

Научная статья

Реализация C^1 -непрерывного метода конечных элементов в формулировке градиентной теории для задач о трещинах

*К.А. Шелков¹, Ю.О. Соляев^{1,2}*¹ *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*² *Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Российская Федерация*

Градиентная теория упругости (ГТУ) предоставляет возможность регуляризации широкого класса задач классической механики деформируемого твердого тела, включая задачи о трещинах, острых углах, сосредоточенных нагрузках, дислокациях и другое. В рамках теории предполагается, что плотность энергии деформации зависит не только от самих деформаций, но и от их пространственных производных, что накладывает дополнительные требования на гладкость искомых полей деформаций и напряжений. В данной работе рассматривается реализация в программном комплексе Abaqus/CAE C^1 -непрерывного метода конечных элементов, основанного на упрощенной ГТУ. Используются стандартные и обогащенные асимптотическими аналитическими решениями трёхузловые элементы с функциями формы в виде полиномов 5-го порядка. Стандартный пакет Abaqus дополнен пользовательской подпрограммой (UEL) и пользовательским интерфейсом. На основе проведённых расчётов для задач о раскрытии трещин в режимах мод I, II и смешанной моды исследована сеточная сходимость находимых решений и рассчитаны распределения напряжений вблизи вершины трещины. Продемонстрирована вычислительная эффективность обогащённых конечных элементов, по сравнению со стандартными, ввиду их более быстрой сходимости. Обогащённые элементы позволяют получить амплитудные коэффициенты асимптотических решений ГТУ, которые в свою очередь дают возможность вычислять J -интеграл и прибегать при анализе напряжённо-деформированного состояния конструкций к энергетическим критериям линейной механики разрушения с учётом размерного эффекта. Оценено влияние неклассических размерных эффектов на значение J -интеграла.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, задачи о трещинах, асимптотические решения, механика разрушения, численное моделирование, подпрограмма UEL, обогащённые элементы

Получение: 22.12.2025 / Публикация онлайн: 01.06.2026

УДК 539.3; 539.42

1. Введение

При создании новых видов техники важным этапом является обеспечение прочности будущего изделия. Одной из основных причин потери несущей способности конструкции служит зарождение и развитие дефектов и трещин в местах концентрации напряжений. Особенность концентраторов, таких как вершины трещин, острые углы, зоны с сосредоточенными нагрузками или с неоднородными (негладкими) граничными условиями, проявляется в наличии нефизичных сингулярностей в полях напряжений и деформаций, выявляемых при исследовании классическими методами (в рамках линейной теории упругости) [1–3]. Их описание требует привлечения аппарата механики разрушения, а в более общем случае — нелинейной механики разрушения или иных подходов, применение которых нуждается в дополнительных материальных константах и усложнении прочностного анализа. При использовании же численных методов, например, таких как метод конечных элементов (МКЭ), не удаётся обеспечить ни регулярность, ни сеточную сходимость в зоне концентрации напряжений [2, 4–6]. Для решения этой проблемы в настоящее время разработан широкий набор методов, основанных на классических подходах и теориях: на линейно-упругой механике разрушения (метод виртуального закрытия трещины — VCCT, расширенный метод конечных элементов — XFEM), на когезионных моделях и моделях прогрессирующего разрушения (см. [7–12]). Однако они обладают рядом недостатков (необходимо вводить начальные трещины и сглаживать геометрию моделей, определять дополнительные параметры моделей) и предполагают использование их комбинации при проведении полного анализа зарождения и развития повреждения. Всё это существенно усложняет процедуру расчёта. Также данные методы дают информацию о напряжённо-деформированном состоянии (НДС) в зоне концентратора напряжений только по косвенным параметрам (коэффициенту интенсивности напряжений — КИН, J -интегралу) и при этом не устраняют проблему сингулярности. Описанные трудности классических теорий рождаются вследствие неучёта возникающих больших градиентов деформаций и отсутствия в определяющих уравнениях масштабных параметров, задающих характерные размеры исследуемых объектов [13, 14].

Градиентная теория упругости (ГТУ), будучи строгим обобщением классической теории упругости, предоставляет возможность регуляризации широкого класса задач и разрешения недостатков классических теорий благодаря предположению, что энергия деформации зависит не только от самих деформаций, но и от их пространственных производных [1, 3, 7]. Это позволяет решать макромеханические задачи, имеющие сингулярные и негладкие решения, в рамках классических теорий (задачи о трещинах, острых углах, сосредоточенных нагрузках, дислокациях и другие) путём перевода их в категорию задач с регулярными решениями.

Первым идею использования в определяющих соотношениях дополнительных производных высших порядков высказал Коши в 50-х годах XVIII века, чтобы корректно описать дискретные решётчатые модели [14]. Затем интерес к ГТУ возродился в 60-х годах XX века. Начиная с этого времени её подходы и методы интенсивно совершенствовались и советской [15–17], и западной [1, 18–20] научными школами.

В последние десятилетия ГТУ продолжает активно развиваться. Так, в работе [13] представлена упрощённая теория градиентных напряжений и сформулирована ГТУ для конечных и бесконечно малых деформаций. Её главное отличие от предыдущих подходов заключается в части количества дополнительных констант материала, что стало возможным благодаря использованию только тех членов высших порядков, которые позволяют описать конкретные физические явления [1]. С развитием вычислительной техники появилось большое число работ с применением численных методов на основе ГТУ для анализа сложных структур [1, 21, 22]. В работах [23–27] продемонстрирована возможность использования решений ГТУ для определения предельных напряжений в образцах из ортотропного материала (стекло- и углепластика) и хрупкого изотропного материала с трещинами разной длины при различных условиях нагружения. Поскольку решение, полученное с помощью ГТУ, не обладает сингулярностью, то можно выразить КИН, а следовательно, и предельное напряжение через вводимый в решение ГТУ параметр s , представляющий собой структурный (масштабный) параметр. Идентификация параметра s осуществляется путём натурных испытаний. Затем принимается, что данный параметр не зависит от размера трещины, и это допущение позволяет вычислять предельные напряжения для образцов с другими размерами трещин. Рассчитанные таким образом предельные напряжения совпадают с экспериментальными данными с погрешностью в пределах 5% [23]. В работе [28] демонстрируется решение в рамках ГТУ для круглой мембраны, нагруженной сосредоточенной силой. Получено регулярное решение, устраняющее сингулярность классического решения за счёт учёта структурного (масштабного) параметра, который определялся экспериментально. Способность регуляризации решений при действии на клиновидную пластину сосредоточенной нагрузки обсуждается в [29]. В работе [30] на примере решения задачи об изгибе одномерной балки показано уточнение классического решения с помощью математического аппарата ГТУ. Построены гладкие регулярные решения в зоне действия сосредоточенной нагрузки и опор. Установлено, что решения ГТУ позволяют находить уточнённые конечные НДС в зонах концентраторов.

В работах [31–33] также демонстрируется способность ГТУ обеспечивать несингулярные решения в вершинах трещин и проводить анализ прочности по уровню напряжений без привлечения методов линейно-упругой механики разрушения, что позволяет разработать унифицированный подход к исследованию статических и усталостных трещин любых размеров. Полученные результаты валидировались на экспериментальных данных по статическому нагружению керамик [31] и усталостному нагружению металлов [32], а также по усталостному нагружению бетона [33], при этом масштабным параметром служил характерный размер зёрен в случае металлов и средний размер наполнителя (щебня) для бетона. В работах [23, 34, 35] представлены оценки значений масштабного параметра, которые могут быть использованы при выборе параметров модели в прикладных расчетах.

Актуальность развития МКЭ подходов с применением ГТУ посредством аппроксимации решений вблизи концентраторов с помощью расширенных наборов аппроксимирующих функций, отвечающих уравнениям равновесия (движения) ГТУ, заключается в возможности создания гибридных конечно-элементных (КЭ) решателей, лишённых проблем сеточной расходимости и нефизичных сингулярностей. По сути — это альтернатива существующим методам сингулярных и обобщённых конечных элементов (XFEM), моделям виртуального закрытия трещины (VCCT), МКЭ с когезионными элементами [3]. В предлагаемом подходе устраняются ограничения существующих методов, обобщаются классические гибридные МКЭ и достоверно описываются особенности изменения концентрации напряжений и номинальной прочности материала, содержащего дефекты различного масштаба, вплоть до трещин микроскопических размеров.

Таким образом, целью работы является демонстрация решения задачи ГТУ в системе Abaqus/CAE с использованием двух типов конечных элементов: 1-й тип — трёхузловые элементы с C^1 -непрерывной аппроксимацией решения в узлах, предложенные в [21] (далее — стандартные); 2-й тип — тоже трёхузловые элементы, но именуемые обогащёнными (enriched) [22]. Решения задач с трещинами с применением элементов 1-го типа показывают достаточно устойчивое поведение, однако при реализации требуется очень высокая плотность КЭ сетки вблизи вершины трещины [22]. В предложенной позднее модификации МКЭ, основанной на обогащённых элементах, последние располагаются вблизи вершины трещины и имеют дополнительные функции формы, отвечающие асимптотическим решениям задач о трещинах ГТУ [22]. Аналогичные классические элементы называются также сингулярными элементами и в качестве дополнительных функций формы в них используются асимптотические решения механики разрушения для трещин [36] или, в более общей формулировке, асимптотические ряды Вильямса [37, 38]. При этом амплитудные коэффициенты асимптотического решения (в частности КИН) становятся дополнительными узловыми переменными модели.

В настоящее время при стандартной реализации МКЭ в задачах о трещинах используются так называемые элементы с четверть-узловыми точками (quarter-point) — точками, смещёнными от середины стороны к вершинам на четверть длины стороны. Такие элементы оказываются более простыми при численной реализации и обеспечивают необходимый вид функций формы вблизи вершины трещины [39, 40]. В задачах ГТУ введение аналогичных элементов со смещёнными узлами затруднено, так как асимптотическое поведение решения принципиально иное по сравнению с сингулярным классическим решением [41, 42]. Для того чтобы воспользоваться обогащёнными элементами, в ГТУ была предложена схема, дающая возможность сохранить C^1 -непрерывность решения между обогащёнными и стандартными трёхузловыми элементами. В данной работе представлено описание реализации на основе обогащённых элементов, которая позволяет использовать пре-/постпроцессор и решатель Abaqus и в значительной степени повысить эффективность реализуемой численной схемы, а также обеспечивает её пригодность для КЭ моделей большой размерности и перспективу внедрения как в инженерный анализ, так и в фундаментальные исследования.

2. Постановка задачи

2.1. Упрощённая градиентная теория упругости

Согласно классическим положениям ГТУ, плотность энергии деформации зависит не только от самих деформаций, но и от их первых производных [18]:

$$w(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}) = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} / 2 + A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} / 2. \quad (1)$$

Здесь C_{ijkl} — компоненты классического тензора модулей упругости четвёртого ранга, которые определяются как $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$; A_{ijklmn} — компоненты тензора шестого ранга с дополнительными материальными константами ГТУ; $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$ — компоненты тензора бесконечно малых деформаций; u_i — компоненты вектора перемещений.

В рамках упрощённой ГТУ [1, 13] компоненты тензора A_{ijklmn} определяются как

$$A_{ijklmn} = A_{jiklmn} = A_{ijkmln} = A_{lmnijk} = l^2 C_{ijlm} \delta_{kn},$$

где l — масштабный параметр с размерностью длины, единственная дополнительная материальная константа упрощённой теории. При равенстве масштабного параметра нулю получается формулировка классической теории упругости.

В рамках классической ГТУ определяющие соотношения имеют вид:

– для компонент напряжений

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad (2)$$

– для компонент градиентных напряжений (double stress)

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n} = l^2 C_{ijlm} \varepsilon_{lm,k} = l^2 \tau_{ij,k}, \quad (3)$$

которые в упрощённой теории являются производными классических напряжений, домноженными на квадрат масштабного параметра.

Следует заметить, что описываемый далее метод реализации численных решений допускает использование в ГТУ моделей с более общими определяющими соотношениями, в том числе в формулировке Миндлина с пятью дополнительными независимыми материальными константами (масштабными параметрами) [18, 43].

2.2. Вариационная постановка

Исходя из соотношений (1)–(3), получается выражение для вариации полной энергии деформации тела объёмом Ω поверхностью $\partial\Omega$ и рёбрами $\partial\partial\Omega$:

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta w dv = \int_{\Omega} (\tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \delta \varepsilon_{ij,k}) dv.$$

Соответственно, вариация работы внешних сил представляется как [18]

$$\delta W^{ext} = \int_{\Omega} b_i \delta u_i dv + \int_{\partial\Omega} \bar{t}_i \delta u_i ds + \int_{\partial\Omega} \bar{m}_i n_k \delta u_{i,k} dv + \int_{\partial\partial\Omega} \bar{s}_i \delta u_i dl$$

и включает заданные компоненты параметров задачи: b_i — объёмной силы, $\bar{t}_i$ — вектора напряжений, $\bar{m}_i$ — вектора моментных напряжений, n_i — нормали к границе $\partial\Omega$, $\bar{s}_i$ — вектора погонных внутренних усилий, действующих на ребре $\partial\partial\Omega$.

Тогда вариационная постановка задачи принимает следующий вид:

$$\int_{\Omega} (\tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \delta \varepsilon_{ij,k}) dv = \int_{\Omega} b_i \delta u_i dv + \int_{\partial\Omega} \bar{t}_i \delta u_i ds + \int_{\partial\Omega} \bar{m}_i n_k \delta u_{i,k} dv + \int_{\partial\partial\Omega} \bar{s}_i \delta u_i dl,$$

которому отвечает формулировка краевой задачи:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0, & x_i \in \Omega, \\ t_i = \bar{t}_i \text{ или } u_i = \bar{u}_i, & x_i \in \partial\Omega, \\ m_i = \bar{m}_i \text{ или } u_{i,j} n_j = \bar{g}_i, & x_i \in \partial\Omega, \\ s_i = \bar{s}_i \text{ или } u_i = \bar{u}_i^e, & x_i \in \partial\partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$ — компоненты тензора полных напряжений, g_i — компоненты нормальных производных вектора перемещений.

Из (4) видно, что в краевой задаче ГТУ присутствуют дополнительные граничные условия для моментных напряжений на поверхности тела или для нормальных производных вектора перемещений, а также граничные условия на ребре тела. Компоненты вектора напряжений на поверхности тела принимают следующий вид:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j + D_j(\mu_{ijk} n_k) + (D_l n_l) \mu_{ijk} n_j n_k, \quad (5)$$

где D_i — оператор поверхностного градиента.

2.3. Конечно-элементная формулировка задачи ГТУ

Рассмотрим формулировку МКЭ применительно к задачам ГТУ [21, 22]. Как и в его классическом варианте, поле перемещений внутри элемента описывается следующим соотношением:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}, \quad (6)$$

где $\mathbf{N}$ — матрица функций формы, $\hat{\mathbf{u}}$ — вектор узловых степеней свободы, а деформации и их градиенты определяются как

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11,1} \\ \varepsilon_{11,2} \\ \varepsilon_{22,1} \\ \varepsilon_{22,2} \\ 2\varepsilon_{12,1} \\ 2\varepsilon_{12,2} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{u}}. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ — матрицы первых и вторых производных функций формы:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mathbf{L}_1 \mathbf{N}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_2 \mathbf{N}, \\ \mathbf{L}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}^T, \\ \mathbf{L}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Определяющие соотношения в матричном виде принимают следующий вид:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{Bmatrix} \mu_{111} \\ \mu_{112} \\ \mu_{221} \\ \mu_{222} \\ \mu_{121} \\ \mu_{122} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{A} \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{u}}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} &= l^2 \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь λ и μ — постоянные Ламе. Из соотношений (6)–(10) получается вариационная постановка в матричном виде:

$$\left(\int_{\Omega} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{A} \mathbf{B}_2) d\Omega \right) \hat{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds + \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{m} ds + \int_{\partial\partial\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{s} dl. \quad (11)$$

Вариационной формулировке (11) будет соответствовать задача ГТУ в терминах МКЭ

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (12)$$

если принять:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{A} \mathbf{B}_2) d\Omega,$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds + \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{m} ds + \int_{\partial\partial\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{s} dl.$$

Вектор невязок для проверки точности получаемого решения (12) вычисляется как

$$\mathbf{r} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{B}_2^T \boldsymbol{\mu}) dv - \mathbf{f}.$$

3. Модифицированные конечные элементы

Стандартные конечные элементы способны реализовать все преимущества ГТУ при решении различных задач. Однако применение таких элементов требует существенного измельчения сетки вблизи концентраторов для корректного определения полей перемещений и деформаций, что влечёт за собой увеличение стоимости процесса вычислений. Рассматриваемые в данном разделе обогащённые элементы предполагают использование асимптотических функций для описания полей параметров задачи ГТУ около вершины трещины [22] и позволяют вблизи концентраторов строить более грубую сетку для определения напряжений, а также рассчитывать амплитудные коэффициенты асимптотического решения. Благодаря последним открывается возможность прибегать при анализе трещин к математическому инструментарию механики разрушения, в частности, вычислять J -интеграл. Однако разные виды концентраторов требуют различных асимптотических функций. Поэтому на данном этапе в работе обсуждаются обогащённые элементы только для плоских задач о трещинах (в режимах мод I и II).

3.1. Стандартные элементы

Стандартные трёхузловые конечные элементы имеют 36 степеней свободы (по 12 у каждого узла). Сюда входят не только узловые перемещения, но и их первые и вторые производные:

$$\hat{\mathbf{u}} = \{u_1, u_{1,x}, u_{1,y}, u_{1,xx}, u_{1,xy}, u_{1,yy}, v_1, v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,xx}, v_{1,xy}, v_{1,yy}, u_2 \dots v_{2,yy}, u_3 \dots v_{3,yy}\}^T.$$

Для реализации C^1 -непрерывности в качестве функций формы используются полные полиномы 5-го порядка в L -координатах, изначально разработанные для задач изгиба пластин [44]. Матрица функций формы $\mathbf{N}$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \dots N_6 & 0 \dots 0 & N_7 \dots N_{12} & 0 \dots 0 & N_{13} \dots N_{18} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & N_1 \dots N_6 & 0 \dots 0 & N_7 \dots N_{12} & 0 \dots 0 & N_{13} \dots N_{18} \end{bmatrix}.$$

3.2. Обогащённые элементы

При использовании обогащённых элементов поле перемещений представляется следующим образом [22]:

$$u = \sum_{i=1}^{18} \hat{u}_i N_i + \sum_{n=1}^4 K_n Q_{1n}^*,$$

$$v = \sum_{i=1}^{18} \hat{v}_i N_i + \sum_{n=1}^4 K_n Q_{2n}^*,$$

где

$$Q_{in}^* = Q_{in} - \sum_{j=1}^3 Q_{in}^{(j)} N_j^{(0)} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial Q_{in}^{(j)}}{\partial x} N_j^{(1)} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial Q_{in}^{(j)}}{\partial y} N_j^{(2)}.$$

В данных соотношениях вторые суммы являются асимптотическими решениями для трещин в рамках ГТУ, K_n — амплитудные факторы. Таким образом, обогащённые конечные элементы имеют 40 степеней свободы, а вектор узловых степеней свободы принимает следующий вид:

$$\hat{\mathbf{u}} = \{u_1, u_{1,x}, u_{1,y}, u_{1,xx}, u_{1,xy}, u_{1,yy}, v_1, v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,xx}, v_{1,xy}, v_{1,yy}, u_2 \dots v_{2,yy}, u_3 \dots v_{3,yy}, K_1, K_2, K_3, K_4\}^T. \quad (13)$$

Вид выражения (13) обусловлен стремлением сохранить C^1 -непрерывность в узлах элемента и соответствует классическому обогащению элементов [36].

Функции Q_{in} , являющиеся асимптотическими решениями, определяются так:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{4\mu} r^{3/2} \cos \frac{\theta}{2} (-4 - 2\eta + 2(1 + 2\eta) \cos \theta), \\ Q_{12} &= \frac{1}{4\mu} r^{3/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{7 + 10\eta}{3} - \frac{14 + 8\eta}{3} \cos \theta - \cos 2\theta \right), \\ Q_{13} &= \frac{1}{4\mu} r^{3/2} \sin \frac{\theta}{2} (5 - 4\eta + 4(4 + \eta) \cos \theta + 3 \cos 2\theta), \\ Q_{14} &= \frac{1}{4\mu} r^{3/2} \sin \frac{\theta}{2} (1 + 2 \cos \theta), \\ Q_{21} &= \frac{1}{4\mu} r^{3/2} \sin \frac{\theta}{2} (-4 + 2\eta - 2(1 - 2\eta) \cos \theta), \\ Q_{22} &= \frac{1}{4\mu} r^{3/2} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{7 - 2\eta}{3} + \frac{14 + 8\eta}{3} \cos \theta - \cos 2\theta \right), \\ Q_{23} &= \frac{1}{4\mu} r^{3/2} \cos \frac{\theta}{2} (-5 - 12\eta + 4(4 + 3\eta) \cos \theta - 3 \cos 2\theta), \\ Q_{24} &= \frac{1}{4\mu} r^{3/2} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2 \cos \theta). \end{aligned}$$

Здесь r и θ — полярные координаты, $\eta = 3 - 4\nu$, где ν — коэффициент Пуассона.

3.3. Численное интегрирование

При численном интегрировании трёхузловых элементов использовалась редуцированная квадратура Гаусса с 13-ю точками интегрирования (Рис. 1). Как показано в [22], этого достаточно для получения точных результатов на сетке как из стандартных, так и из обогащённых элементов.

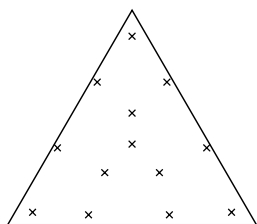


Рис. 1. Расположение точек интегрирования

3.4. Реализация в пакете Abaqus/CAE

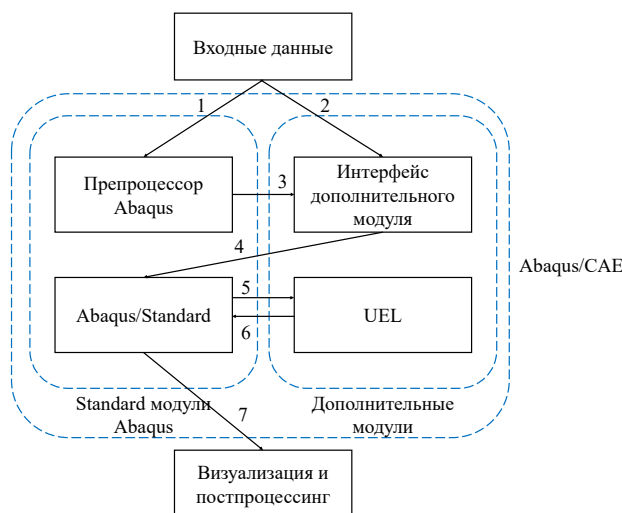


Рис. 2. Схема взаимодействия Abaqus/CAE, UEL и пользовательского интерфейса

Для решения задачи ГТУ при помощи МКЭ в коммерческом пакете Abaqus/CAE его решатель дополнен пользовательской подпрограммой (UEL), написанной на языке Fortran [45] и содержащей описание применяемых для дискретизации элементов. Также создан пользовательский интерфейс в виде плагина на языке Python для автоматизации подготовки командного файла с выбранным типом модифицированного элемента у вершины трещины (стандартного или обогащённого), с масштабным параметром и граничными условиями. Схема взаимодействия Abaqus/CAE, UEL и пользовательского интерфейса представлена на рисунке 2. Пронумерованными стрелками показаны шаги и их направления: 1, 2 — задание пользователем исходных данных; 3 — передача сетки, классических граничных условий, действующих нагрузок, наборов узлов и элементов; 4 — формирование и передача в

решатель командного файла с определением пользовательских элементов и граничных условий; 5 — передача данных для расчёта матрицы жёсткости отдельного элемента и вектора внутренних сил; 6 — передача матрицы жёсткости элемента, вектора внутренних сил для формирования глобальной матрицы жёсткости, значений

напряжений, деформаций и их градиентов; 7 — формирование файла результатов для их последующей визуализации и анализа.

Обязательная (интерфейсная) часть UEL [45], описывающая входную и выходную информацию о переменных и массивах, которую решатель Abaqus/Standard отправляет в UEL и получает из неё, показана на рисунке 3.

```

SUBROUTINE UEL(RHS,AMATRX,SVARS,ENERGY,NDOFEL,NRHS,NSVARS,
1 PROPS,NPROPS,COORDS,MCRD,NNODE,U,DU,V,A,JTYPE,TIME,DTIME,
2 KSTEP,KINC,JELEM,PARAMS,NDLOAD,JDLTYP,ADLMAG,PRED,PREDEF,
3 LFLAGS,MLVARX,DDLMAG,MDLOAD,PNEWDT,JPROPS,NJPROP,PERIOD)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION RHS(MLVARX,*),AMATRX(NDOFEL,NDOFEL),PROPS(*),
1 SVARS(*),ENERGY(8),COORDS(MCRD,NNODE),U(NDOFEL),
2 DU(MLVARX,*),V(NDOFEL),A(NDOFEL),TIME(2),PARAMS(*),
3 JDLTYP(MDLOAD,*),ADLMAG(MDLOAD,*),DDLMAG(MDLOAD,*),
4 PREDEF(2,NPREDF,NNODE),LFLAGS(*),JPROPS(*)

user coding to define RHS, AMATRX, SVARS, ENERGY, and PNEWDT

RETURN
END

```

Рис. 3. Интерфейс подпрограммы UEL

Для учёта при дискретизации расчётной области задачи ГТУ функционала отдельного КЭ в основной части UEL организовано вычисление характеризующих его массивов: RHS, содержащего его вклад в векторы правой части системы уравнений, то есть во внутренние силы; AMATRX, представляющего его вклад в матрицу Якоби (жёсткости). Для этого Abaqus/Standard передаёт в UEL координаты узлов элемента, вектор перемещений, свойства материала и другие данные.

В данной работе подпрограмма UEL выполнена так, что описывает и стандартные, и обогащённые элементы, в зависимости от присвоенного в командном файле типа элемента. Это даёт возможность использовать оба типа в одном расчёте. Блок-схема подпрограммы UEL и пользовательский интерфейс представлены на рисунке 4. Пользовательский интерфейс позволяет задавать свойства, в том числе и масштабный параметр, а также дополнительные граничные условия, которые возникают в ГТУ. После инициализации формируется командный файл в формате inp, в котором присутствуют команды, объявляющие тип пользовательских элементов, свойства и граничные условия.

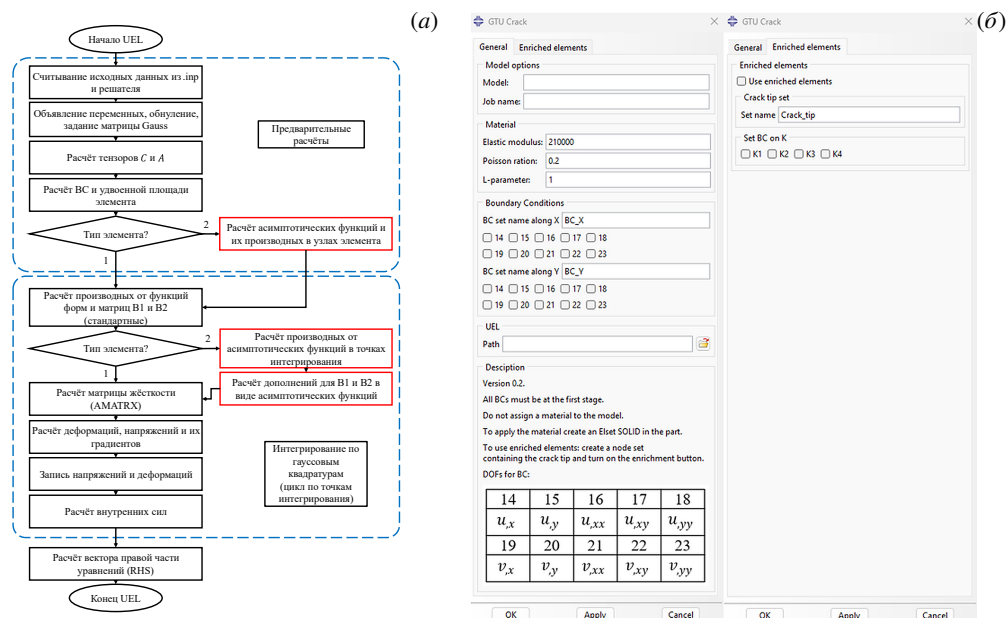


Рис. 4. Блок-схема подпрограммы UEL (a); плагин пользовательского интерфейса (б)

4. Результаты расчётов

Далее приведены результаты решения задачи раскрытия центральной трещины с применением стандартных элементов (в режимах мод I, II и смешанной моды) и обогащённых элементов (в режимах мод I и II).

4.1. Решение со стандартными элементами

Рассматривается задача о трещине длиной $2a$ в бесконечном пространстве под действием растягивающей (мода I) и сдвиговой (мода II) нагрузки P_0 в условиях плоской деформации. Соответствующие КЭ модели представлены на рисунке 5. Вследствие симметрии задачи в режиме моды I и антисимметрии в режиме моды II во внимание принимается только 1/4 часть пространства размером $L \times L$. Исследовано несколько длин трещины $a/l = \{2.5, 5.0, 10, 15, 20\}$. На основании сеточной сходимости (Рис. 6) размер элемента возле вершины трещины был выбран равным $s/l = 0.01$. Для наглядности на рисунке совмещены графики максимальных напряжений в вершине трещины, рассчитанные МКЭ в рамках ГТУ и при использовании классического аппарата МКЭ. Сетка имела общее число элементов 5000 и число узлов 2600.

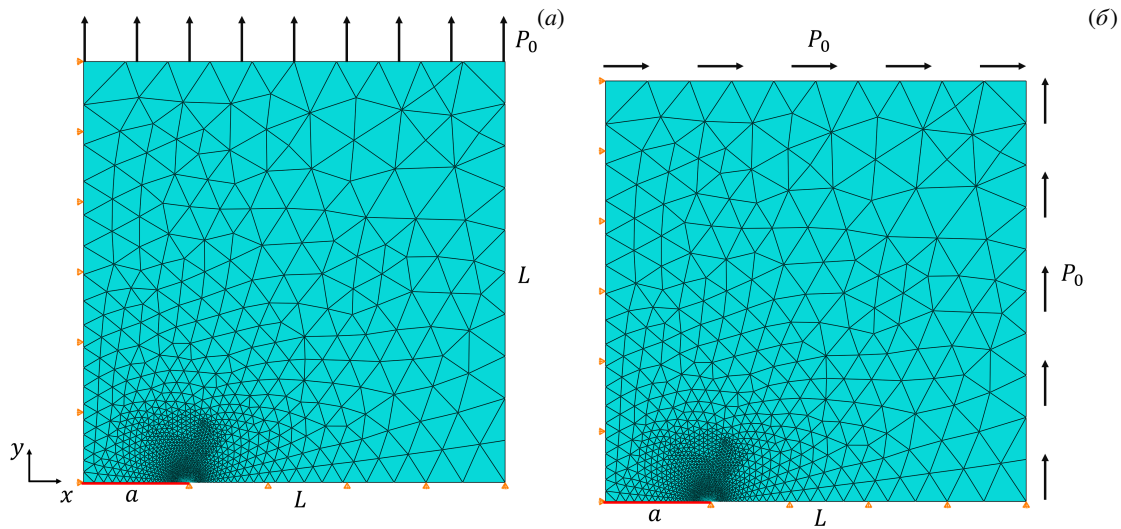


Рис. 5. Конечно-элементная модель: мода I (а); мода II (б)

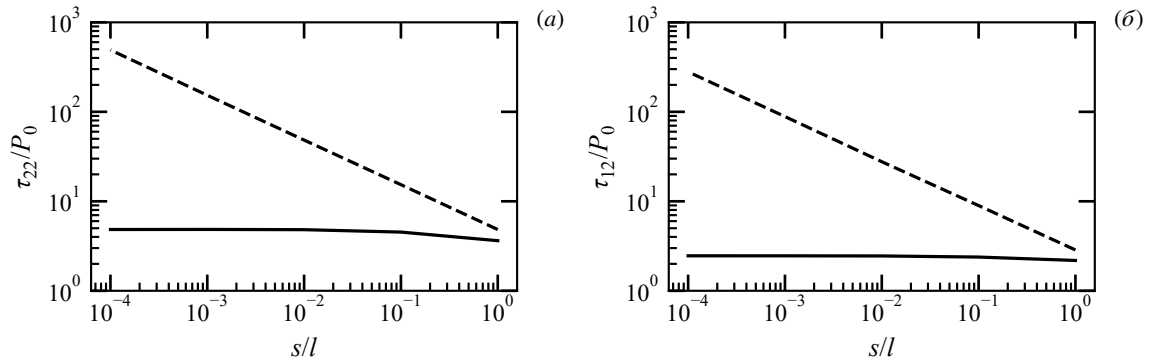


Рис. 6. Максимальные относительные напряжения в вершине трещины в зависимости от относительного размера элемента у вершины трещины s/l при классическом решении (пунктирная линия) и решении в рамках ГТУ (сплошная линия): мода I (а); мода II (б)

В силу использования постановки задачи ГТУ, помимо граничных условий для перемещений, ограничения накладываются на первые и вторые производные перемещений для обеспечения симметрии для моды I и антисимметрии для моды II:

– граничные условия симметрии

$$\begin{aligned} x = -a, 0 \leq y \leq L: & \quad u = 0, u_y = 0, u_{yy} = 0, v_x = 0, v_{xy} = 0, \\ a \leq x \leq L, y = 0: & \quad v = 0, v_x = 0, v_{xx} = 0, u_y = 0, u_{xy} = 0; \end{aligned}$$

– граничные условия антисимметрии

$$\begin{aligned} x = -a, 0 \leq y \leq L: & \quad v = 0, v_y = 0, v_{yy} = 0, u_x = 0, u_{xy} = 0, \\ a \leq x \leq L, y = 0: & \quad u = 0, u_x = 0, u_{xx} = 0, v_y = 0, v_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Главным преимуществом применения C^1 -непрерывного МКЭ в формулировке ГТУ является использование фундаментального свойства сглаживания сингулярных решений классической теории упругости, то есть перевода

их в класс регулярных решений. Это демонстрируют графики напряжений на рисунке 7. Следствие решения в рамках ГТУ — это, в отличие от классической теории, ненулевые напряжения на берегах трещины. Они возникают ввиду более сложных граничных условий (5) и служат эквивалентом сил, вводимых в теории Баренблатта [27, 46] для устранения сингулярности.

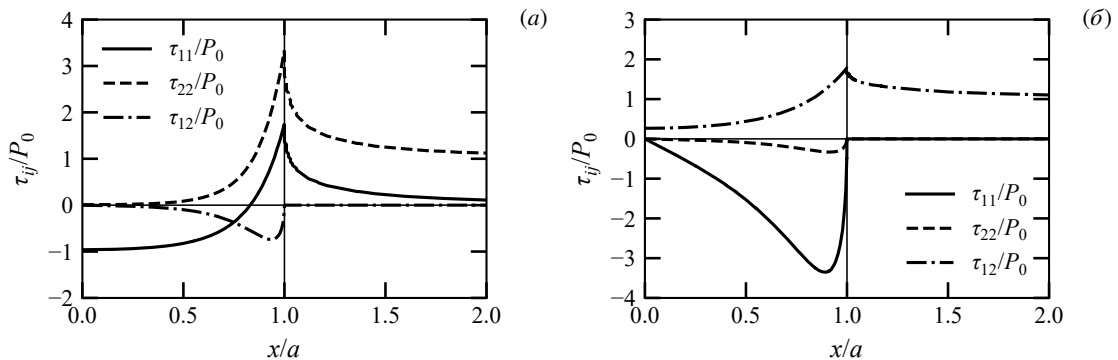


Рис. 7. Относительные напряжения на линии трещины $y=0$ при $a/l=10$ в зависимости от относительной координаты x/a : мода I (а); мода II (б)

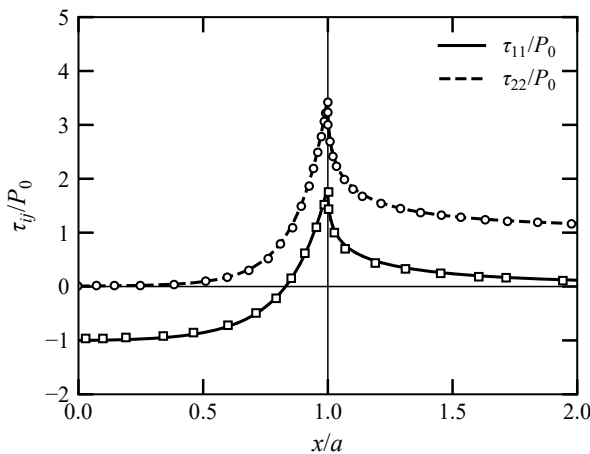


Рис. 8. Напряжения на линии трещины $y=0$ при $a/l=10$: сплошные линии – решение авторов, маркеры – решение из [21]

На рисунке 8, кроме авторских данных, для сравнения представлены данные расчёта из [21], которые подтверждают, что реализация пользовательских подпрограмм корректна (решения совпадают).

Также решена задача для трещины в режиме смешанной моды (Рис. 9). Внешняя нагрузка и свойства материалов взяты аналогичными предыдущим расчётам. По данным вычислений построены кривые относительных максимальных главных напряжений σ_1/P_0 и зависимости угла положения площадок, на которых они действуют, от угла ориентации трещины (Рис. 10). Этот результат, с одной стороны, подтверждает возможность получать для трещин данные, необходимые для использования классических критериев прочности, как это продемонстрировано в работе [27], а с другой стороны, что это альтернатива инструментарию линейной механики разрушения и унификация подходов к анализу прочности.

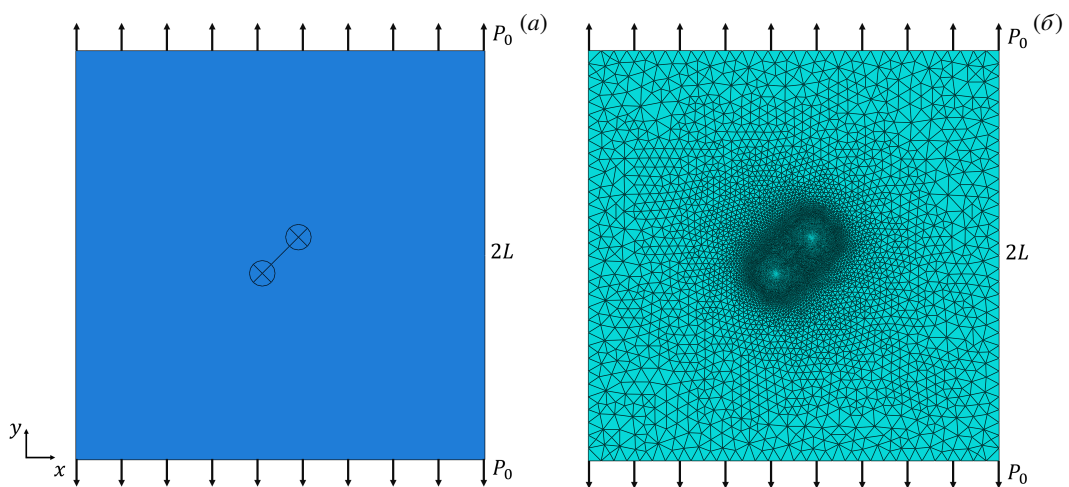


Рис. 9. Конечно-элементная модель трещины, расположенной под углом $\beta=45^\circ$, в режиме смешанного нагружения (mixed mode)

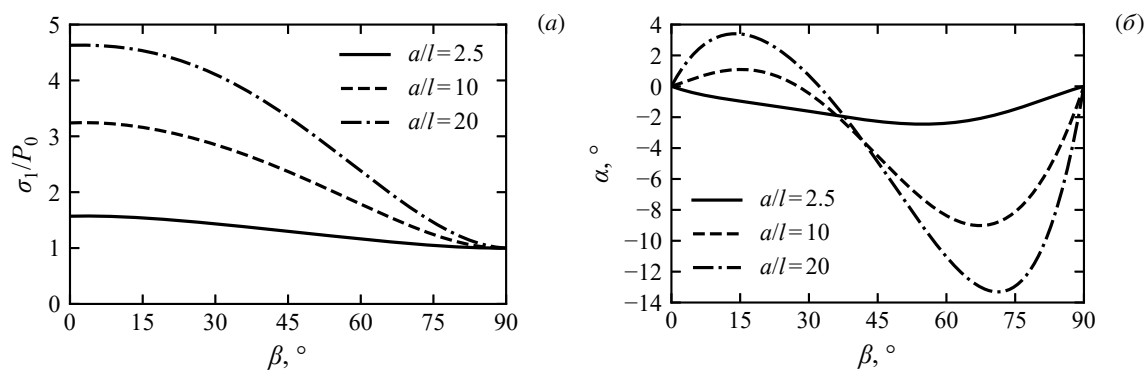


Рис. 10. Зависимости относительных максимальных главных напряжений σ_1/P_0 (а) и угла α положения площадок, на которых они действуют, от угла ориентации трещины θ

4.2. Решение с обогащёнными элементами

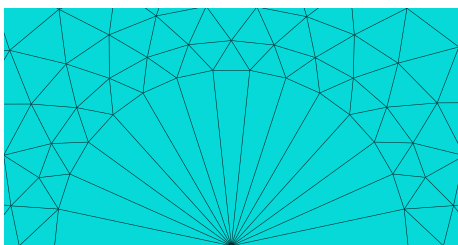


Рис. 11. Модель трещины с использованием обогащённых элементов

При решении задачи о трещине в режимах мод I и II с обогащёнными элементами также рассматривалась 1/4 часть пространства размером $L \times L$ под нагрузкой P_0 . Отношение длины трещины к L варьировалось как $a/L = \{0.02, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5\}$, масштабный параметр составлял: $l/L = \{0.05, 0.1, 0.2\}$. Для получения корректного результата вокруг трещины формировалась сетка из заданного количества обогащённых элементов одного размера (Рис. 11), остальные элементы модели были стандартными. Достигнута сеточная сходимость для амплитудных коэффициентов при увеличении количества элементов вокруг вершины трещины, а также более быстрая сходимость по максимальным напряжениям (см. Рис. 12).

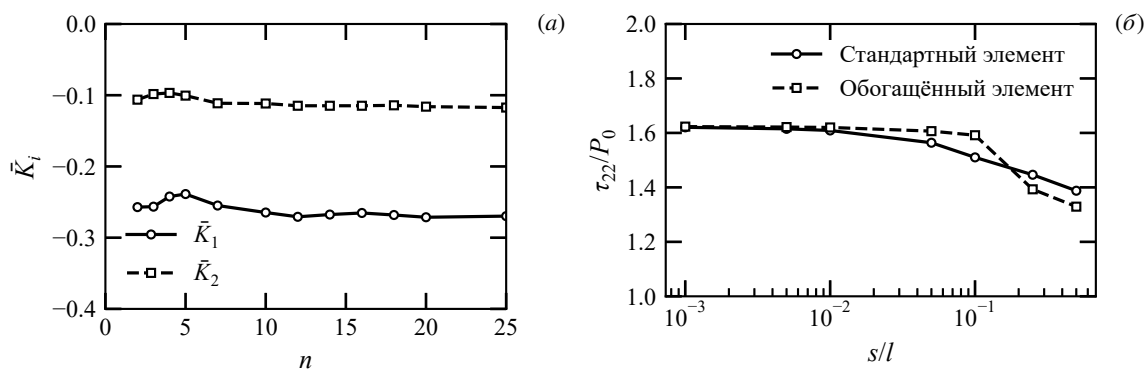


Рис. 12. Относительные амплитудные коэффициенты $\bar{K}_i = K_i/(P_0/\sqrt{l})$ в зависимости от количества элементов n вокруг вершины трещины (а); относительные максимальные напряжения для моды I как функции относительного размера элемента s/l (б)

На рисунке 13 показаны напряжения в режимах мод I и II для одного из размеров трещины и для этой же задачи приведены напряжения, полученные с использованием только стандартных элементов. У вершины трещины размер стандартного элемента составлял $s/L = 0.001$, а в случае обогащённых элементов он был на порядок больше: $s/L = 0.01$. Как видно, решения полностью совпадают.

Рисунок 14 содержит графики максимальных напряжений в зависимости от размера трещины и величины масштабного параметра. Видно, что при уменьшении размера трещины напряжения τ_{11} и τ_{12} стремятся к величине внешней нагрузки, но чем больше масштабный параметр, тем длиннее трещина. Это говорит о том, что при больших значениях масштабного параметра материал становится менее чувствительным к малым дефектам. С уменьшением же значения масштабного параметра концентрация напряжений увеличивается даже при малых размерах трещины. При стремлении масштабного параметра к нулю напряжения неограниченно возрастают, что соответствует классическому решению задачи теории упругости.

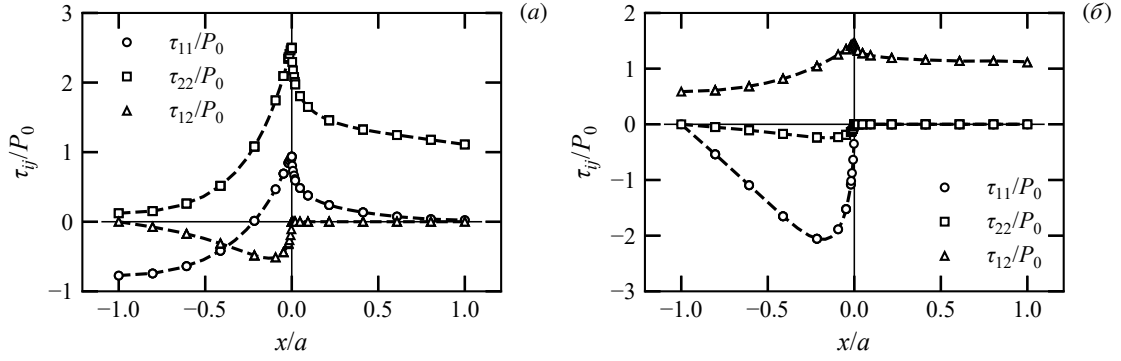


Рис. 13. Относительные напряжения на линии трещины $y=0$ при $a/l=0.5$ и $a/l=5$ в зависимости от относительной координаты x/a ; маркерами обозначены решения с обогащёнными элементами, пунктирными линиями – со стандартными элементами: мода I (а); мода II (б)

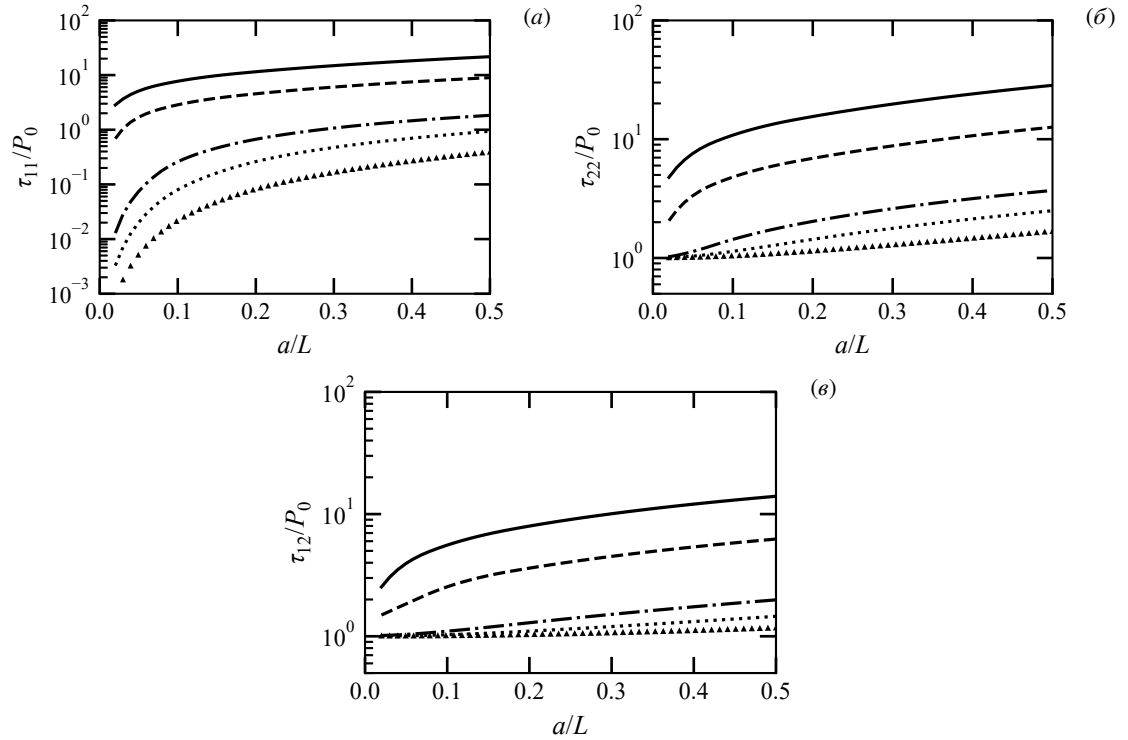


Рис. 14. Максимальные напряжения в вершине трещины в зависимости от длины трещины a/L при разных значениях масштабного параметра l/L : 0.001 (сплошная линия), 0.005 (пунктирная линия), 0.05 (штрихпунктирная линия), 0.01 (линия из точек), 0.2 (линия из треугольников); мода I, τ_{11}/P_0 (а); мода I, τ_{22}/P_0 (б); мода II, τ_{12}/P_0 (в)

4.3. Амплитудные коэффициенты

Благодаря использованию обогащённых элементов возможно нахождение значений амплитудных коэффициентов асимптотических решений, нормализованных на величину $P_0/\sqrt{l}$. Их модули представлены на рисунке 15 (амплитудные коэффициенты, согласно решению, имеют знак минус). Это в свою очередь открывает возможность прибегать к математическим оценкам линейной механики разрушения, таким как J -интеграл. Однако нужно отметить, что амплитудные коэффициенты, получаемые в рамках КЭ моделей, не соотносятся с классическими КИН и имеют размерность $\text{Па}/\sqrt{\text{м}}$. Как видно из графиков, при уменьшении размера трещины величина амплитудных коэффициентов тоже становится меньше, что говорит о снижении концентрации напряжений в вершине трещины. С уменьшением масштабного параметра наблюдается обратный эффект — значения амплитудных коэффициентов увеличиваются.

В [22] получены выражения J -интеграла для мод I и II, которые вычисляются с помощью амплитудных коэффициентов, найденных из решения задачи в постановке ГТУ:

$$J_I = \frac{1+\eta}{8\mu} \pi l^2 \left((3K_1 + K_2)^2 + 8K_2^2(\eta+2) \right),$$

$$J_{II} = \frac{1+\eta}{8\mu} \pi l^2 \left(72K_3^2(\eta+2) + \frac{9K_4^2}{4(\eta^2-1)} \right).$$

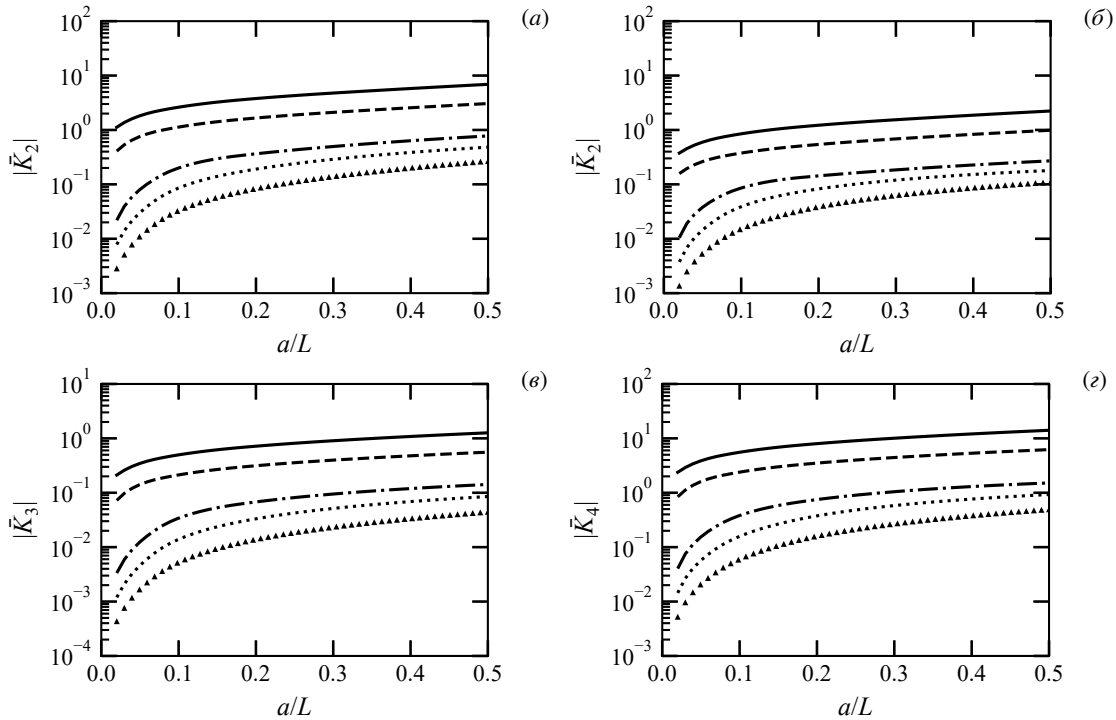


Рис. 15. Относительные модули амплитудных коэффициентов асимптотических решений в зависимости от относительной длины трещины a/L при разных значениях масштабного параметра l/L : 0.001 (сплошная линия), 0.005 (пунктирная линия), 0.05 (штрихпунктирная линия), 0.01 (линия из точек), 0.2 (линия из треугольников); мода I, $\hat{K}_1$ (а), мода I, $\hat{K}_2$ (б), мода II, $\hat{K}_3$ (в), мода II, $\hat{K}_4$ (г)

На рисунке 16 представлены графики относительных значений J/J_0 , где $J_0 = [(1+\eta)/(8\eta)] \left(P_0 \sqrt{\pi L/40} \right)^2$ для разных значений масштабного параметра l в зависимости от длины трещины a/l . Из рисунков видно, что при уменьшении масштабного параметра график относительного J -интеграла стремится к классическому решению $J = [(1+\eta)/(8\eta)] K_I^2$ (здесь K_I — классический КИН), но, в отличие от него, близкие к нулю значения получаются при ненулевом размере трещины. Этот результат говорит о том, что обогатённые элементы можно использовать для идентификации масштабного параметра при обработке экспериментальных данных.

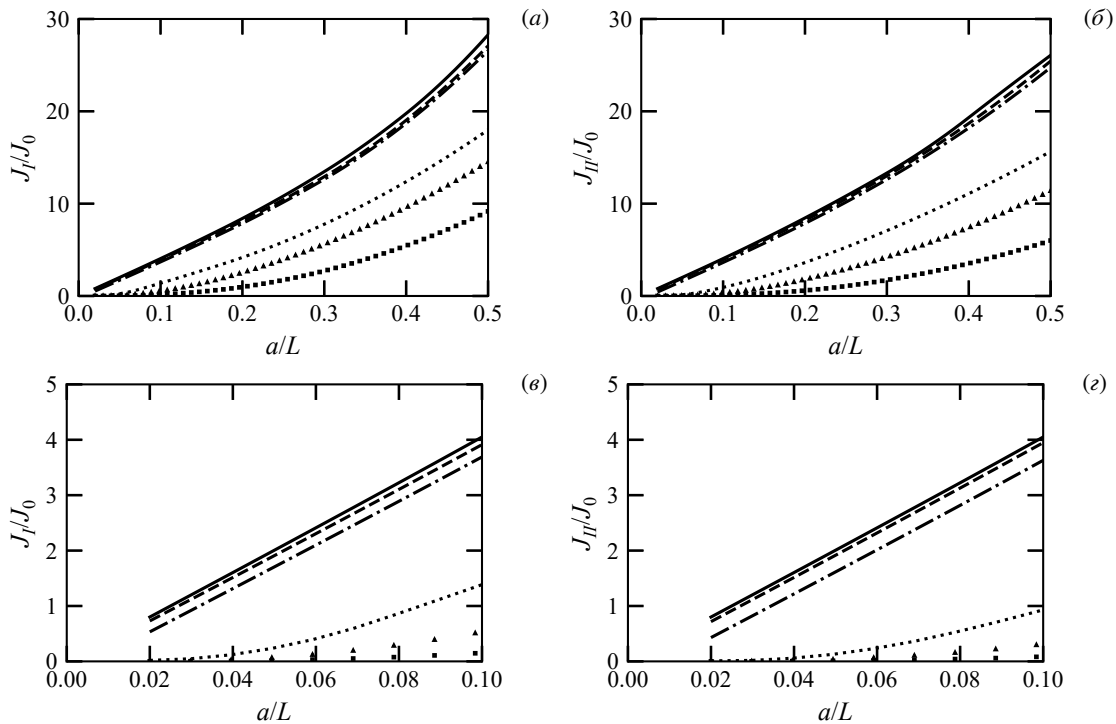


Рис. 16. Значения относительного J -интеграла в классическом решении (сплошная линия) и при разных значениях масштабного параметра l/L : 0.001 (пунктирная линия), 0.005 (штрихпунктирная линия), 0.05 (линия из точек), 0.1 (линия из треугольников), 0.2 (линия из квадратов); мода I (а); мода II (б), мода I (в), мода II (г)

5. Выводы

В коммерческом программном комплексе для КЭ анализа Abaqus/CAE, дополненном авторской подпрограммой (UEL), описывающей два типа КЭ, и пользовательским интерфейсом в виде плагина для автоматизации генерации командных файлов, решены задачи раскрытия трещины в режимах мод I, II и смешанной моды.

Продемонстрированы основные преимущества решения задачи в рамках ГТУ с использованием стандартных и обогащённых элементов. Их применение даёт возможность устранять сингулярности в вершине трещины, получать равновесное раскрытие трещины, корректно учитывать дефекты малых размеров. Конечные значения напряжений в вершине трещины позволяют оценивать прочность конструкций на основе как существующих, так и вновь создаваемых критериев.

Расчёты с обогащёнными элементами показывают, что они выгоднее с точки зрения вычислительных затрат ввиду их более быстрой сходимости. Кроме этого, становится доступным определение амплитудных коэффициентов, с помощью которых можно вычислять J -интеграл. Однако на данном этапе их использование возможно только для анализа трещин.

Представленные результаты могут быть полезными в экспериментальной механике разрушения для унификации методов идентификации дополнительных параметров ГТУ на основе стандартных испытаний.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-10228-П); информация о проекте доступна на официальном сайте РНФ.

Литература

1. *Askes H., Aifantis E.C.* Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48. P. 1962–1990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006
2. *Bärnkopf E., Kövesdi B., Dunai L.* Investigation of Stress Concentration Zones in FEM-Based Design of Welded Plated Structures // *Buildings*. 2023. Vol. 13. 1057. DOI: 10.3390/buildings13041057
3. *Соляев Ю.О.* Неклассические масштабные эффекты в прикладных моделях градиентной теории упругости и электроупругости: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 1.1.8 / Соляев Юрий Олегович. Москва: Институт прикладной механики РАН, 2022. 295 с.
4. *Sinclair G.B., Beisheim J.R., Kardak A.A.* On the Detection of Stress Singularities in Finite Element Analysis // *Journal of Applied Mechanics*. 2019. Vol. 86. 021005. DOI: 10.1115/1.4041766
5. *Корепанов В.В., Матвеев В.П., Федоров А.Ю., Шардаков И.Н.* Численный анализ сингулярных решений двумерных задач несимметричной теории упругости // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2013. № 4. С. 50–58.
6. *Матвеев В.П., Федоров А.Ю., Галкина Е.Б.* Численное исследование концентрации напряжений в вершине V-образного надреза при его неполном заполнении материалом // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2022. Т. 15, № 3. С. 333–342. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.25
7. *Valvo P.S.* A further step towards a physically consistent virtual crack closure technique // *International Journal of Fracture*. 2015. Vol. 192. P. 235–244. DOI: 10.1007/s10704-015-0007-4
8. *Krueger R.* Virtual crack closure technique: History, approach, and applications // *Applied Mechanics Reviews*. 2004. Vol. 57. P. 109–143. DOI: 10.1115/1.1595677
9. *Lekhnitskii S.G.* Anisotropic Plates. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968. 534 p.
10. *Moes N., Dolbow J., Belytschko T.* A finite element method for crack growth without remeshing // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999. Vol. 46. P. 131–150. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.3.CO;2-A
11. *Ahmed A.* eXtended Finite Element Method (XFEM) - Modeling arbitrary discontinuities and Failure analysis: Dissertation for the Master Degree / Ahmed Awais. Pavia: Istituto Universitario di Studi Superiori di Pavia, 2009. 196 p.
12. *Diehl T.* Modeling Surface-Bonded Structures with ABAQUS Cohesive Elements: Beam-Type Solutions // *Abaqus User's Conference Proceedings*. Stockholm, Sweden, 2005. P. 89–115.
13. *Aifantis E.C.* On the role of gradients in the localization of deformation and fracture // *International Journal of Engineering Science*. 1992. Vol. 30. P. 1279–1299. DOI: 10.1016/0020-7225(92)90141-3
14. *Cauchy L.* Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1851. Vol. 32. P. 323–326.
15. *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 415 с.
16. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // *Физика твердого тела*. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.
17. *Левин В.М.* О связи между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации в упругих микрогетерогенных средах // *Прикладная математика и механика*. 1971. Т. 35, № 4. С. 744–750.

18. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. P. 52–78. DOI: 10.1007/BF00248490
19. *Toupin R.A.* Elastic materials with couple-stresses // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. P. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945
20. *Green A.E., Rivlin R.S.* Simple force and stress multipoles // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16, no. 5. P. 325–353. DOI: 10.1007/BF00281725
21. *Papanicolopulos S.-A., Zervos A.* Numerical solution of crack problems in gradient elasticity // *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Engineering and Computational Mechanics*. 2010. Vol. 163. P. 73–82. DOI: 10.1680/eacm.2010.163.2.73
22. *Solyaev Y., Dobryanskiy V.* Enriched C^1 Finite Elements for Crack Problems in Simplified Strain Gradient Elasticity // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2025. Vol. 126. e70081. DOI: 10.1002/nme.70081
23. *Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А.* Новое решение задачи о трещине в растягиваемой ортотропной пластине // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2021. № 6. С. 23–32. DOI: 10.31857/S0572329921060167
24. *Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А.* Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости // *Физическая мезомеханика*. 2018. Т. 21, № 4. С. 5–12. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14001
25. *Vasil'ev V.V., Lur'e S.A.* New Method for Studying the Strength of Brittle Bodies with Cracks // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2020. Vol. 2020. P. 291–297. DOI: 10.1134/S0036029520040345
26. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2016. № 5. С. 61–67.
27. *Vasiliev V., Lurie S., Solyaev Y.* New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity // *Engineering Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 258. 108080. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.108080
28. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Обобщенное решение задачи о круглой мембране, нагруженной сосредоточенной силой // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2016. № 3. С. 115–118.
29. *Solyaev Y., Lurie S., Altenbach H., dell'Isola F.* On the elastic wedge problem within simplified and incomplete strain gradient elasticity theories // *International Journal of Solids and Structures*. 2022. Vol. 239/240. 111433. DOI: 10.1016/j.ijsoistr.2022.111433
30. *Ломакин Е.В., Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О.* Об уточнении напряжённого состояния в прикладных задачах упругости за счёт градиентных эффектов // *Доклады Академии наук*. 2019. Т. 489, № 6. С. 585–591. DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591
31. *Askes H., Susmel L.* Understanding cracked materials: is Linear Elastic Fracture Mechanics obsolete? // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2015. Vol. 38. P. 154–160. DOI: 10.1111/ffe.12183
32. *Askes H., Susmel L.* Gradient enriched linear-elastic crack tip stresses to estimate the static strength of cracked engineering ceramics // *Fracture and Structural Integrity*. 2013. Vol. 7. P. 87–93. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.25.13
33. *Bagni C., Askes H., Susmel L.* Gradient-enriched linear-elastic tip stresses to perform the high-cycle fatigue assessment of notched plain concrete // *Fracture and Structural Integrity*. 2015. Vol. 9. P. 105–110. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.33.14
34. *Соляев Ю.О., Щербаков С.С., Голубкин К.С., Поляков П.О.* Оценка масштабных параметров металлов по данным усталостных испытаний образцов с поверхностными дефектами // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2025. № 1. С. 170–196. DOI: 10.31857/S1026351925010098
35. *Адамов А.А.* О гипотезе однородности, масштабных параметрах длины и краевом эффекте для изотропного континуума Коссера // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2010. Т. 16, № 3. С. 329–346.
36. *Benzley S.E.* Representation of singularities with isoparametric finite elements // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1974. Vol. 8. P. 537–545. DOI: 10.1002/NME.1620080310
37. *Xiao Q.Z., Karihaloo B.L.* An overview of a hybrid crack element and determination of its complete displacement field // *Engineering Fracture Mechanics*. 2007. Vol. 74. P. 1107–1117. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2006.12.022
38. *Степанова Л.В.* Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений) // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2019. Т. 22, № 3. С. 345–361. DOI: 10.15372/SJNM20190307
39. *Henshell R.D., Shaw K.G.* Crack tip finite elements are unnecessary // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1975. Vol. 9. P. 495–507. DOI: 10.1002/nme.1620090302
40. *Nejati M., Paluszny A., Zimmerman R.W.* On the use of quarter-point tetrahedral finite elements in linear elastic fracture mechanics // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 144. P. 194–221. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.06.055
41. *Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G.* Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2009. Vol. 57. P. 1898–1920. DOI: 10.1016/j.jmps.2009.07.005
42. *Solyaev Y.* Higher-order asymptotic crack-tip fields in simplified strain gradient elasticity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 130. 104321. DOI: 10.1016/j.tafmec.2024.104321
43. *Sciarra G., Vidoli S.* Asymptotic Fracture Modes in Strain-Gradient Elasticity: Size Effects and Characteristic Lengths for Isotropic Materials // *Journal of Elasticity*. 2013. Vol. 113. P. 27–53. DOI: 10.1007/s10659-012-9409-y
44. *Dasgupta S., Sengupta D.* A higher-order triangular plate bending element revisited // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990. Vol. 30. P. 419–430. DOI: 10.1002/NME.1620300303

45. Abaqus User Subroutines Reference Guide. Dassault Systèmes, 2016. 683 p.
46. Barenblatt G.I. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture // Advances in Applied Mechanics. 1962. Vol. 7. P. 55–129. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2

Сведения об авторах:

Шелков Кирилл Андреевич (корр.), асп., асс., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; e-mail: shelkov_k@mail.ru; ORCID: 0009-0003-4618-0633
 Соляев Юрий Олегович, дфмн, внс, Институт прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН), г. Москва, Ленинградский пр-т, д. 7, стр. 12; e-mail: yurysolyaev@ya.ru; ORCID: 0000-0001-8258-2726

Research article

Implementation of C^1 -continuous finite element method within strain gradient elasticity for crack problems

K.A. Shelkov¹, Y.O. Solyaev^{1,2}

¹ Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

² Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Strain gradient elasticity (SGE) offers the possibility of regularizing a wide class of problems in classical solid mechanics, including those involving cracks, sharp corners, concentrated loads, dislocations, etc. Within the framework of SGE, it is assumed that the strain energy density depends not only on the strains themselves but also on their spatial derivatives, which imposes additional smoothness requirements on the strain and stress fields realized in SGE solutions. This work presents an implementation of a C^1 -continuous finite element method, based on a simplified strain gradient elasticity theory, in the Abaqus/CAE software suite. Standard and enriched three-node elements are presented; 5th-order polynomials are used as shape functions. The implementation was carried out using a user subroutine UEL and a custom user interface. Based on calculations performed for mode I, mode II, and mixed-mode crack opening problems, the mesh convergence of the obtained solutions is investigated, and estimates of the stress distribution near the crack tip are provided. The computational efficiency of the enriched elements compared to the standard ones is also demonstrated, due to their faster convergence rate. The use of enriched elements allows for obtaining the amplitude coefficients of the asymptotic SGE solutions, which, in turn, enable the calculation of the J -integral and the application of energy criteria from linear fracture mechanics while accounting for the size effect.

Keywords: Strain gradient elasticity, crack problems, asymptotic solutions, fracture mechanics, numerical calculations, UEL, enriched elements

Received: 22.12.2025 / *Published online:* 01.06.2026

Acknowledgements

The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-79-10228-II).

References

1. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 48. P. 1962–1990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006
2. Bärnkopf E., Kövesdi B., Dunai L. Investigation of Stress Concentration Zones in FEM-Based Design of Welded Plated Structures. Buildings. 2023. Vol. 13. 1057. DOI: 10.3390/buildings13041057
3. Solyaev Y.O. Neklassicheskiye masshtabnyye efekty v prikladnykh modelyakh gradiyentnoy teorii uprugosti i elektrouprugosti: PhD Dissertation in Physical and Mathematical Sciences / Solyaev Yuriy Olegovich. Moscow: Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 2022. 295 p.
4. Sinclair G.B., Beisheim J.R., Kardak A.A. On the Detection of Stress Singularities in Finite Element Analysis. Journal of Applied Mechanics. 2019. Vol. 86. 021005. DOI: 10.1115/1.4041766
5. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Fedorov A. Yu., Shardakov I.N. Numerical analysis of singular solutions of two-dimensional problems of asymmetric elasticity. Mechanics of Solids. 2013. Vol. 48. P. 397–404. DOI: 10.3103/S0025654413040067

6. *Matveenko V.P., Fedorov A.Y., Galkina E.B.* Numerical investigation of stress concentration at the tip of the V-notch partially filled with material. *Computational Continuum Mechanics*. 2022. Vol. 15, no. 3. P. 333–342. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.25
7. *Valvo P.S.* A further step towards a physically consistent virtual crack closure technique. *International Journal of Fracture*. 2015. Vol. 192. P. 235–244. DOI: 10.1007/s10704-015-0007-4
8. *Krueger R.* Virtual crack closure technique: History, approach, and applications. *Applied Mechanics Reviews*. 2004. Vol. 57. P. 109–143. DOI: 10.1115/1.1595677
9. *Lekhnitskii S.G.* Anisotropic Plates. Gordon and Breach Science Publishers, 1968. 534 p.
10. *Moes N., Dolbow J., Belytschko T.* A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999. Vol. 46. P. 131–150. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.3.CO;2-A
11. *Ahmed A.* eXtended Finite Element Method (XFEM) - Modeling arbitrary discontinuities and Failure analysis: Dissertation for the Master Degree / Ahmed Awais. 2009. 196 p.
12. *Diehl T.* Modeling Surface-Bonded Structures with ABAQUS Cohesive Elements: Beam-Type Solutions. *Abaqus User's Conference Proceedings*. 2005. P. 89–115.
13. *Aifantis E.C.* On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *International Journal of Engineering Science*. 1992. Vol. 30. P. 1279–1299. DOI: 10.1016/0020-7225(92)90141-3
14. *Cauchy L.* Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1851. Vol. 32. P. 323–326.
15. *Kunin I.A.* Teoriya uprugikh sred s mikrostrukturoy: nelokal'naya teoriya uprugosti. Moscow: Nauka, 1975. 415 p.
16. *Aero E.L., Kuvshinskii E.V.* Osnovnyye uravneniya teorii uprugosti sred s vrashchatel'nym vzaimodeystviyem chastits. *Fizika Tverdogo Tela*. 1960. Vol. 2, no. 7. P. 1399–1409.
17. *Levin V.M.* The relation between mathematical expectations of stress and strain tensors in elastic microheterogeneous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1971. Vol. 35, no. 4. P. 694–701. DOI: 10.1016/0021-8928(71)90064-5
18. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. P. 52–78. DOI: 10.1007/BF00248490
19. *Toupin R.A.* Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. P. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945
20. *Green A.E., Rivlin R.S.* Simple force and stress multipoles. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16, no. 5. P. 325–353. DOI: 10.1007/BF00281725
21. *Papanicolopulos S.-A., Zervos A.* Numerical solution of crack problems in gradient elasticity. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Engineering and Computational Mechanics*. 2010. Vol. 163. P. 73–82. DOI: 10.1680/eacm.2010.163.2.73
22. *Solyaev Y., Dobryanskiy V.* Enriched C^1 Finite Elements for Crack Problems in Simplified Strain Gradient Elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2025. Vol. 126. e70081. DOI: 10.1002/nme.70081
23. *Vasil'ev V.V., Lurie S.A., Salov V.A.* New Solution to the Problem of a Crack in an Orthotropic Plate under Tension. *Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 56, no. 6. P. 902–910. DOI: 10.3103/S0025654421060200
24. *Vasiliev V.V., Lurie S.A., Salov V.A.* Estimation of the Strength of Plates with Cracks Based on the Maximum Stress Criterion in a Scale-Dependent Generalized Theory of Elasticity. *Physical Mesomechanics*. 2018. Vol. 21, no. 4. P. 456–462. DOI: 10.1134/S102995991906002X
25. *Vasil'ev V.V., Lur'e S.A.* New Method for Studying the Strength of Brittle Bodies with Cracks. *Russian Metallurgy (Metally)*. 2020. Vol. 2020. P. 291–297. DOI: 10.1134/S0036029520040345
26. *Vasil'ev V.V., Lur'e S.A.* New solution of the plane problem for an equilibrium crack. *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51, no. 5. P. 557–561. DOI: 10.3103/S0025654416050071
27. *Vasiliev V., Lurie S., Solyaev Y.* New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity. *Engineering Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 258. 108080. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.108080
28. *Vasil'ev V.V., Lur'e S.A.* Generalized solution of the problem of a circular membrane loaded by a lumped force. *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51, no. 3. P. 334–338. DOI: 10.3103/S0025654416030109
29. *Solyaev Y., Lurie S., Altenbach H., dell'Isola F.* On the elastic wedge problem within simplified and incomplete strain gradient elasticity theories. *International Journal of Solids and Structures*. 2022. Vol. 239/240. 111433. DOI: 10.1016/j.ijsoistr.2022.111433
30. *Lomakin E.V., Lurie S.A., Rabinskiy L.N., Solyaev Y.O.* Refined Stress Analysis in Applied Elasticity Problems Accounting for Gradient Effects. *Doklady Physics*. 2019. Vol. 64, no. 12. P. 482–486. DOI: 10.1134/S1028335819120103
31. *Askes H., Susmel L.* Understanding cracked materials: is Linear Elastic Fracture Mechanics obsolete?. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2015. Vol. 38. P. 154–160. DOI: 10.1111/ffe.12183
32. *Askes H., Susmel L.* Gradient enriched linear-elastic crack tip stresses to estimate the static strength of cracked engineering ceramics. *Fracture and Structural Integrity*. 2013. Vol. 7. P. 87–93. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.25.13
33. *Bagni C., Askes H., Susmel L.* Gradient-enriched linear-elastic tip stresses to perform the high-cycle fatigue assessment of notched plain concrete. *Fracture and Structural Integrity*. 2015. Vol. 9. P. 105–110. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.33.14

34. Solyaev Y.O., Sherbakov S.S., Golubkin K.S., et al. Evaluation of the Length Scale Parameters of Metals Based on Fatigue Tests Data for Samples with Surface Defects. *Mechanics of Solids*. 2025. Vol. 60. P. 112–127. DOI: 10.1134/S0025654424605305
35. Adamov A.A. Homogeneity hypothesis, scale length parameters and edge effect for an isotropic Cosserat continuum. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. 2010. Vol. 16, no. 3. P. 329–346.
36. Benzley S.E. Representation of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1974. Vol. 8. P. 537–545. DOI: 10.1002/NME.1620080310
37. Xiao Q.Z., Karihaloo B.L. An overview of a hybrid crack element and determination of its complete displacement field. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007. Vol. 74. P. 1107–1117. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2006.12.022
38. Stepanova L.V. Asymptotic Analysis of the Crack Tip Stress Field (Consideration of Higher Order Terms). *Numerical Analysis and Applications*. 2019. Vol. 12. P. 284–296. DOI: 10.1134/S1995423919030078
39. Henshell R.D., Shaw K.G. Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1975. Vol. 9. P. 495–507. DOI: 10.1002/nme.1620090302
40. Nejati M., Paluszny A., Zimmerman R.W. On the use of quarter-point tetrahedral finite elements in linear elastic fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 144. P. 194–221. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.06.055
41. Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2009. Vol. 57. P. 1898–1920. DOI: 10.1016/j.jmps.2009.07.005
42. Solyaev Y. Higher-order asymptotic crack-tip fields in simplified strain gradient elasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 130. 104321. DOI: 10.1016/j.tafmec.2024.104321
43. Sciarra G., Vidoli S. Asymptotic Fracture Modes in Strain-Gradient Elasticity: Size Effects and Characteristic Lengths for Isotropic Materials. *Journal of Elasticity*. 2013. Vol. 113. P. 27–53. DOI: 10.1007/s10659-012-9409-y
44. Dasgupta S., Sengupta D. A higher-order triangular plate bending element revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990. Vol. 30. P. 419–430. DOI: 10.1002/NME.1620300303
45. Abaqus User Subroutines Reference Guide. Dassault Systèmes, 2016. 683 p.
46. Barenblatt G.I. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. *Advances in Applied Mechanics*. 1962. Vol. 7. P. 55–129. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2