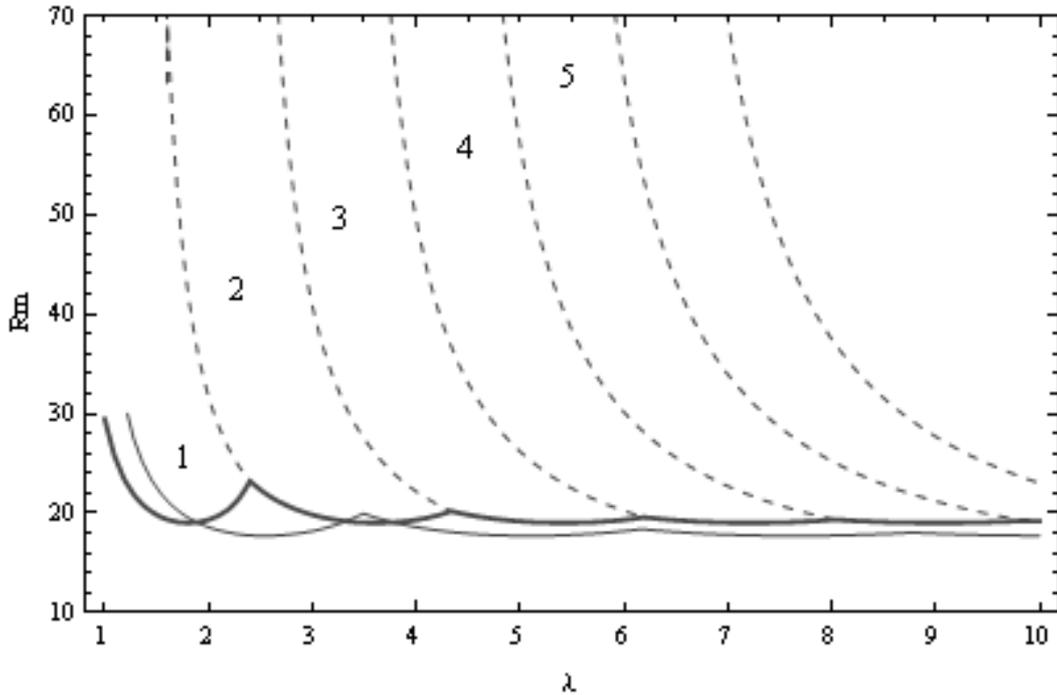
Для задания граничных условий применяются три ряда фиктивных узлов, что позволяет применять однотипные шаблоны конечных разностей для всех внутренних узлов сетки без потери точности аппроксимации. В расчётах используются сетки с разрешением до  $320 \times 320 \times 160$  узлов. Точность вычислительной схемы определяется сравнением с точным решением динамо Пономаренко. Численно определённые параметры генерируемой динамо волны отличаются от точных не более, чем на 2%. Задача решается на установление, до тех пор, пока из начального случайного распределения не выделится мода с максимальным значением  $\gamma$  и амплитудой, зависящей от времени по закону (5). Обычно время установления не превышает 20 единиц времени.

Эффективным инструментом для решения задач подобного масштаба являются многопроцессорные вычислительные комплексы. Описанная численная схема адаптирована для выполнения параллельных вычислений с использованием библиотеки MPI. Алгоритм тестировался на 16-процессорном кластере Института механики сплошных сред УрО РАН, а основные расчёты выполнялись на 104-процессорном кластере Института математики и механики УрО РАН. При запуске задачи на 32 вычислительных ядрах эффективность использования кластера составляла порядка 75%, что соответствовало ускорению в 25 раз по сравнению со временем вычисления на одном процессоре.

## 2. Результаты

Винтовое динамо представляет собой гармоническую волну, бегущую вдоль канала и вращающуюся вокруг него. Динамо-волна характеризуется волновым числом  $k$ , инкрементом роста  $\gamma$  и фазовой скоростью  $\omega/k$ . Для задачи Пономаренко, где рассматривается винтовое движение бесконечного цилиндра, для заданного параметра закрутки  $\chi$  существует свое критическое значение магнитного числа Рейнольдса  $Rm^*$ , которому соответствует единственное критическое значение волнового числа  $k^*$ . Так, например, при  $\chi = 1$  и  $Rm^* \approx 19$  генерируется волна  $k^* \approx -0,56$ . Поскольку тор является замкнутым по  $\zeta$  каналом, то спектр волновых чисел  $k$  дискретен и в торе должно укладываться целое число волн. Это означает, что при фиксированном  $\lambda$  возможна генерация динамо-волн только с волновыми числами  $k_n = n/\lambda$ , где  $n$  — натуральные числа. Поскольку данная последовательность не всегда содержит  $k^*$ , критической оказывается динамо-волна с другим волновым числом, что приводит к нетривиальной зависимости порога генерации  $Rm^*(\lambda)$  — нейтральной кривой. На рисунке 3 показаны результаты расчёта, полученные для цилиндрической области с периодическими граничными условиями ( $\lambda$  определяет длину цилиндра). Сплошная толстая линия соответствует порогу генерации при  $\chi = 1$ , а изломы — смене числа  $n^*$ .

В надкритической области  $Rm > Rm^*$  волна с заданным  $n$  доминирует только в ограниченном диапазоне магнитных чисел Рейнольдса. Пунктирные линии на рисунке 3 разделяют область параметров на подобласти, где доминирует волна с указанной модой  $n$ . Полученные результаты показывают, что порог генерации особенно чувствителен к значению  $\lambda$  в случае толстого тора (малые  $\lambda$ ). Однако при экспериментальной реализации выбор  $\lambda$  в большей степени обусловлен конструктивными особенностями установки. Изменения положения максимумов и минимумов на нейтральной кривой можно добиться, варьируя степень закрученности винтового движения  $\chi$ . Тонкой линией показана зависимость  $Rm^*(\lambda)$  для  $\chi = 1.3$ . Видно, что в интервале  $2 < \lambda < 3$

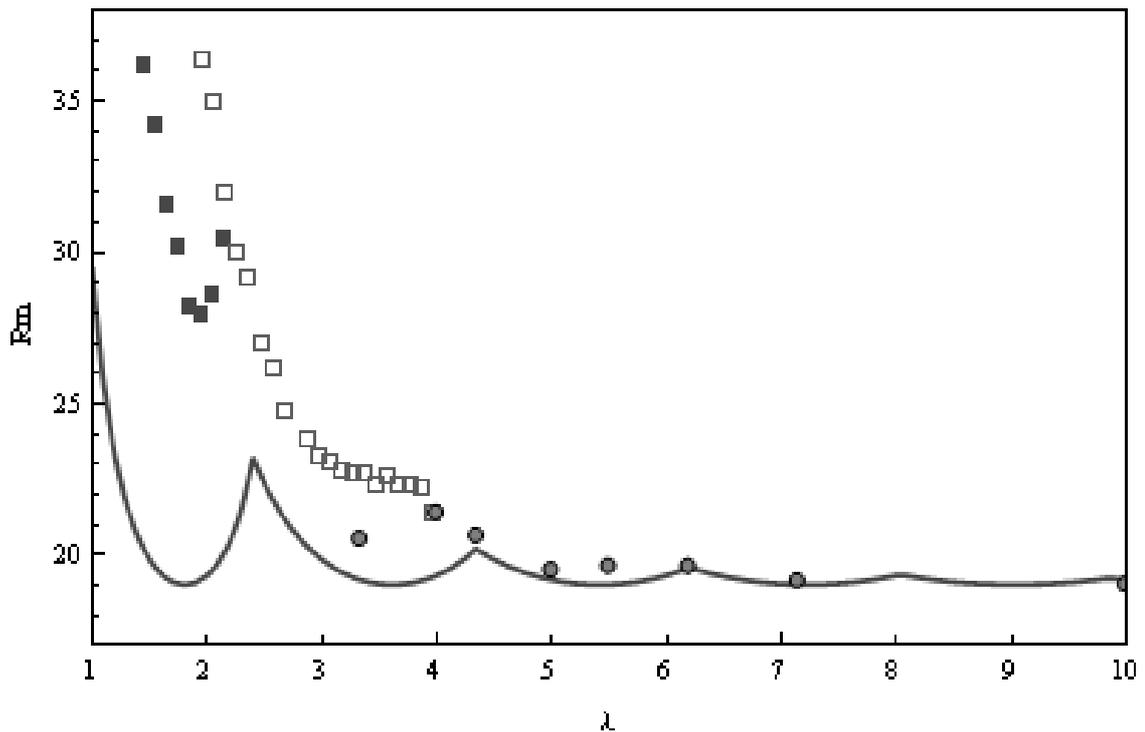


**Рис. 3.** Области существования динамо-волн с различным числом  $n$  для  $\chi = 1$   
(решение для цилиндра с периодическими граничными условиями)

порог генерации существенно ниже, чем при  $\chi = 1$ . В эксперименте  $\chi$  можно изменить за счет увеличения или уменьшения наклона лопаток дивертора, который задает вращение потока.

На порог генерации влияет не только дискретность спектра, но и кривизна тора. Это влияние иллюстрирует рисунок 4, на котором сплошная линия (нейтральная кривая), в цилиндрической постановке, показана вместе с результатами расчёта тороидальной задачи для случая толстого (Рис. 2, а) и тонкого (Рис. 2, б) торов. Полученные критические значения  $Rm^*(\lambda)$  существенно отходят от нейтральной кривой для цилиндра. Расхождение тем сильнее, чем больше кривизна тора (или меньше  $\lambda$ ). Значения  $\lambda$ , при которых происходит смена числа  $n$  для доминирующей волны, становятся меньше. Результаты расчётов в приближении тонкого тора согласуются с результатами расчётов в толстом торе для  $\lambda > 4$ .

Детального рассмотрения заслуживает пространственная структура генерируемых мод. При небольшой надкритичности в толстом торе (при малых  $\lambda$ ) возбуждается волна с  $n=1$ . На рисунке 5 показана структура магнитного поля для  $Rm=28$ ,  $\lambda=2$  и  $\chi=1$ : объёмные изоповерхности магнитного поля (Рис. 5, а) и распределение магнитного поля в вертикальном сечении (Рис. 5, б). Изоповерхности представляют собой две трубки, внутри которых магнитная энергия достигает максимума. Отличие между ними состоит в том, что составляющая магнитного поля  $B_\zeta$  имеет в них противоположные направления. Это хорошо видно на распределении магнитного поля в вертикальном сечении, где направление в плоскости показано стрелками, а цвет отображает перпендикулярную компоненту (белый цвет — максимум, черный — минимум). Две окружности соответствуют границе тора. Как и для динамо в цилиндре, максимум поля наблюдается на границе тора, где сдвиг скорости максимален. Однако в толстом торе появляется

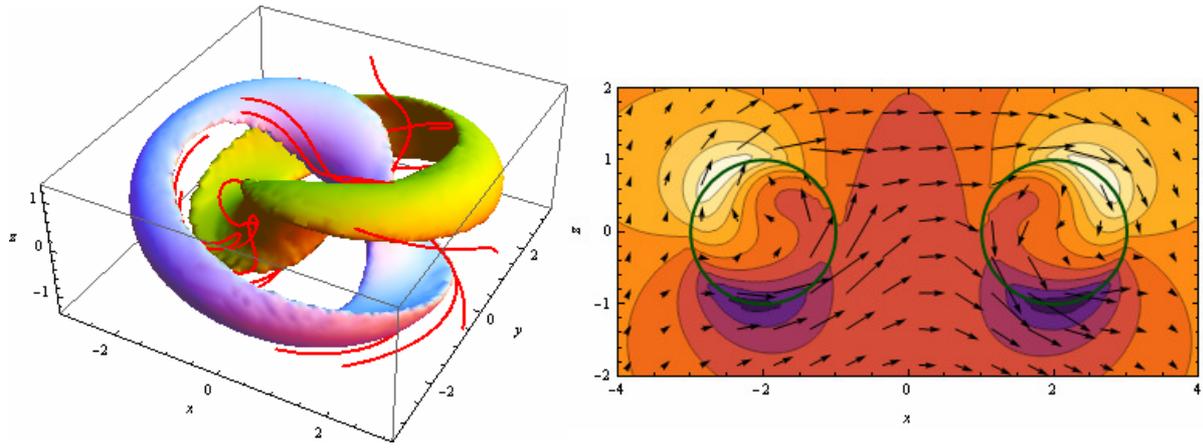


**Рис. 4.** Зависимость порога генерации от кривизны. Кружками показаны результаты моделирования в тонком торе, квадратами – в толстом торе. Линия соответствует результатам для цилиндра с условием периодичности

горизонтальное магнитное поле, не затухающее при приближении к его внешней оси. Напряжённость поля на оси достаточно велика и составляет 35% от максимального по масштабам магнитного поля является диаметр сечения, то для моды  $n=1$  в толстом торе масштаб поля становится порядка максимального геометрического размера тора ( $\sim 2r_c$ ). Крупномасштабное поле возникает в результате того, что диаметрально противоположные части тора генерируют магнитные поля, согласованные по пространственной структуре. Отметим, что такая особенность может наблюдаться только для  $n=1$ , так как из соображений симметрии для всех прочих значений  $n$ , включая  $n=0$  (осесимметричный случай), горизонтальная компонента поля на оси должна равняться нулю.

При увеличении  $R_m$  в толстом торе, как и в цилиндре, лидирующей модой становится динамо волна с  $n=2$ . На рисунке 4 пустыми квадратами показан порог генерации этой моды. Видно, что он существенно выше, чем порог генерации для цилиндрической задачи. Структура магнитного поля для этого случая показана на рисунке 6. Изоповерхности переплетаются более сложным образом (Рис. 6, а), а магнитное поле вблизи внешней оси затухает (Рис. 6, б).

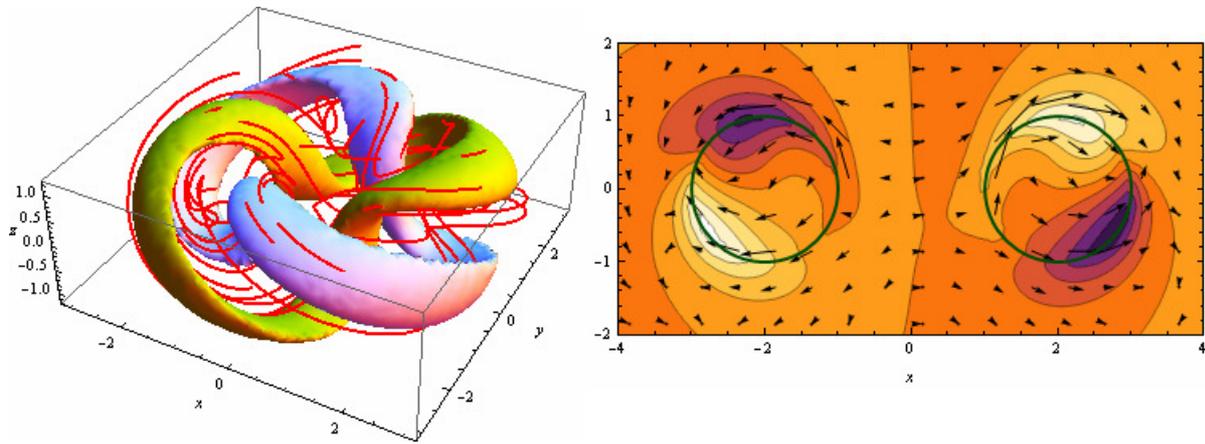
Эволюция структуры магнитного поля при увеличении параметра  $\lambda$  (тор становится тоньше) изображена на рисунке 7. Магнитное число Рейнольдса имеет значение  $R_m=38$  (как и на Рис. 6), но  $\lambda=3$ . Лидирующей модой становится мода  $n=3$  (Рис. 7, а). Поле практически не достигает внешней оси тора и перестает испытывать влияние диаметрально противоположной части тора, хотя фактор кривизны остаётся существенным до  $\lambda \approx 4$  (Рис. 7, б).



а

б

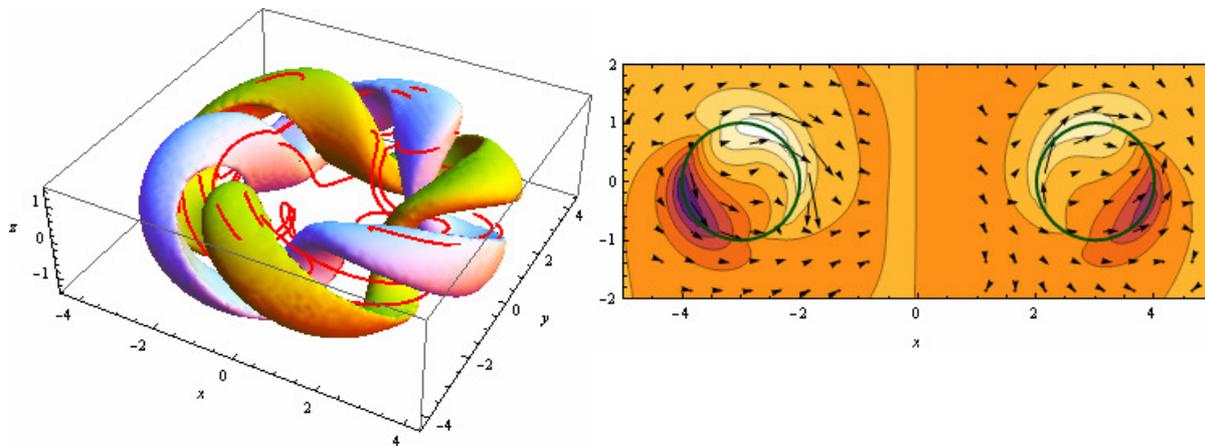
Рис. 5. Магнитное поле в торе.  $Rm=28$ ,  $\lambda = 2$  (см. пояснения в тексте)



а

б

Рис. 6. Магнитное поле в торе.  $Rm=38$ ,  $\lambda = 2$



а

б

Рис. 7. Магнитное поле в торе.  $Rm=38$ ,  $\lambda = 3$

### 3. Выводы

Численное моделирование генерации магнитного поля при винтовом движении проводящей среды в торе подтвердили, что задача для тонкого тора при  $\lambda > 4$  в пределе стремится к хорошо изученному случаю винтового динамо в цилиндре. В толстом торе (малые  $\lambda$ ) становятся существенными два фактора: дискретность спектра возбуждаемых волновых мод, приводящая к немонотонному виду нейтральной кривой, и кривизна области генерации, нарушающая симметрию генерируемого магнитного поля.

Принципиально новое для винтовых динамо решение появляется в толстом торе при генерации моды  $n = 1$ . В этом случае возникает «глобальное» магнитное поле, не затухающее на внешней оси тора и имеющее масштаб максимального геометрического размера тора.

Важным представляется вывод о возможности понижения порога генерации магнитного поля в толстом торе путем изменения параметра закрутки потока.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00234). Вычислительные ресурсы (16-процессорный кластер) предоставлены в рамках программы № 14 фундаментальных исследований Президиума РАН, раздел II «Высокопроизводительные вычисления и многопроцессорные системы».

### Литература

1. Пономаренко Ю.Б. К теории гидродинамического динамо // ПМТФ. – 1973, N 6. – С. 47-51.
2. Ruzmaikin A., Sokoloff D., Shukurov A. Hydromagnetic screw dynamo // J. Fluid Mechanics. – 1988. – V. 197. – P. 39-56.
3. Луян Е., Шукуров А. Винтовое динамо в реальных потоках // Магнитная гидродинамика. – 1992. – N. 3. – С. 29-36.
4. Gailitis A., Lielausis O., Dement'ev S., Platācis E., Ciferons A., Gerbeth G., Gundrum T., Stefani F., Christen M., Huenel, H. Will G. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility // Phys.Rev.Letters. – 2000. – V. 84. – P. 4365-4368.
5. Stefani F., Gerbeth G., Gailitis A.A. Velocity profile optimization for the Riga dynamo experiment // Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows / Ed. A. Alemany, Ph. Marty, J.P. Thibault. – Kluwer Academic Publishers. – 1999. – С. 31.
6. Frick P., Noskov V., Denisov S., Khripchenko S., Sokoloff D., Stepanov R., Sukhanovsky A. Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment // Magnetohydrodynamics. – 2002. – V. 38, N. 1-2. – P. 136-155.
7. Степанов Р.А., Фрик П.Г. Винтовое МГД-динамо в реальных потоках в трубах // Сб. науч. трудов Пермского университета «Гидродинамика». – Пермь: Изд-во ПГУ, 1999. – N. 12. – С. 240-251.
8. Dobler W., Frick P., Stepanov R, The screw dynamo in a time-dependent pipe flow // Physical Review E. – 2003. – T. 67. – P. 056309.
9. Cash J.R., Karp A.H. A variable order Runge-Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides // ACM Transactions on Mathematical Software. – 1990 – V. 16, N. 3. – P. 201-222.