

## АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРЕСКА

Б.Д. Аннин, В.В. Алёхин, В.В. Остапенко

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия*

Рассматривается задача о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой поверхности, на которой действуют нормальное давление, касательные усилия и заданные скорости перемещений. В случае полной пластичности система квазистатических уравнений идеальной пластичности Треска, описывающих напряженно-деформированное состояние среды, является гиперболической. Для численного решения этой системы предложена разностная схема, применяемая для гиперболических систем законов сохранения.

## THE ALGORITHM OF NUMERICAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR TRESCA'S PLASTICITY EQUATIONS

B.D. Annin, V.V. Alyokhin and V.V. Ostapenko

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia*

The problem of propagation of plastic zones in an unbounded medium from the boundary of a convex surface under normal pressure, tangential forces and given velocities is studied. When the medium is in the state of full plasticity, the system of quasistatic ideal plasticity Tresca equations describing the stress-strain state is hyperbolic. The difference scheme applied to hyperbolic systems of equations is proposed for the numerical solution of this system.

В случае полной пластичности квазистатические уравнения идеальной пластичности Треска для определения напряжений имеют вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial x_3} = 0; \quad (1)$$

$$\mathbf{t}_1 = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})^T, \quad \mathbf{t}_2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})^T, \quad \mathbf{t}_3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})^T; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + 2k\varepsilon \left[ n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right], \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (3)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты симметричного тензора напряжений в декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  с базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ;  $\sigma$  — среднее напряжение;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $k$  — предел текучести при чистом сдвиге;  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$  — единичный собственный вектор, соответствующий главному напряжению

$$\sigma_1 = \sigma + \frac{4}{3}k\varepsilon, \quad (4)$$

два других главных напряжения совпадают:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma - \frac{2}{3}k\varepsilon. \quad (5)$$

По повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Определяемый равенствами (2) с учетом (3) тензор напряжений удовлетворяет условию пластичности Треска:

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = 2k.$$

Зависящие от  $x_1, x_2, x_3$  функции  $\sigma, n_1, n_2, n_3$  определяются из системы уравнений первого порядка, получаемой путем подстановки выражений (2) и (3) в (1). Эта система является гиперболической и имеет вид

$$\begin{aligned} n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} + n_1 \theta &= -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ n_1 \frac{\partial n_2}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial n_2}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial x_3} + n_2 \theta &= -\frac{\partial p}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$n_1 \frac{\partial n_3}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial n_3}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial n_3}{\partial x_3} + n_3 \theta = -\frac{\partial p}{\partial x_3},$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad \theta = \frac{\partial n_1}{\partial x_1} + \frac{\partial n_2}{\partial x_2} + \frac{\partial n_3}{\partial x_3}, \quad p = \frac{\sigma}{2k\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$

Свойства системы (6) рассмотрены в работах [2–4].

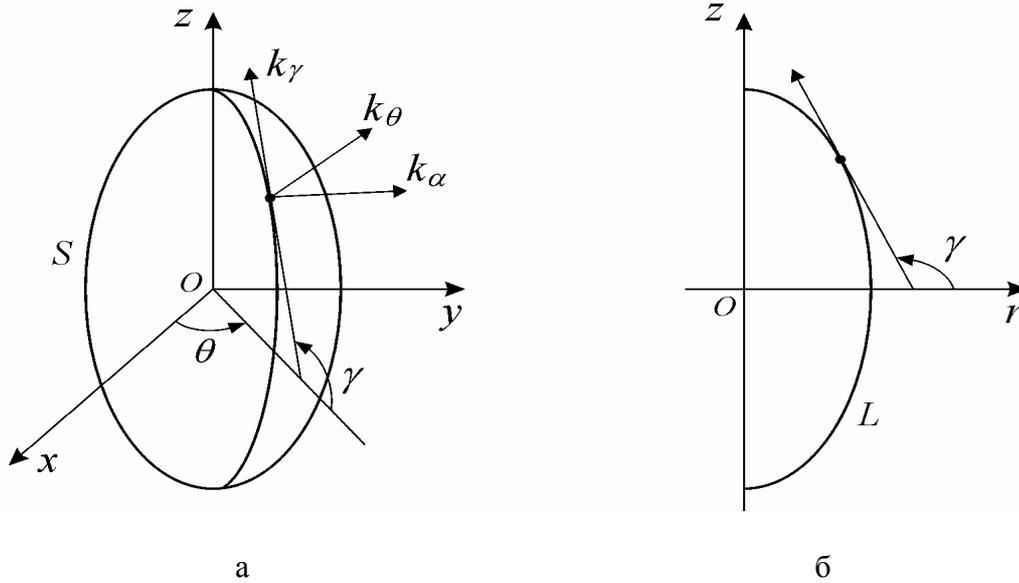
Поле скоростей перемещений  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  в случае полной пластичности определяется из системы соотношений, включающей в себя условие несжимаемости среды

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0 \quad (7)$$

и условие, что единичный собственный вектор  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ , соответствующий главному напряжению (4), также является собственным вектором тензора скоростей деформаций ( $e_{ij}$ )

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (8)$$

где  $\lambda$  — собственное значение тензора скоростей деформации ( $e_{ij}$ ).



Ортогональная криволинейная система координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ : а — координатная поверхность  $S$  ( $\alpha = 0$ ) и базисные векторы  $\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\theta, \mathbf{k}_\gamma$ ; б — образующая  $L$  координатной поверхности

Для решения задачи о распространении зон пластического состояния от границы выпуклой поверхности, на которой действуют нормальное давление, касательные усилия и заданны скорости перемещений, используем численные алгоритмы гидромеханики [5-7].

Пусть  $S$  — достаточно гладкая замкнутая выпуклая поверхность, причем начало координат системы  $(x, y, z)$  лежит внутри  $S$  (Рис., а). Поверхность  $S$  образована вращением выпуклой кривой  $L$  (см. рисунок, б), расположенной в плоскости  $(r, z)$ , где  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , причем кривая  $L$  пересекает ось  $z$  под прямыми углами, а радиус кривизны  $\rho$  кривой  $L$  в любой ее точке не меньше  $\rho_* > 0$ .

Уравнения кривой  $L$  запишем в параметрическом виде:

$$r(\gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma, \quad z(\gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - F(\gamma) \cos \gamma. \quad (9)$$

Здесь  $\gamma$  — угол между касательной и осью  $r$ ;  $F(\gamma)$  — опорная функция контура  $L$ . Очевидно, что  $r(\gamma) \geq 0$  при  $0 \leq \gamma \leq \pi$ . Радиус кривизны кривой  $L$  вычисляется по формуле

$$\rho = \rho(\gamma) = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{dr(\gamma)}{d\gamma} = F(\gamma) + \frac{d^2 F(\gamma)}{d\gamma^2} \geq \rho_* > 0. \quad (10)$$

Уравнения поверхности  $S$  запишем в виде

$$\begin{aligned} x_s(\theta, \gamma) &= \left[ \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma \right] \cos \theta, \\ y_s(\theta, \gamma) &= \left[ \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

$$z_s(\theta, \gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - F(\gamma) \cos \gamma.$$

Введем ортогональную криволинейную систему координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ :

$$\begin{aligned} x(\alpha, \theta, \gamma) &= \left[ \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + (F(\gamma) + \alpha) \sin \gamma \right] \cos \theta, \\ y(\alpha, \theta, \gamma) &= \left[ \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + (F(\gamma) + \alpha) \sin \gamma \right] \sin \theta, \\ z(\alpha, \theta, \gamma) &= \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - (F(\gamma) + \alpha) \cos \gamma, \\ \alpha &\geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (12)$$

Якобиан преобразования координат  $J(\alpha, \theta, \gamma)$  неотрицателен:

$$J(\alpha, \theta, \gamma) = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \theta, \gamma)} = (\rho(\gamma) + \alpha)(r(\gamma) + \alpha \sin \gamma) \geq 0.$$

Из (12) следует, что поверхность  $\alpha = \text{const}$  представляет собой поверхность, равноудаленную от поверхности  $S$ . Выражения для единичных векторов координатных линий (Рис., а) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\alpha &= (\sin \gamma \cos \theta, \sin \gamma \sin \theta, -\cos \gamma)^\top, \\ \mathbf{k}_\theta &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0)^\top, \\ \mathbf{k}_\gamma &= (\cos \gamma \cos \theta, \cos \gamma \sin \theta, \sin \gamma)^\top. \end{aligned} \quad (13)$$

Запишем уравнения равновесия (1)–(3) в ортогональной системе координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ . Напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma}$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{t}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{t}_\gamma}{\partial \gamma} = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha &= H_\theta H_\gamma (\sigma_{\alpha\alpha} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\alpha\theta} \mathbf{k}_\theta + \sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\gamma), \\ \mathbf{t}_\theta &= H_\alpha H_\gamma (\sigma_{\alpha\theta} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\theta\theta} \mathbf{k}_\theta + \sigma_{\theta\gamma} \mathbf{k}_\gamma), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\gamma &= H_\alpha H_\theta (\sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\theta\gamma} \mathbf{k}_\theta + \sigma_{\gamma\gamma} \mathbf{k}_\gamma); \\ H_\alpha &= 1, \quad H_\theta = r(\gamma) + \alpha \sin \gamma, \quad H_\gamma = \rho(\gamma) + \alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключая из системы (14) с учетом (15) базисные векторы (13), запишем ее в форме неоднородной системы законов сохранения

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial \gamma} = \mathbf{f}, \quad (17)$$

где

$$\bar{\mathbf{u}} = H_\theta H_\gamma \mathbf{u}_*, \quad \bar{\mathbf{v}} = H_\gamma \mathbf{v}_*, \quad \bar{\mathbf{w}} = H_\theta \mathbf{w}_*; \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_* = (\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\alpha\gamma})^\top, \quad \mathbf{v}_* = (\sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\gamma})^\top, \quad \mathbf{w}_* = (\sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\theta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma})^\top; \quad (19)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} H_\gamma \sigma_{\theta\theta} \sin \gamma + H_\theta \sigma_{\gamma\gamma} \\ -H_\gamma (\sigma_{\theta\gamma} \cos \gamma + \sigma_{\alpha\theta} \sin \gamma) \\ \frac{\partial H_\theta}{\partial \gamma} \sigma_{\theta\theta} - H_\theta \sigma_{\alpha\gamma} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = p + n_\alpha^2, \quad \sigma_{\alpha\theta} = n_\alpha n_\theta, \quad \sigma_{\alpha\gamma} = n_\alpha n_\gamma; \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p + n_\theta^2, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = p + n_\gamma^2, \quad \sigma_{\theta\gamma} = n_\theta n_\gamma. \quad (21)$$

В выражениях (20) и (21) напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\gamma\gamma}, \sigma_{\theta\gamma}$  — компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$  (3) в ортогональной криволинейной системе координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ , деленные на  $2k\varepsilon$ ;  $p = \sigma / (2k\varepsilon) - 1/3$ . Величины  $n_\alpha, n_\theta, n_\gamma$  представляют собой компоненты единичного собственного вектора  $\mathbf{n}$ , соответствующего главному напряжению (4) в системе координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ :

$$\mathbf{n} = n_\alpha \mathbf{k}_\alpha + n_\theta \mathbf{k}_\theta + n_\gamma \mathbf{k}_\gamma, \quad n_\alpha^2 + n_\theta^2 + n_\gamma^2 = 1. \quad (22)$$

Векторное уравнение (17) и соотношение (22) образуют замкнутую систему для определения величин  $p, n_\alpha, n_\theta, n_\gamma$  как функций  $\alpha, \theta, \gamma$ .

Запишем теперь систему уравнений (7), (8) для поля скоростей перемещений  $\mathbf{u} = (u_\alpha, u_\theta, u_\gamma)^\top$  в ортогональной системе координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ . Смещения  $u_\alpha, u_\theta, u_\gamma$  удовлетворяют линейной неоднородной гиперболической системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} + A(\alpha, \theta, \gamma) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} + B(\alpha, \theta, \gamma) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \gamma} = \mathbf{f}, \quad (23)$$

где

$$A(\alpha, \theta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{H_\theta} & 0 \\ \frac{1}{H_\theta} & \frac{2n_\theta}{n_\alpha H_\theta} & \frac{n_\gamma}{n_\alpha H_\theta} \\ 0 & 0 & \frac{n_\theta}{n_\alpha H_\theta} \end{bmatrix}, \quad B(\alpha, \theta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{H_\gamma} \\ 0 & \frac{n_\gamma}{n_\alpha H_\gamma} & 0 \\ \frac{1}{H_\gamma} & \frac{n_\theta}{n_\alpha H_\gamma} & \frac{2n_\gamma}{n_\alpha H_\gamma} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\sin \gamma}{H_\theta} + \frac{1}{H_\gamma}\right)u_\alpha - \frac{\cos \gamma}{H_\theta}u_\gamma \\ \left(\frac{\sin \gamma}{H_\theta} + \frac{n_\gamma \cos \gamma}{n_\alpha H_\theta}\right)u_\theta - \frac{2n_\theta}{n_\alpha H_\theta}(u_\alpha \sin \gamma + u_\gamma \cos \gamma) + 2\lambda \frac{n_\theta}{n_\alpha} \\ -\frac{2n_\gamma}{n_\alpha H_\gamma}u_\alpha + \frac{n_\theta \cos \gamma}{n_\alpha H_\theta}u_\theta + \frac{1}{H_\gamma}u_\gamma + 2\lambda \frac{n_\gamma}{n_\alpha} \end{bmatrix},$$

$$\lambda = \left[ e_{\theta\theta} (n_\alpha^2 + n_\theta^2) + e_{\gamma\gamma} (n_\alpha^2 + n_\gamma^2) + 2e_{\theta\gamma} n_\theta n_\gamma \right] / (1 - 2n_\alpha^2),$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{H_\theta} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\alpha \sin \gamma + u_\gamma \cos \gamma \right], \quad e_{\gamma\gamma} = \frac{1}{H_\gamma} \left[ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + u_\alpha \right],$$

$$2e_{\theta\gamma} = \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial u_\theta}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_\theta} \left[ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \theta} - u_\theta \cos \gamma \right],$$

функции  $n_\alpha, n_\theta, n_\gamma$  находятся из системы (17), (22).

Для систем (17), (22) и (23) поставим следующие задачи Коши. На поверхности  $S$ , определяемой формулами (11), то есть  $\alpha = 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , заданы начальные значения функций  $p, n_\alpha, n_\theta, n_\gamma$  и  $u_\alpha, u_\theta, u_\gamma$ . Требуется найти эти функции при  $\alpha > 0$ . При такой постановке задач Коши величина  $\alpha$  представляет собой независимую эволюционную переменную, а системы (17), (22) и (23) решаются последовательно и, по крайней мере вблизи поверхности  $S$ , являются  $\alpha$ -гиперболическими [5, 6]. Для их численного решения используем разностные схемы, применяемые для гиперболических систем законов сохранения [5, 7].

В прямоугольной области  $\Pi = \{\theta, \gamma : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \gamma \leq \pi\}$  введем равномерную разностную сетку  $\theta_i = ih_1$ ,  $\gamma_j = jh_2$ ,  $i = \overline{1, N_1}$ ,  $j = \overline{1, N_2}$ , где  $h_1 = 2\pi / N_1$ ,  $h_2 = \pi / (N_2 - 1)$  — постоянные шаги сетки. При  $i = \overline{1, N_1}$ ,  $j = \overline{2, N_2 - 1}$  аппроксимируем систему (17) следующей явной двухслойной по времени и симметричной по пространству разностной схемой

$$\frac{\bar{\mathbf{u}}_{ij}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{ij}^n}{\tau_n} + \frac{\bar{\mathbf{v}}_{i+1,j}^n - \bar{\mathbf{v}}_{i-1,j}^n}{2h_1} + \frac{\bar{\mathbf{w}}_{i,j+1}^n - \bar{\mathbf{w}}_{i,j-1}^n}{2h_2} = \mathbf{f}_{ij}^n + \mathbf{W}_{ij}^n, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{W}_{ij}^n = C_1 \frac{\bar{\mathbf{v}}_{i+1,j}^n - 2\bar{\mathbf{v}}_{ij}^n + \bar{\mathbf{v}}_{i-1,j}^n}{h_1} + C_2 \frac{\bar{\mathbf{w}}_{i,j+1}^n - 2\bar{\mathbf{w}}_{ij}^n + \bar{\mathbf{w}}_{i,j-1}^n}{h_2} \quad \text{— искусственная вязкость,}$$

коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  которой подбираются из тестовых расчетов.

В (24) и ниже для всех сеточных функций введены сокращенные обозначения:

$$\bar{\mathbf{g}}_{ij}^n = \bar{\mathbf{g}}(\alpha_n, \theta_i, \gamma_j), \quad g_{ij}^n = g(\alpha_n, \theta_i, \gamma_j), \quad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k, \quad \alpha_0 = 0$$

( $\tau_k$  — переменный шаг по эволюционной переменной  $\alpha$ ). Поскольку искомое решение является периодическим по переменной  $\theta$ , в формуле (24) предполагается, что  $\theta_0 = \theta_{N_1}$ ,  $\theta_{N_1+1} = \theta_1$ .

В граничных узлах  $j=1$  и  $j=N_2$ , то есть в полюсах  $\gamma=0$  и  $\gamma=\pi$ , происходит вырождение уравнений (17) по переменной  $\theta$ . Известно, что для гладкой поверхности вращения  $S$  (11) в каждом из полюсов оба главных радиуса кривизны  $r_1(\gamma) = \rho(\gamma)$  (10) и  $r_2(\gamma) = r(\gamma) / \sin \gamma$ , где  $r(\gamma)$  определяется формулой (9), совпадают и равны  $\rho(0)$  и  $\rho(\pi)$  соответственно. Анализ уравнений (17) показывает, что при  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow \pi$  систему (17) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\gamma^2 \mathbf{u}_*) = \mathbf{f}, \quad (25)$$

где

$$\mathbf{f} = H_\gamma [\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\gamma\gamma}, -\sigma_{\alpha\theta}, -\sigma_{\alpha\gamma}]^T, \quad H_\gamma = \rho(\gamma) + \alpha, \quad \gamma = 0, \pi.$$

Для приближенного вычисления сеточных функций

$$\mathbf{g}_{i1}^n = \tilde{\mathbf{g}}_1^n, \quad \mathbf{g}_{iN_2}^n = \tilde{\mathbf{g}}_{N_2}^n, \quad i = \overline{1, N_1}$$

в граничных узлах  $j=1$  и  $j=N_2$  можно использовать следующую разностную схему при аппроксимации системы (25):

$$\frac{(H_\gamma^2 \tilde{\mathbf{u}}_*)_m^{n+1} - (H_\gamma^2 \tilde{\mathbf{u}}_*)_m^n}{\tau_n} = \tilde{\mathbf{f}}_m^n, \quad m = 1, N_2. \quad (26)$$

После нахождения величин  $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\alpha\gamma}$  на  $(n+1)$ -ом слое из разностных уравнений (24), (26) с учетом (16), (18), (19) основные сеточные функции  $p, n_\alpha, n_\theta, n_\gamma$  в каждом узле  $(i, j)$  этого слоя определяются из системы алгебраических уравнений (20), (22). Решая эту систему в предположении, что в процессе счета  $d \equiv \sigma_{\alpha\theta}^2 + \sigma_{\alpha\gamma}^2 < 1/4$ , получим

$$n_\alpha = \sqrt{(1 + \sqrt{1 - 4d})} / 2, \quad p = \sigma_{\alpha\alpha} - n_\alpha^2, \quad n_\theta = \sigma_{\alpha\theta} / n_\alpha, \quad n_\gamma = \sigma_{\alpha\gamma} / n_\alpha.$$

Величины  $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\gamma\gamma}, \sigma_{\theta\gamma}$ , входящие в систему (17)–(19), вычисляются по формулам (21).

После определения функций  $n_\alpha, n_\theta, n_\gamma$  на  $(n+1)$ -ом слое скорости смещений  $u_\alpha, u_\theta, u_\gamma$  находятся из системы (23), которая при  $i = \overline{1, N_1}$ ,  $j = \overline{2, N_2 - 1}$  аппроксимируется следующей разностной схемой:

$$\frac{\mathbf{u}_{ij}^{n+1} - \mathbf{u}_{ij}^n}{\tau_n} + A_{ij}^n \frac{\mathbf{u}_{i+1,j}^n - \mathbf{u}_{i-1,j}^n}{2h_1} + B_{ij}^n \frac{\mathbf{u}_{i,j+1}^n - \mathbf{u}_{i,j-1}^n}{2h_2} = \mathbf{f}_{ij}^n + \mathbf{W}_{ij}^n, \quad (27)$$

где  $\mathbf{W}_{ij}^n = C_1 \frac{\mathbf{u}_{i+1,j}^n - 2\mathbf{u}_{ij}^n + \mathbf{u}_{i-1,j}^n}{h_1} + C_2 \frac{\mathbf{u}_{i,j+1}^n - 2\mathbf{u}_{ij}^n + \mathbf{u}_{i,j-1}^n}{h_2}$  — искусственная вязкость, коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  которой те же самые, что и в разностной схеме (24).

В граничных узлах  $j=1$  и  $j=N_2$  (в полюсах  $\gamma=0$  и  $\gamma=\pi$ ), где происходит вырождение уравнений (23) по переменной  $\theta$  систему (23) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} = \mathbf{f}, \quad (28)$$

где

$$\mathbf{f} = \left[ -\frac{2}{H_\gamma} u_\alpha, \frac{1}{H_\gamma} u_\theta - \frac{2n_\theta}{n_\alpha H_\gamma} u_\alpha + 2\lambda \frac{n_\theta}{n_\alpha}, \frac{1}{H_\gamma} u_\gamma - \frac{2n_\gamma}{n_\alpha H_\gamma} u_\alpha + 2\lambda \frac{n_\gamma}{n_\alpha} \right]^T,$$

$$\lambda = \frac{u_\alpha}{H_\gamma} \frac{1+n_\alpha^2}{1-2n_\alpha^2}, \quad H_\gamma = \rho(\gamma) + \alpha, \quad \gamma = 0, \pi.$$

Для приближенного вычисления сеточных функций

$$\mathbf{u}_{i1}^n = \tilde{\mathbf{u}}_1^n, \quad \mathbf{u}_{iN_2}^n = \tilde{\mathbf{u}}_{N_2}^n, \quad i = \overline{1, N_1}$$

в граничных узлах  $j=1$  и  $j=N_2$  можно использовать следующую разностную схему при аппроксимации системы (28):

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}_m^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_m^n}{\tau_n} = \tilde{\mathbf{f}}_m^n, \quad m = 1, N_2. \quad (29)$$

В разностных схемах (24), (26) и (27), (29) шаг  $\tau_n$  по эволюционной переменной  $\alpha$  определяется из условия устойчивости Куранта [7] по формуле

$$\tau_n = \frac{\kappa_* \left[ \alpha_n + \min_j \rho(\gamma_j) \right] \min(h_1, h_2)}{\max_{i,j} (\lambda_{ij}^n, (\lambda^{-1})_{ij}^n, \mu_{ij}^n, \nu_{ij}^n)},$$

где  $\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \nu$  — скорости распространения малых возмущений вблизи поверхности  $S(\alpha_n)$ ;  $\lambda = \sqrt{(1+2a)/(1-2a)}$ ;  $\mu = b + \sqrt{b^2 + 1/H_\theta^2}$ ;  $\nu = c + \sqrt{c^2 + 1/H_\gamma^2}$ ;  $a = n_\alpha \sqrt{n_\theta^2 + n_\gamma^2}$ ;  $b = n_\theta / (n_\alpha H_\theta)$ ;  $c = n_\gamma / (n_\alpha H_\gamma)$ ;  $\mu$  и  $\nu$  — это положительные максимальные собственные значения матриц  $A(\alpha, \theta, \gamma)$  и  $B(\alpha, \theta, \gamma)$  системы (23);  $\kappa_* \leq 1$  — коэффициент запаса в условии устойчивости.

Численные эксперименты показали хорошую работоспособность предложенного алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00749) и Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (грант НШ-3066.2008.1).

## Литература

1. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
2. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю., Непершин Р.И.* О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Докл. РАН. – 2001. – Т. 381. – № 5. – С. 616–622.
3. *Быковцев Г.И., Власова И.А.* Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности // Механика деформируемых сред: Межвуз. сб. Куйбышев: Куйбыш. гос. ун-т, 1977. – Вып. 2. – С. 33–68.
4. *Радаев Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. – Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. – 340 с.
5. *Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1993. – 368 с.
6. *Остапенко В.В.* Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды (курс лекций). – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2004. – 180 с.
7. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.