

Научная статья

Численное исследование движения твердой частицы в поле ультразвуковой стоячей волны

И.О. Сбоев¹, Т.П. Любимова², К.А. Рыбкин³

¹ АО «ОДК-Авиадвигатель», Пермь, Российская Федерация

² Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

³ Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация

Работа посвящена численному исследованию движения твердой частицы в поле ультразвуковой стоячей волны в замкнутой полости, заполненной вязкой жидкостью. Моделирование движения твердой частицы выполняется в два этапа. На первом этапе рассчитывается распределение акустического давления в жидкости, при этом влияние на него течения и частицы не учитывается. Рассматриваются два типа источника ультразвука: излучатель, занимающий всю нижнюю границу полости, и излучатель конечного размера. При первом типе источника распределение акустического давления для плоской гармонической волны получается аналитическим путем из одномерного уравнения Гельмгольца. При излучателе конечного размера уравнение Гельмгольца решается численно, методом конечных элементов, что дает возможность принять во внимание сложную структуру звукового поля и краевые эффекты вблизи излучателя. На втором этапе по рассчитанному звуковому полю вычисляются распределения потенциала Горькова и силы акустического излучения, действующей на твердую частицу заданного размера. Посредством численного решения уравнений движения частицы с учетом присоединенной массы и установленной силы акустического излучения и вязкого трения рассчитываются траектории движения частицы в поле ультразвуковой стоячей волны. Для определения коэффициента сопротивления в диапазоне чисел Рейнольдса от 0.1 до 0.8×10^3 используется модель Шиллера–Науманна. Расчеты проведены для различных начальных положений частицы. Вычисленные данные согласуются с известными представлениями о движении твердых частиц в поле ультразвуковой стоячей волны. В соответствии с ними твердая частица под действием силы акустического излучения стремится попасть в область минимума потенциала Горькова, в которой находятся узлы стоячей волны. Моделирование движения частицы в поле ультразвуковой стоячей волны, возникающей под действием излучателя конечного размера, позволило описать смещение частицы в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, наблюдавшееся в экспериментах.

Ключевые слова: ультразвуковая стоячая волна, распределение акустического давления, потенциал Горькова, сила акустического излучения, сила вязкого трения, динамика частицы, численное моделирование

Получение: 06.11.2025 / Публикация онлайн: 25.02.2026

УДК 534.231

1. Введение

Изучение поведения взвешенных в жидкости частиц или пузырьков под действием внешних высокочастотных звуковых (далее ультразвуковых) колебаний имеет фундаментальное значение для понимания и управления широким спектром технологических процессов. Способность ультразвуковой стоячей волны упорядоченно перемещать микро- и наночастицы лежит в основе таких методов, как акустофоретическое обогащение и разделение суспензий [1, 2]. Кроме того, контроль над положением и движением частиц открывает возможности для управления физико-химическими процессами, протекающими в рабочих камерах сонохимических реакторов и флотационных машин при обогащении полезных ископаемых [3–8], а также в микрофлюидных устройствах при тонкой очистке жидкостей [9, 10].

Ключевым механизмом, обеспечивающим взаимодействие между ультразвуковой волной и твердыми частицами, является первичная сила акустического излучения, возникающая при рассеянии волны на частице в силу разных акустических импедансов материалов среды и частиц. В стоячей волне эта сила значительно превышает силу в бегущей волне и направляет частицы к узлам или пучностям давления в зависимости от знака коэффициента акустического контраста, который в свою очередь определяется соотношением плотностей и скоростей звука в жидкости и во взвешенных частицах. Как правило, твердые частицы перемещаются к пучностям, а пузырьки и капли — к узлам стоячей волны [10–12]. Это свойство широко применяется, например, для концентрации клеток в нужных зонах [13, 14].

Более глубокое понимание описываемых механизмов важно не только для оптимизации упомянутых процессов, но и для решения смежных прикладных задач, таких как прогнозирование кавитационной эрозии в высоконагруженных элементах различных агрегатов и узлов, включая, к примеру, проточные части топливных систем авиационных и ракетных двигателей [15]. Результаты исследования динамики частиц в ультразвуковых полях служат основой для совершенствования математических моделей и создания более эффективных и надежных технологий во многих отраслях.

В настоящей работе рассматриваются два случая динамики одиночной твердой частицы в поле ультразвуковой стоячей волны: одномерное движение частицы в плоской гармонической волне и двухмерное движение в ультразвуковой стоячей волне, создаваемой компактным источником звуковых колебаний (излучателем). Для плоской гармонической волны при заданных граничных условиях аналитически находится одномерное распределение акустического давления вдоль направления распространения волны. Также проводится сравнение аналитического решения с результатами численного моделирования, полученными методом конечных элементов

(МКЭ). Поведение твердой частицы в поле ультразвуковой стоячей волны исследуется в широком диапазоне чисел Рейнольдса при различных начальных положениях частицы.

2. Постановка задачи

Численно моделируется движение твердой сферической частицы радиусом R_p в вязкой жидкости, заполняющей ограниченную твердыми стенками полость, в поле ультразвуковой стоячей волны в отсутствие поля силы тяжести. Расчетная область представляет собой прямоугольную двухмерную полость шириной L и высотой H . Ультразвуковая волна в жидкости создается излучателем, расположенным на нижней границе полости. Характеристики излучателя — это постоянная частота f и амплитуда колебаний давления P . Рассматриваются две конфигурации излучателя и соответствующие им граничные условия на стенках рабочей полости:

- в первой вся нижняя граница 1 является излучателем; боковые стенки 2 абсолютно жесткие и отвечают условиям полного отражения звуковой волны с сохранением фазы колебаний (Рис. 1а);
- во второй излучателем служит область 1 конечной длины D на нижней границе полости; участки нижней границы вне излучателя и боковые стенки 2 твердые; это локально реагирующие поверхности, у которых нормальная скорость распространения возмущений определяется значением акустического давления и которые характеризуются величиной акустического импеданса (Рис. 1б).

При обеих конфигурациях верхняя граница полости 3 считается твердой, на ней задается условие акустического импеданса. Исследование движения твердой частицы 4 в поле ультразвуковой стоячей волны выполняется в приближении Релея, при котором $R_p \ll \lambda$, где $\lambda = c/f$ — длина волны в жидкости, c — скорость звука в жидкости.

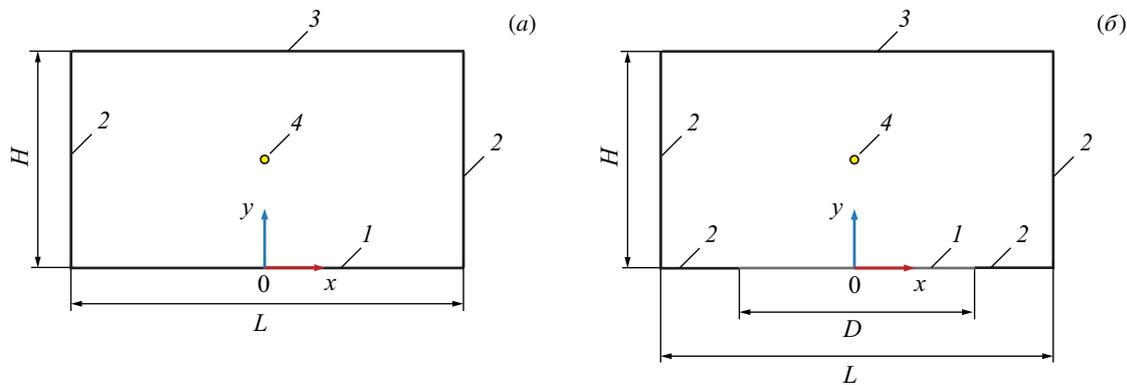


Рис. 1. Геометрия расчетной области и граничные условия для моделирования плоской (а) и двухмерной (б) ультразвуковой стоячей волн: 1 – излучатель; 2 – твердые границы вне излучателя и боковые границы полости; 3 – верхняя твердая граница, на которой известен акустический импеданс; 4 – твердая сферическая частица

3. Математическая модель

Поставленная задача решается в два этапа. На I-м этапе моделируется ультразвуковая стоячая волна, при этом влияние течения жидкости и твердой частицы на распределение акустического давления в полости не учитывается. На II-м этапе по найденному звуковому полю вычисляются распределения потенциала Горькова и силы акустического излучения, действующей на твердую частицу с заданными свойствами. Путем численного решения уравнений движения частицы с учетом присоединенной массы, а также рассчитанных сил акустического излучения и вязкого трения вычисляются траектории движения частицы заданного размера.

3.1. Уравнение стоячей волны

В общем случае линейное однородное волновое уравнение, описывающее распределение акустического давления $p(x, y, t)$ в двухмерной ультразвуковой волне без учета акустических течений и затухания волн в среде, представляется в виде [16, 17]:

$$\Delta p(x, y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет решение:

$$p(x, y, t) = \tilde{p}(x, y) e^{-i\omega t},$$

где $\tilde{p}(x, y)$ — амплитуда давления в ультразвуковой волне, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, i — мнимая единица.

В процессе распространения волны движение жидкости отсутствует ($\mathbf{u} = 0$).

3.1.1. Уравнение Гельмгольца для плоской волны

При рассмотрении задачи для первой конфигурации излучателя (вся нижняя граница полости является излучателем) боковые стенки $x = \pm L/2$ предполагаются абсолютно жесткими, на них считается выполненным

условие обращения в нуль нормальной производной акустического давления:

$$\frac{\partial \tilde{p}(x)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Такое условие соответствует расчетной области, боковые границы которой находятся на большом расстоянии друг от друга. Тогда звуковое поле в среде однородно по координате x , фронт распространяющейся волны представляет собой линии $y = \text{const}$, то есть он параллелен нижней границе полости. Таким образом, можно использовать приближение одномерной гармонической волны, характеристики которой изменяются только вдоль оси y . При этом волновое уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 p(y,t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(y,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет следующее решение:

$$p(y,t) = \tilde{p}(y)e^{-i\omega t}, \quad (4)$$

в котором $\tilde{p}(y)$ — амплитуда колебаний давления в плоской гармонической волне. После подстановки решения (4) в уравнение (3) получается одномерное уравнение Гельмгольца для плоской гармонической волны:

$$\frac{d^2 \tilde{p}(y)}{dy^2} + k^2 \tilde{p}(y) = 0, \quad (5)$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ — модуль волнового вектора (волновое число), характеризующий пространственный период ультразвуковой волны.

Как известно, результатом сложения двух гармонических звуковых волн, создаваемых в объеме жидкости конечной высоты, является стоячая звуковая волна с характерным чередованием узлов (нулей) и пучностей (максимумов и минимумов) давления. В общем случае вид стоячей волны зависит от выбора граничных условий на нижней (излучающей) и верхней (отражающей) границах. Поскольку вся нижняя граница полости $y = 0$ служит излучателем, на ней выполняется условие:

$$\tilde{p}(y)|_{y=0} = P, \quad (6)$$

где P — амплитуда колебаний давления на излучающей границе (излучателе). Верхняя граница полости $y = H$ предполагается твердой [17], на ней считается, что

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}(y)}{\partial y} \right|_{y=H} = -\frac{i\omega\rho}{Z_1} \tilde{p}(y)|_{y=H}. \quad (7)$$

Поведение ультразвуковой волны при отражении от верхней границы определяется величиной акустического импеданса: $Z_1 = \rho_1 c_1$, где ρ_1 и c_1 — плотность материала верхней поверхности и скорость звука в нем.

3.1.2. Уравнение Гельмгольца для двухмерной стоячей волны

В экспериментальных исследованиях обычно используется излучатель конечного размера (см., например, [18, 19], где $D = 8.8 \times 10^{-2}$ м). Вследствие этого появляются краевые эффекты и искривляется фронт звуковой волны не только вблизи излучателя, но и у твердых границ полости. Двухмерное распределение акустического давления $\tilde{p}(x,y)$ становится неоднородным по координате x и для его нахождения требуется решение двухмерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}(x,y)}{\partial y^2} + k^2 \tilde{p}(x,y) = 0 \quad (8)$$

с учетом следующих граничных условий:

– на части нижней границы (излучателе, $(-D/2) < x < (D/2)$, $y = 0$) выполняется условие:

$$\tilde{p}(x,y)|_{(-D/2) < x < (D/2), y=0} = P, \quad (9)$$

где P — амплитуда колебаний давления на излучателе;

– боковые стенки $x = \pm L/2$ и участки нижней границы вне излучателя $(-L/2) < x < (-D/2)$ и $D/2 < x < L/2$, $y = 0$ являются твердыми, на них задается величина акустического импеданса $Z_2 = \rho_2 c_2$, где ρ_2 и c_2 — плотность их материала и скорость звука в нем:

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}(x)}{\partial x} \right|_{x=\pm L/2} = -\frac{i\omega\rho}{Z_2} \tilde{p}(x)|_{x=\pm L/2}, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}(y)}{\partial y} \right|_{(-L/2) < x < (-D/2), D/2 < x < L/2, y=0} = -\frac{i\omega\rho}{Z_2} \tilde{p}(y)|_{(-L/2) < x < (-D/2), D/2 < x < L/2, y=0}; \quad (11)$$

– на верхней границе $y = H$ расчетной области имеют место однородные граничные условия (выполняется условие (7)).

3.2. Уравнение движения твердой частицы в поле стоячей волны

Движение твердой частицы в отсутствие поля силы тяжести определяется силами, действующими как со стороны ультразвуковой стоячей волны (акустическим излучением \mathbf{F}_A), так и со стороны окружающей жидкости (вязким трением \mathbf{F}_D), и в общем случае описывается уравнением:

$$m_p \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_D, \quad (12)$$

где m_p — масса частицы, \mathbf{v}_p — скорость движения частицы. Исходя из выражения связи между скоростью частицы и радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ ее центра масс

$$\mathbf{v}_p = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},$$

уравнение движения (12) можно представить в виде:

$$m_p \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_D$ обозначает результирующую объемную силу.

В настоящей работе для простоты моделируется движение сферической недеформируемой частицы заданного радиуса R_p из материала с постоянной плотностью ρ_p . Масса частицы вычисляется как

$$m_p = \frac{4\pi}{3} R_p^3 \rho_p.$$

Влияние окружающей жидкости на движущуюся в ней частицу учитывается через присоединенную массу частицы:

$$m_v = m_p + \frac{1}{2} m_f,$$

которая включает массу вытесненной частицей жидкости:

$$m_f = \frac{4\pi}{3} R_p^3 \rho,$$

где ρ — плотность жидкости в месте расположения частицы.

Таким образом, на движущуюся частицу со стороны окружающей жидкости действует дополнительная объемная сила \mathbf{F}_V , представляющая собой силу реакции жидкости, стремящейся занять освободившееся за частицей пространство. Другими словами, сила \mathbf{F}_V выражает инертность окружающей жидкости. Для частицы, движущейся со скоростью \mathbf{v}_p в покоящейся жидкости, эта сила определяется следующим образом [20, 21]:

$$\mathbf{F}_V = -\frac{1}{2} m_f \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}. \quad (13)$$

С учетом объемной силы (13) уравнение движения твердой частицы принимает вид:

$$m_v \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F}. \quad (14)$$

При решении задачи движения твердой частицы в двухмерной полости уравнение движения (12) следует дополнить граничными условиями, определяющими поведение частицы вблизи стенок полости:

– на нижней ($y = 0$) и верхней ($y = H$) границах выполняется условие прилипания

$$\mathbf{v}_p|_{y=0} = \mathbf{v}_p|_{y=H} = 0;$$

– на боковых границах $x = \pm L/2$ частица «исчезает», то есть ее положение из дальнейших вычислений исключается.

3.2.1. Сила акустического излучения

На твердую сферическую частицу в вязкой сжимаемой жидкости со стороны ультразвуковой стоячей волны действует первичная сила акустического излучения \mathbf{F}_A , величина которой для плоской волны, согласно [22], определяется градиентом скалярной функции $U(x, y)$, называемой также потенциалом Горькова:

$$\mathbf{F}_A = -\nabla U(x, y),$$

где $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$ — векторный дифференциальный оператора набла, \mathbf{i}, \mathbf{j} — единичные векторы по осям x и y соответственно. В приближении Релея, в соответствии с которым $R_p \ll \lambda$ (или $kR_p \ll 1$), выражение для потенциала $U(x, y)$ имеет вид:

$$U(x, y) = \frac{4\pi R_p^3}{3} \left[f_1 \frac{1}{2} \kappa_s \langle \tilde{p}^2(x, y) \rangle - f_2 \frac{3}{4} \rho \langle \tilde{v}^2(x, y) \rangle \right], \quad (15)$$

где κ_s — адиабатическая сжимаемость окружающей частицу жидкости, определяемая формулой:

$$\kappa_s = 1 / (\rho c^2).$$

В выражении (15) величины $\langle \tilde{p}(x, y) \rangle$ и $\langle \tilde{v}(x, y) \rangle$ обозначают среднеквадратичные значения амплитуды колебания давления и акустической скорости в ультразвуковой стоячей волне для вычисления которых используются выражения:

$$\langle \tilde{p}(x, y) \rangle = |\tilde{p}(x, y)| / \sqrt{2}, \quad (16)$$

$$\langle \tilde{v}(x, y) \rangle = |\tilde{v}(x, y)| / \sqrt{2}, \quad (17)$$

а безразмерные коэффициенты f_1 и f_2 отвечают за вклад в монопольное рассеяние частицей ультразвуковой волны за счет сжимаемости и дипольное рассеяние за счет плотности. Как правило, их значения зависят от того, является частица твердой или жидкой, а также учитываются ли при вычислении силы акустического излучения эффекты вязкости и теплопроводности [23]. В предположении твердой частицы и отсутствии диссипации звуковой энергии выражения для коэффициентов f_1 и f_2 представляются в виде:

$$f_1 = 1 - \frac{\kappa_{ps}}{\kappa_s}, \quad f_2 = 2 \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) / \left(2 \frac{\rho_p}{\rho} + 1 \right),$$

где κ_{ps} — адиабатическая сжимаемость материала частицы, которая определяется следующим образом:

$$\frac{1}{\kappa_{ps}} = \rho_p \left(c_l^2 - \frac{4}{3} c_t^2 \right),$$

при этом c_l и c_t — скорости продольной и поперечной волн в материале частицы.

Комбинация коэффициентов рассеяния f_1 и f_2 образует коэффициент акустического контраста [24]:

$$\varphi(\rho, c) = \frac{1}{3} f_1 + \frac{1}{2} f_2 = \left(\rho_p + \frac{2}{3} (\rho_p - \rho) \right) / (2\rho_p + \rho) - \frac{1}{3} \frac{\rho c^2}{\rho_p c_l^2},$$

зависящий также от плотности и скорости звука в жидкости. Он показывает, подвергается ли частица воздействию силы акустического излучения в поле стоячей волны. В этом случае направление ее движения определяется знаком коэффициента акустического контраста φ . Так, при $\varphi > 0$ (твердая частица) движение происходит в сторону узла давления, тогда как при $\varphi < 0$ (капля и воздушный пузырек) перемещение совершается в направлении пучности [24, 25].

Как отмечалось выше, выражения для f_1 , f_2 и φ , которые характеризуют рассеяние звуковых волн на твердой частице, справедливы в приближении Релея [22]. Выражение (15) в свою очередь позволяет рассчитать потенциал U при условии, что размер частицы R_p превышает толщину вязкого пограничного слоя δ_v , то есть $R_p \gg \delta_v$. Толщина вязкого пограничного слоя оценивается по формуле:

$$\delta_v = \sqrt{2\eta / (\rho\omega)}.$$

Необходимость учета диссипативных эффектов в среде возникает, как правило, при условии, что размер движущейся в ней частицы сравним с толщиной вязкого пограничного слоя, то есть в рассматриваемой в данной статье задаче: при $R_p \approx \delta_v$. Для используемых во многих экспериментах излучателей (см., например, [18, 19]) частота колебаний составляет $f = 28$ кГц, из чего следует, что толщина вязкого пограничного слоя в воде есть $\delta_v = 3.18 \times 10^{-6}$ м, то есть при этой частоте звуковых колебаний и размере частицы $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м диссипативными эффектами в жидкости можно пренебрегать.

3.2.2. Сила вязкого трения

В общем случае на частицу массой m_p , движущуюся со скоростью \mathbf{v}_p в потоке жидкости, имеющем постоянную скорость \mathbf{u} , со стороны окружающей среды действует сила вязкого трения:

$$\mathbf{F}_D = \frac{1}{\tau_p} m_p (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p), \quad (18)$$

где τ_p — время отклика скорости частицы на внешние факторы. Для определения τ_p существует множество формул [26]. Время τ_p , как и сила вязкого трения \mathbf{F}_D , выражается через относительное число Рейнольдса:

$$\text{Re}_r = 2\rho|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|R_p/\eta. \quad (19)$$

Поскольку в настоящей работе считается, что жидкость покоится, то от относительного числа Рейнольдса (19) можно перейти к числу Рейнольдса для частицы:

$$\text{Re}_p = 2\rho|\mathbf{v}_p|R_p/\eta. \quad (20)$$

В записи для τ_p обычно используется безразмерный коэффициент сопротивления C_D , что с учетом (20) дает:

$$\tau_p = 16\rho_p R_p^2 / (3\eta C_D \text{Re}_p).$$

При малых значениях числа Рейнольдса ($\text{Re}_p \ll 1$) сопротивление в жидкости подчиняется закону Стокса, а соответствующее ему выражение для коэффициента сопротивления имеет вид:

$$C_D = 24/\text{Re}_p.$$

Время отклика скорости частицы в этом случае определяется как

$$\tau_p = 2\rho_p R_p^2 / 9\eta. \quad (21)$$

В результате подстановки τ_p вида (21) в выражение (18) получается модель Стокса для силы вязкого трения в приближении малых чисел Рейнольдса:

$$\mathbf{F}_D = 6\pi\eta R_p \mathbf{v}_p. \quad (22)$$

Важно отметить, что при $\text{Re}_p \ll 1$ сила вязкого трения (22) зависит от скорости частицы \mathbf{v}_p линейно и явным образом не связана с числом Рейнольдса Re_p .

В диапазоне чисел Рейнольдса $0.1 < \text{Re}_p < 0.8 \times 10^3$ закон Стокса не применим. Для вычисления силы вязкого трения применяется модель Шиллера–Науманна [27], в рамках которой коэффициент сопротивления C_D определяется как:

$$C_D = 24(1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687})/\text{Re}_p. \quad (23)$$

При выражении времени отклика скорости τ_p через коэффициент сопротивления (23) и подстановке в (18) получается формула для силы вязкого трения, действующей на частицу, в указанном диапазоне чисел Рейнольдса:

$$\mathbf{F}_D = 6\pi\eta R_p (1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687}) \mathbf{v}_p. \quad (24)$$

Поведение частицы при высоких числах Рейнольдса ($\text{Re}_p > 0.8 \times 10^3$) в настоящей работе не рассматривается.

Следует отметить, что в используемую модель при вычислении силы вязкого трения (24), действующей со стороны окружающей жидкости на движущуюся в ней частицу, входит коэффициент динамической вязкости η , при этом затухание звуковой энергии в жидкости за счет внутреннего трения отсутствует. Тепловые потери в пограничном слое вблизи частицы, обусловленные вязкостью и теплопроводностью, не учитываются. Помимо этого, при моделировании распространения ультразвуковых волн в жидкости не рассматриваются процессы зарождения и развития кавитационных парогазовых пузырьков; жидкая среда считается однородной и однофазной [28].

4. Методы моделирования

4.1. Плоская гармоническая волна в жидкости

Моделирование движения твердой частицы в поле ультразвуковой стоячей волны включает два этапа.

На I-м этапе при первой конфигурации излучателя (Рис. 1а) решается одномерное уравнение Гельмгольца (5) с граничными условиями (2), (6), (7), позволяющее вычислить распределения акустического давления $\tilde{p}(y)$ и акустической скорости $\tilde{v}(y)$ плоской гармонической волны.

Уравнение (5) имеет общее решение вида:

$$\tilde{p}(y) = Ae^{-iky} + Be^{iky}, \quad (25)$$

где A — амплитуда ультразвуковой волны, бегущей в положительном направлении оси y (падающая волна), B — амплитуда ультразвуковой волны, бегущей в отрицательном направлении оси y (отраженная волна). В результате подстановки общего решения (25) для плоской гармонической волны в условие акустического импеданса на верхней границе (7) получается выражение:

$$-ikAe^{-ikH} + ikBe^{ikH} = -\frac{i\omega\rho}{Z_1}(Ae^{-ikH} + Be^{ikH}),$$

или

$$Be^{ikH} - Ae^{-ikH} = -\frac{\omega\rho}{kZ_1} (Ae^{-ikH} + Be^{ikH}). \quad (26)$$

С учетом в уравнении (26) волнового числа в виде $k = \omega/c$ и соотношений

$$\frac{\omega\rho}{kZ_1} = \frac{\rho c}{Z_1} = \frac{Z}{Z_1},$$

можно записать уравнение, связывающее коэффициенты A и B :

$$B = \left(\frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} \right) Ae^{-2ikH}, \quad B = R_1 Ae^{-2ikH}, \quad (27)$$

где $R_1 = (Z_1 - Z)/(Z_1 + Z)$ — коэффициент отражения от верхней границы. Акустический импеданс жидкости (воды) определяется как $Z = \rho c$, где ρ — плотность воды, c — скорость звука в воде. Подстановка B из (27) в граничное условие (6) на нижней границе дает для коэффициентов A и B следующие выражения:

$$A = \frac{P}{1 + R_1 e^{-2ikH}}, \quad B = \frac{P R_1 e^{-2ikH}}{1 + R_1 e^{-2ikH}}. \quad (28)$$

Наконец, из общего решения (25) с найденными выражениями коэффициентов (28) следует формула для одномерного распределения акустического давления $\tilde{p}(y)$ в плоской гармонической волне:

$$\tilde{p}(y) = \frac{P}{1 + R_1 e^{-2ikH}} (e^{-iky} + R_1 e^{-ik(2H-y)}).$$

Давление $\tilde{p}(y)$ позволяет рассчитывать акустическую скорость $\tilde{v}(y)$ вдоль направления распространения ультразвуковой волны в однородной среде [16, 17]:

$$\tilde{v}(y) = \frac{1}{\rho\omega} \frac{\partial \tilde{p}(y)}{\partial y},$$

или

$$\tilde{p}(y) = \text{Real} \left[\frac{ikP}{\rho\omega(1 + R_1 e^{-2ikH})} (e^{-iky} - R_1 e^{-ik(2H-y)}) \right].$$

На II-м этапе путем численного решения обыкновенного дифференциального уравнения (14) вычисляется траектория одномерного движения твердой частицы вдоль оси y в плоской гармонической волне. В качестве начальных условий при $t = 0$ задается начальная координата: $y_0 = 3\lambda/8$, и скорость частицы: $v_{p0} = 0$. Поиск решения уравнения (14) осуществляется с применением итерационных методов. В результате расчетов находится положение (координата y) центра масс частицы в различные моменты времени.

Следует отметить, что при решении уравнения движения (14) на текущем временном шаге положение и скорость перемещения центра масс твердой частицы уже другие по отношению к себе на предыдущем шаге. Следовательно, они пересчитываются в соответствии с величиной и направлением результирующей объемной силы \mathbf{F} , вычисленной по распределению акустического давления и положению центра масс частицы на предыдущем шаге. Строго говоря, кроме этого, сила вязкого трения \mathbf{F}_D и, следовательно, результирующая сила \mathbf{F} являются функциями времени. Поэтому значение силы \mathbf{F}_D необходимо уточнять на каждом временном шаге еще и с учетом значения скорости v_p частицы.

4.2. Двухмерная стоячая волна в жидкости

Для второй конфигурации излучателя (Рис. 1б) на I-м этапе численно, при помощи МКЭ, решается уравнение Гельмгольца (8), описывающее двумерные распределения акустического давления $\tilde{p}(x, y)$ и акустической скорости $\tilde{v}(x, y)$ в ультразвуковой стоячей волне для рабочей полости с граничными условиями (7), (9), (10). Причем на верхней границе вместо Z_1 задается величина акустического импеданса Z_2 . В рамках используемого метода решается уравнение (8) для частотной области в стационарной постановке (более подробно метод решения в частотной области представлен в [29, 30]).

На II-м этапе рассматриваются уравнения движения (14), описывающие перемещение центра масс твердой частицы в поле двухмерной ультразвуковой стоячей волны с учетом присоединенной массы. Для вычисления компонент силы акустического излучения \mathbf{F}_A , действующей на взвешенную в жидкости твердую сферическую частицу радиусом R_p в условиях ультразвуковой волны со среднеквадратичными значениями давления (16) и акустической скорости (17) применяются выражения:

$$\begin{aligned} (F_A)_x &= -\frac{4\pi R_p^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} [0.329\kappa_s \langle \tilde{p}^2(x, y) \rangle - 0.069\rho \langle \tilde{v}^2(x, y) \rangle], \\ (F_A)_y &= -\frac{4\pi R_p^3}{3} \frac{\partial}{\partial y} [0.329\kappa_s \langle \tilde{p}^2(x, y) \rangle - 0.069\rho \langle \tilde{v}^2(x, y) \rangle], \end{aligned} \quad (29)$$

при этом компоненты силы вязкого трения \mathbf{F}_D , действующей на твердую частицу со стороны окружающей жидкости, представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} (F_D)_x &= 6\pi\eta R_p (1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687}) \frac{\partial x}{\partial t}, \\ (F_D)_y &= 6\pi\eta R_p (1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687}) \frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (30)$$

Моделирование движения частицы в поле ультразвуковой стоячей волны осуществляется с использованием нестационарного решателя. Расчет начинается с момента времени $t = 0$ при заданных начальных условиях. Интегрирование по времени выполняется в решателе неявным обобщенным α -методом [31, 32]. Метод, изначально разработанный для решения уравнений Навье–Стокса, обеспечивает высокоточную аппроксимацию и контроль диссипации высокочастотных численных шумов. Коэффициент диссипации выбран равным 0.75.

На каждом временном шаге система уравнений решается при помощи метода Ньютона из библиотеки итерационного линейного решателя GMRES. Решатель автоматически проверяет наличие ошибок для каждого решенного уравнения. Итерации продолжаются до тех пор, пока выявляются ошибки и норма вектора невязки не менее 2.2×10^{-14} , либо не достигается заданное максимальное количество итераций (например, 10^4). После этого расчеты прекращаются, даже если требуемая сходимость не достигнута. Погрешность вычисления производных по времени определяется решателем автоматически.

4.3. Исследование сходимости при изменении параметров расчетной сетки

Для корректного вычисления положения центра масс движущейся в звуковом поле твердой частицы необходимо уточнить размер элемента расчетной сетки Δ (шага по координате) и провести оценку влияния временного шага Δt на сходимость результатов вычислений.

Анализ сеточной сходимости выполняется для расчетной области высотой $H = \lambda$ с граничными условиями, приведенными на рисунке 1а. Частота излучателя принимается равной $f = 28$ кГц, а амплитуда колебаний — $P = 50p_a$. В качестве исследуемой жидкости рассматривается вода [29, 30].

Для выбранных условий изучается влияние шага Δ на число Рейнольдса Re_p для твердой частицы конечного размера $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м с начальным положением в расчетной области $y(t=0) = \lambda/2$. Используется прямоугольная структурированная сетка с общим количеством элементов $N_{\min} = 2.01 \times 10^2$ (шаг сетки $\Delta_{\max} = \lambda/10 = 5.3 \times 10^{-3}$ м) или $N_{\max} = 2.05 \times 10^4$ (шаг сетки $\Delta_{\min} = \lambda/100 = 0.53 \times 10^{-3}$ м). При этом толщина вязкого пограничного слоя δ_v в настоящей работе не является определяющим параметром при выборе пространственного разрешения расчетной сетки, так как диссипативные эффекты в вязком пограничном слое не учитываются.

Для выбранных конфигурации расчетной области и параметров f и P число Рейнольдса частицы — Re_p , оказывается близким к 0.8×10^3 (Рис. 2). Сила вязкого трения, действующая на частицу со стороны окружающей жидкости, в этом случае описывается моделью Шиллера–Науманна (24). Кроме этого, при заданной амплитуде колебаний давления P , создаваемого излучателем, движение частицы в поле ультразвуковой стоячей волны приобретает четкий периодический характер, и включение в расчет силы вязкого трения приводит к заметному уменьшению со временем скорости движения частицы.

На основании полученной зависимости $\text{Re}_p(t)$ проводится оценка максимального значения числа Рейнольдса Re_p^{\max} , достигаемого частицей в течение расчетного времени t_{all} . Соотношение между временным шагом Δt

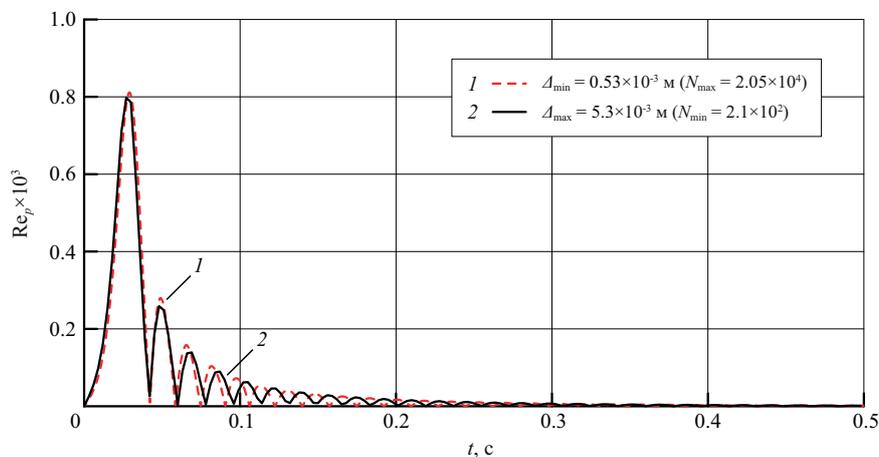


Рис. 2. Влияние размера шага расчетной сетки на величину числа Рейнольдса Re_p движущейся в плоской стоячей волне твердой частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м при начальном положении $y_0 = \lambda/2$ ($f = 28$ кГц ($\lambda = 5.32 \times 10^{-2}$ м), $P = 50p_a$)

и шагом сетки Δ устанавливается, как правило, на основании критерия Куранта–Фридрихса–Леви:

$$\Delta t \leq 0.5 \Delta / |v_p^{\max}|_y, \quad (31)$$

где $|v_p^{\max}|_y$ — модуль максимальной скорости частицы вдоль оси y , соответствующей наибольшему числу Рейнольдса Re_p^{\max} . Выражение (31) можно переписать, если в (20) в качестве Re_p взять наибольшее значение числа Рейнольдса Re_p^{\max} :

$$|v_p^{\max}|_y = \eta Re_p^{\max} / (2\rho_p R_p).$$

Таким образом, условие для выбора оптимального временного шага Δt , необходимого для корректного вычисления положения центра масс частицы, приобретает вид:

$$\Delta t \leq \rho_p R_p \Delta / (\eta Re_p^{\max}).$$

Так, например, для твердой частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м в поле ультразвуковой стоячей волны с амплитудой $P = 50p_a$, при котором достигается число Рейнольдса $Re_p = 0.8 \times 10^3$, оптимальное значение временного шага при расчетной сетке с размером элемента $\Delta_{\min} \leq 0.53 \times 10^{-3}$ м составляет $\Delta t_{\max} \leq 3 \times 10^{-4}$ с. Следует отметить, что указанный размер элемента оказывается сравнимым по величине с радиусом частицы. Согласно результатам параметрического исследования, относительная разность максимальных значений Re_p^{\max} при сетке с размером элемента в диапазоне от Δ_{\min} до Δ_{\max} достигает 5%.

5. Результаты расчетов

Представленные ниже результаты численного моделирования получены в предположении, что ультразвуковая стоячая волна влияет на динамику твердой частицы конечного размера $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м в жидкости, но при этом распределение акустического давления в стоячей волне не зависит от присутствия в ней частицы.

5.1. Параметры рабочей жидкости и твердой частицы

В качестве исследуемой жидкости выбирается среда со свойствами воды при постоянной температуре $T_0 = 293$ К и атмосферном давлении $p_a = 1.01 \times 10^5$ Па (Табл. 1). Рассматривается движение твердой сферической недеформируемой частицы со свойствами полиамида (Табл. 2). Значения коэффициентов монополюсного и дипольного рассеяния, соответственно, равны $f_1 = 0.654$ и $f_2 = 0.092$, а коэффициент акустического контраста составляет $\varphi = 0.265$.

Таблица 1. Свойства рабочей жидкости (вода при $T_0 = 293$ К и $p_a = 1.01 \times 10^5$ Па)

Плотность	Скорость звуковой волны	Акустический импеданс	Динамическая вязкость	Длина волны при $f = 28$ кГц	Толщина вязкого (сдвигового) пограничного слоя	Адиабатическая сжимаемость
ρ , кг/м ³	c , м/с	Z , кг/(м ² ·с)	η , Па·с	λ , м	δ_v , м	κ_s , 1/Па
0.998×10^3	1.49×10^3	1.49×10^6	1.01×10^{-3}	5.32×10^{-2}	3.18×10^{-6}	4.51×10^{-10}

Таблица 2. Свойства частицы из полиамида

Плотность	Скорость продольной звуковой волны	Скорость поперечной (сдвиговой) звуковой волны	Адиабатическая сжимаемость
ρ_p , кг/м ³	c_l , м/с	c_t , м/с	κ_{ps} , 1/Па
1.15×10^3	2.68×10^3	1.10×10^3	1.56×10^{-10}

5.2. Случай плоской стоячей волны

Моделирование плоской ультразвуковой стоячей волны выполняется в расчетной области с излучающей нижней границей (Рис. 1а). Частота колебаний излучателя составляет $f = 28$ кГц ($\lambda = 5.32 \times 10^{-2}$ м), амплитуда давления — $P = p_a$. Для верхней границы из кварцевого стекла величина акустического импеданса есть $Z_1 = \rho_1 c_1$, где $\rho_1 = 3.6 \times 10^3$ кг/м³, $c_1 = 4.26 \times 10^3$ м/с. Коэффициент отражения для границы раздела «вода–кварц» составляет $R_1 = 0.82$.

5.2.1. Характеристики звукового поля

Рассчитанное с использованием МКЭ распределение акустического давления $\tilde{p}(x, y)$ демонстрирует рисунок 3. При выбранных граничных условиях и заданных параметрах излучателя полученное распределение акустического давления оказывается однородным по координате x . Кроме того, по высоте расчетной области укладывается

четное число четвертей длины волны, причем звуковое поле содержит две параллельные излучающей границе узловые линии (на рисунке показаны белым цветом). Узловые линии, которым отвечает акустическое давление близкое к нулю, располагаются на расстоянии $y = \lambda/4$ (1.33×10^{-2} м) и $y = 3\lambda/4$ (3.99×10^{-2} м) от поверхности излучателя и разделяют звуковое поле на области максимального и минимального давления (пучности). В верхней и нижней частях расчетной области на рисунке 3 находятся пучности, в которых давление $\tilde{p} > 0$. Центральной пучности отвечает отрицательное давление: $\tilde{p} < 0$.

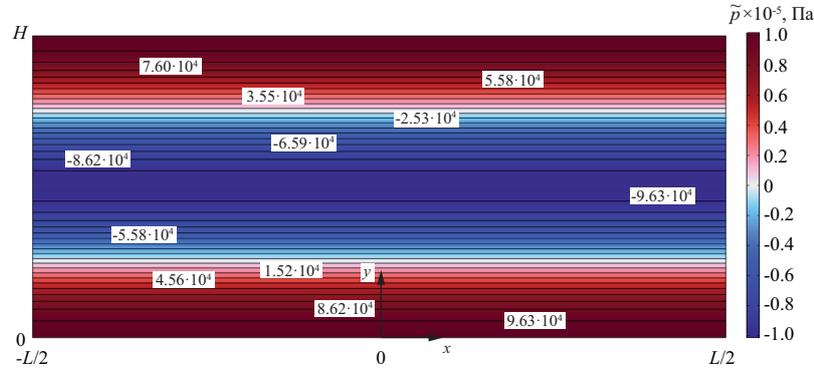


Рис. 3. Распределение акустического давления $\tilde{p}(x, y)$ в плоской стоячей волне

Рисунок 4а содержит установленное путем аналитического решения уравнения Гельмгольца (5) одномерное вертикальное распределение (профиль) акустического давления $\tilde{p}(y)$ в плоской стоячей волне для рабочей полости высотой $H = \lambda$, заполненной водой, при $f = 28$ кГц и $P = p_a$. В этом случае вещественная часть акустического давления описывается как

$$\tilde{p}(y) = \text{Real} \left[\frac{p_a}{1 + 0.82e^{-2ik\lambda}} \left(e^{-iky} + 0.82e^{-ik(2\lambda - y)} \right) \right], \tag{32}$$

а выражение для вещественной части акустической скорости $\tilde{v}(y)$, соответствующее полученному распределению давления (32), имеет вид:

$$\tilde{v}(y) = \text{Real} \left[\frac{ikp_a}{\rho\omega(1 + 0.82e^{-2ik\lambda})} \left(e^{-iky} - 0.82e^{-ik(2\lambda - y)} \right) \right].$$

Видно, что вблизи поверхности излучателя $y = 0$ и твердой верхней границы $y = H$ присутствуют области максимального давления (пучности), в которых $\tilde{p} = p_a$ при этом в центральной части полости, при $y = \lambda/2$, акустическое давление принимает наименьшее (отрицательное) значение: $\tilde{p} = -p_a$. Для расчетной области с выбранной геометрией узлы давления, в которых $\tilde{p} \approx 0$, находятся на расстоянии $y = \lambda/4$ и $y = 3\lambda/4$ от излучающей нижней границы. При этом колебания давления в смежных по отношению к узлам областях оказываются смещенными по фазе на π , то есть происходят в противофазе.

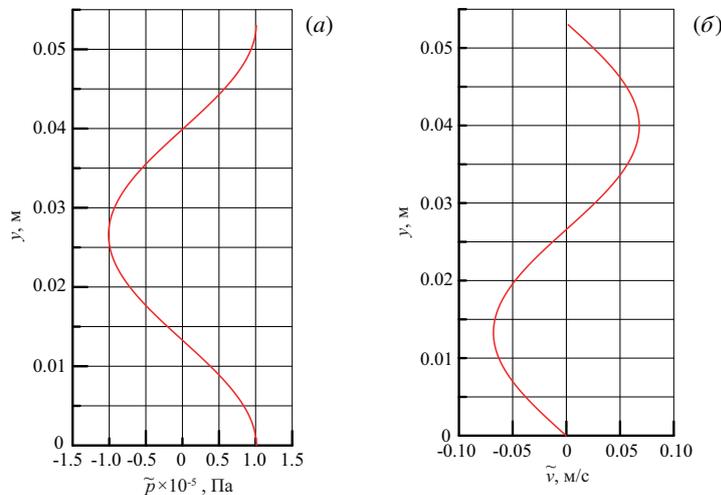


Рис. 4. Профиль вещественной части акустического давления \tilde{p} (а) и акустической скорости \tilde{v} (б) в плоской стоячей волне вдоль оси y

Профиль акустической скорости $\tilde{v}(y)$ представлен на рисунке 4б. Узел акустической скорости, в котором $\tilde{v} = 0$, располагается на высоте $y = \lambda/2$ или в пучности давления. Вблизи поверхности излучателя $y = 0$ и на верхней границе $y = H$ ввиду отсутствия проскальзывания скорость также обращается в нуль: $\tilde{v} = 0$. График распределения акустической скорости $\tilde{v}(y)$ смещается на четверть длины волны относительно распределения давления $\tilde{p}(y)$, что соответствует сдвигу их фаз колебаний на $\pi/2$. Таким образом, в плоской волне узлы давления $\tilde{p}(y)$ совпадают с пучностями акустической скорости $\tilde{v}(y)$ и наоборот.

5.2.2. Потенциал Горькова и сила акустического излучения, действующая на частицу в поле плоской стоячей волны

Распределение потенциала Горькова $U(x, y)$ для твердой частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м в звуковом поле с распределением акустического давления, показанным на рисунке 3, также является однородным по координате x и представляет собой набор линий равного значения потенциала $U = \text{const}$, параллельных излучающей нижней границе (Рис. 5). В местах, соответствующих пучностям давления $\tilde{p}(x, y)$, потенциал U достигает наибольшего значения (светлые полосы), а в областях узловых линий оказывается минимальным (темные полосы).

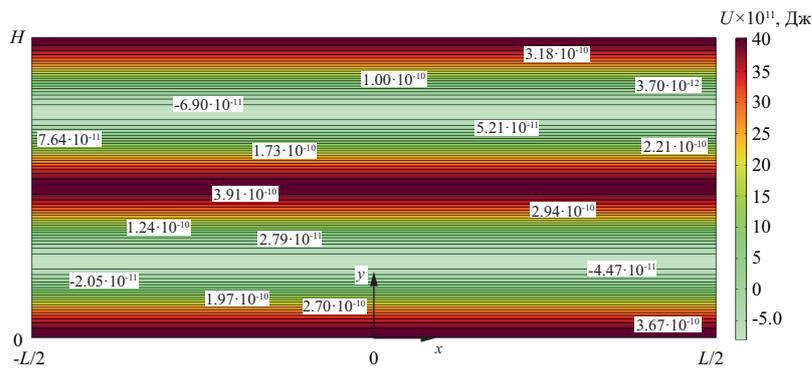


Рис. 5. Распределение потенциала $U(x, y)$ для твердой полиамидной сферической частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м в плоской стоячей волне

Вертикальный профиль потенциала Горькова $U(y)$, связанный со среднеквадратичными значениями давления (16) и акустической скорости (17) в плоской стоячей волне, определяется аналитически с использованием выражения (15). Как видно из рисунка 6а, для частицы заданного радиуса потенциал также принимает наибольшее значение в пучностях давления, в то время как минимуму потенциала соответствуют узлы давления (см. Рис. 4а).

На рисунке 6б показано распределение вертикальной компоненты силы акустического излучения $(F_A)_y$, которая действует со стороны плоской стоячей волны на полиамидную частицу заданного размера вдоль оси y . Для расчета компоненты $(F_A)_y$ использовано выражение (29). Сила $(F_A)_y$ направлена от пучностей ($y = 0, \lambda/2, \lambda$) к узлам ($y = \lambda/4, 3\lambda/4$), то есть в сторону уменьшения давления. При этом $(F_A)_y$ обращается в нуль не только в узлах, но и в пучностях давления, а при переходе через узел ее направление меняется на противоположное. Для заданной конфигурации расчетной области компонента $(F_A)_y$ достигает максимума в местах с наименьшим значением потенциала U . При этом $(F_A)_y > 0$ на участках от 0 до $\lambda/4$ и от $\lambda/2$ до $3\lambda/4$, где она направлена от

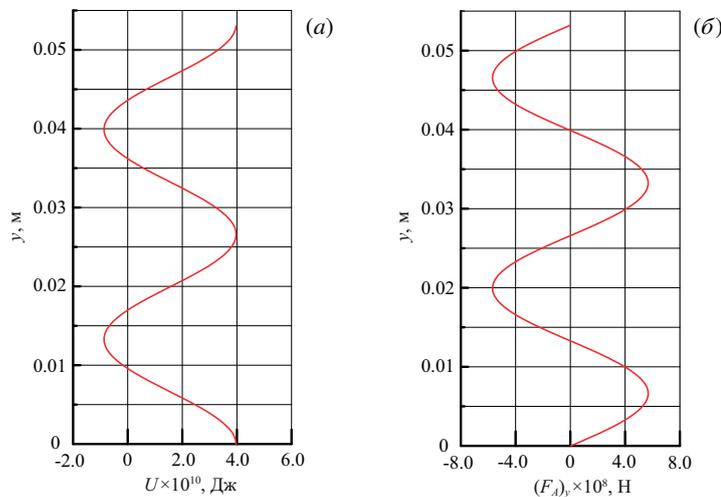


Рис. 6. Вертикальные распределения (профили) потенциала Горькова U (а) и вертикальной компоненты акустической силы $(F_A)_y$ (б) в плоской стоячей волне вдоль оси y

нижней границы (излучателя) к узлам давления, а на участках от $y = \lambda/4$ до $\lambda/2$ и от $3\lambda/4$ до λ сила отрицательна $(F_A)_y < 0$ и направлена от верхней (отражающей) границы к узлам давления стоячей волны.

5.2.3. Траектория твердой частицы в звуковом поле плоской стоячей волны

Траектория одномерного движения сферической полиамидной частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м в звуковом поле плоской стоячей волны, рассчитанная численно согласно уравнению (14) с учетом подстановки в него выражений для силы акустического излучения (29) и силы вязкого трения (30), показана на рисунке 7. Начальная координата частицы в момент времени $t = 0$ выбрана равной $y_1 = \lambda/8$, $y_2 = 3\lambda/8$ и $y_3 = \lambda/2$, а ее начальная скорость положена нулевой: $\mathbf{v}_p = 0$.

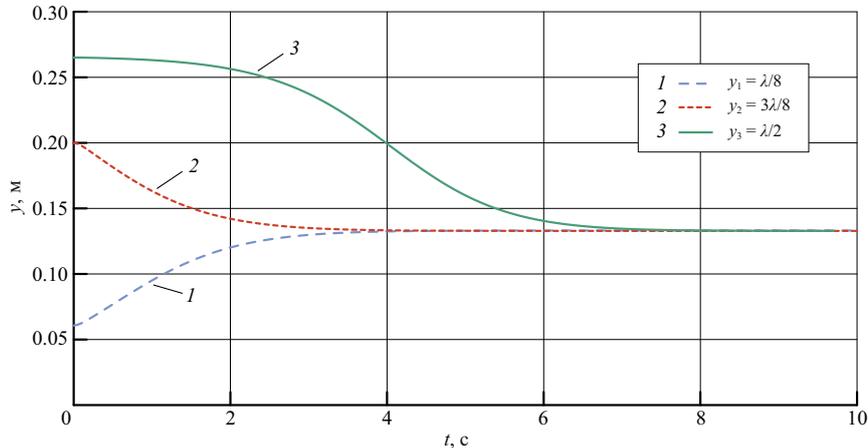


Рис. 7. Изменение положения центра масс твердой частицы в звуковом поле плоской стоячей волны при различных начальных положениях частицы

При увеличении амплитуды колебаний излучателя наблюдается изменение характера движения частицы. На рисунке 8 приведены траектории центра масс твердой частицы при $f = 28$ кГц ($\lambda = 5.32 \times 10^{-2}$ м) и $P = 50 p_a$. В начальный момент времени $t = 0$ положение частицы на оси y определено исходя из расположения узлов ($l_1 = \lambda/4$, $l_2 = 3\lambda/4$) и пучностей ($r_1 = 0$, $r_2 = \lambda/2$, $r_3 = \lambda$) в полости высотой $H = \lambda$ (Рис. 4) и рассмотрены начальные значения: $y_1 = \lambda/8$, $y_2 = 3\lambda/8$, $y_3 = \lambda/2$, $y_4 = 5\lambda/8$, $y_5 = 7\lambda/8$.

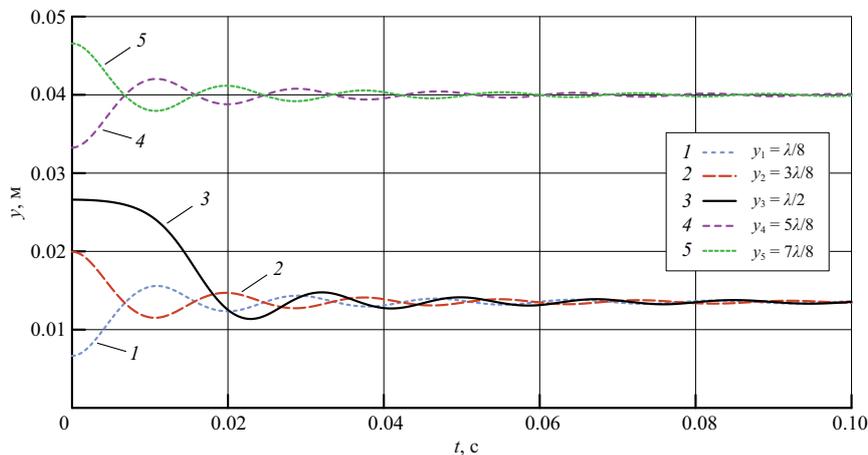


Рис. 8. Изменение положения центра масс твердой частицы в звуковом поле плоской стоячей волны при различных начальных положениях частицы

Так, например, оказавшись в начальный момент времени в пучности ультразвуковой стоячей волны ($r_2 = \lambda/2$), частица начинает ускоренно двигаться в направлении нижнего узла давления ($l_1 = \lambda/4$). По мере приближения к узлу ее скорость сначала повышается до максимального значения, а затем постепенно уменьшается. Достигнув узла, частица продолжает движение по инерции и попадает в нижнюю часть расчетной области, где акустическое давление меняет знак. При движении здесь скорость частицы продолжает уменьшаться до тех пор, пока она не остановится. После остановки частица снова приходит в движение, но в обратном направлении, при этом ее скорость постепенно возрастает. На этом участке частица смещается в положительном направлении оси y . При переходе через узел частица, спустя некоторое время, снова останавливается, а затем описанный выше процесс повторяется. Таким образом, в отличие от рисунка 7, при увеличении амплитуды акустического давления движение частицы относительно узла давления в ультразвуковой стоячей волне принимает вид затухающих колебаний.

Поведение частицы в звуковом поле плоской стоячей волны также можно описать, опираясь на действующие на частицу силы, при этом ввиду периодического характера распределения акустического давления вдоль оси y достаточно исследовать движение частицы на участке от 0 до $\lambda/2$ (линии 1 и 2 на рисунке 8).

Так, на участке от 0 до $\lambda/4$ акустическая сила положительна $(F_A)_y > 0$ и направлена вверх. Величина $(F_A)_y$ возрастает до максимального значения в промежутке от 0 до $\lambda/8$. Частица с начальным положением от 0 до $\lambda/8$ начнет подниматься вверх к ближайшему узлу ($l_1 = \lambda/4$), при этом ее скорость увеличивается. Одновременно с увеличением скорости движения частицы также изменяется и величина вертикальной составляющей силы вязкого трения $(F_D)_y$. По мере приближения частицы к узлу на участке от $\lambda/8$ до $\lambda/4$ скорость ее движения уменьшается. Поведение частицы на участке от $\lambda/4$ до $\lambda/2$, где акустическая сила отрицательна $(F_A)_y < 0$, повторяется согласно описанному выше сценарию, но направление движения частицы меняется на противоположное, и она стремится к ближайшему узлу ($l_1 = \lambda/4$). При прохождении частицей узловой линии направление действия силы акустического излучения меняется на противоположное.

Таким образом, в условиях плоской стоячей волны с высокой амплитудой акустического давления частица совершает колебания вблизи узлов давления, которые выступают в роли положений устойчивого равновесия. Пучности стоячей волны в свою очередь соответствуют положениям неустойчивого равновесия.

5.3. Излучатель конечного размера

Исследование характеристик распределения акустического давления и движения твердой частицы в поле ультразвуковой стоячей волны при излучателе конечного размера $D = 8.8 \times 10^{-2}$ м (Рис. 1б) проводится в двумерной постановке путем численного решения задачи (8), (9)–(11) с применением конечно-элементной модели. Материал всех стенок расчетной области предполагается одинаковым и соответствующим акриловому стеклу. Таким образом, на всех границах кроме поверхности излучателя, задается величина акустического импеданса $Z_2 = \rho_2 c_2$, где ρ_2 — плотность акрила, c_2 — скорость звука в акриле. Такие граничные условия наиболее близки к условиям эксперимента [18, 19].

5.3.1. Структура звукового поля

На рисунке 9 представлены распределения акустического давления $\tilde{p}(x,y)$ и потенциала Горькова $U(x,y)$ в двумерной ультразвуковой стоячей волне при $f = 28$ кГц ($\lambda = 5.32 \times 10^{-2}$ м) для однородных граничных условий. Величина амплитуды колебаний давления, создаваемого компактным излучателем, выбирается равной $P = 45 p_a$. При заданных граничных условиях такому значению давления P для частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м соответствует число Рейнольдса Re_p в диапазоне от 0.75×10^3 до 0.8×10^3 , что удовлетворяет требованию модели Шиллера–Науманна (24).

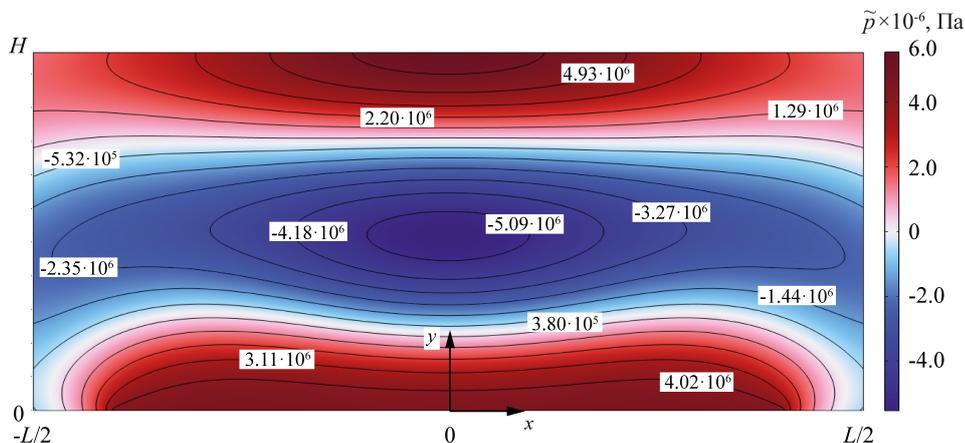


Рис. 9. Распределение акустического давления $\tilde{p}(x,y)$ в ультразвуковой стоячей волне, создаваемой излучателем конечного размера $D = 8.8 \times 10^{-2}$ м в расчетной области с однородными граничными условиями

Как видно, звуковое поле при выбранных условиях представляет собой чередование областей с положительным (при сжатии) и отрицательным (при растяжении) значением акустического давления. В отличие от плоской стоячей волны (Рис. 3) пространственная структура звукового поля в ультразвуковой стоячей волне, вызванной излучателем конечного размера, имеет более сложный характер, что подтверждается наличием изогнутых узловых линий (зон с близким к нулю значением акустического давления, порядка 10^3 Па, и пучностей). Наибольшее положительное давление достигается в верхней (порядка 4.93×10^6 Па) и нижней (порядка 4.02×10^6 Па) пучностях. Область с наибольшим отрицательным давлением (порядка -5.09×10^6 Па) формируется в центральной пучности.

5.3.2. Динамика твердой частицы

Полученному полю акустического давления $\tilde{p}(x,y)$ соответствует неоднородное распределение потенциала Горькова $U(x,y)$, рассчитанное для частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м (Рис. 10). Как и в случае с плоской

стоячей волной (Рис. 3), узлы давления отвечают областям минимального потенциала, в то время как в пучностях потенциал оказывается наибольшим. Однако ввиду неоднородности звукового поля, области высокого потенциала становятся локализованными вблизи нижней и верхней границ, а также в центральной части расчетной области. При этом области наименьшего потенциала смещаются к периферии.

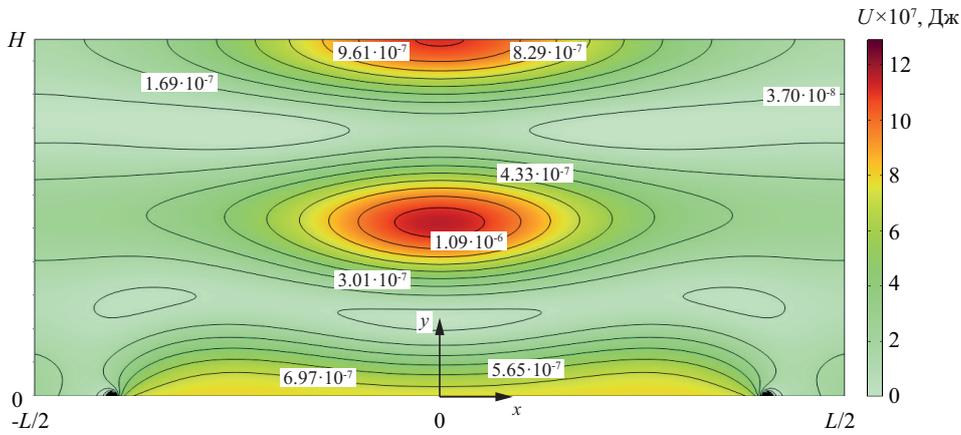


Рис. 10. Распределение потенциала Горькова $U(x, y)$ для твердой полиамидной сферической частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м в ультразвуковой стоячей волне, создаваемой излучателем конечного размера $D = 8.8 \times 10^{-2}$ м в расчетной области с однородными граничными условиями

На твердую частицу, помещенную в вызванное компактным излучателем неоднородное звуковое поле, оказывает влияние не только вертикальная, но и горизонтальная составляющая силы акустического излучения $(F_A)_x$. Так, согласно полученным результатам (Рис. 11а, б), в начальный момент времени на частицу в основном действует вертикальная составляющая силы акустического излучения, которая достигает наибольшего значения $(F_A)_y = 1.2 \times 10^{-4}$ Н через 0.02 с после начала движения частицы, в то время как горизонтальная составляющая $(F_A)_x$ оказывается близкой к нулю. В этом случае частица вслед за направленной вверх силой $(F_A)_y > 0$ перемещается в положительном направлении оси y . При этом на нее со стороны окружающей жидкости начинает действовать сила вязкого трения $(F_D)_y$, направленная в противоположную сторону (Рис. 11а).

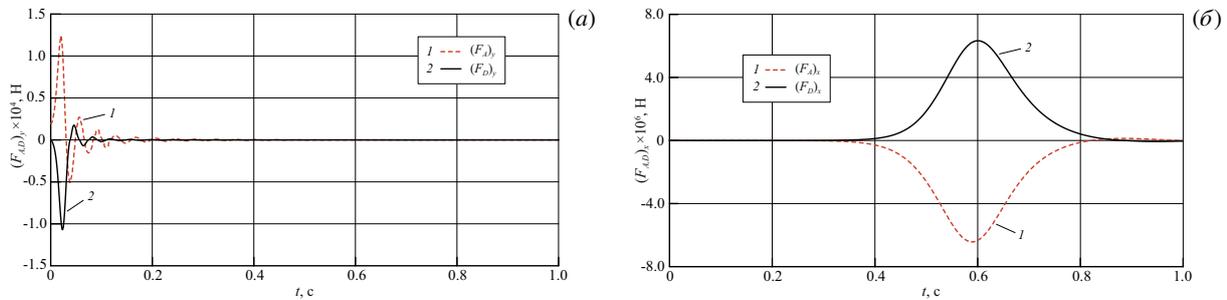


Рис. 11. Изменение со временем вертикальной (а) и горизонтальной (б) компонент силы акустического излучения F_A и силы вязкого трения F_D , влияющих на движущуюся в поле ультразвуковой стоячей волны твердую частицу при начальном положении $y_0 = \lambda/2$

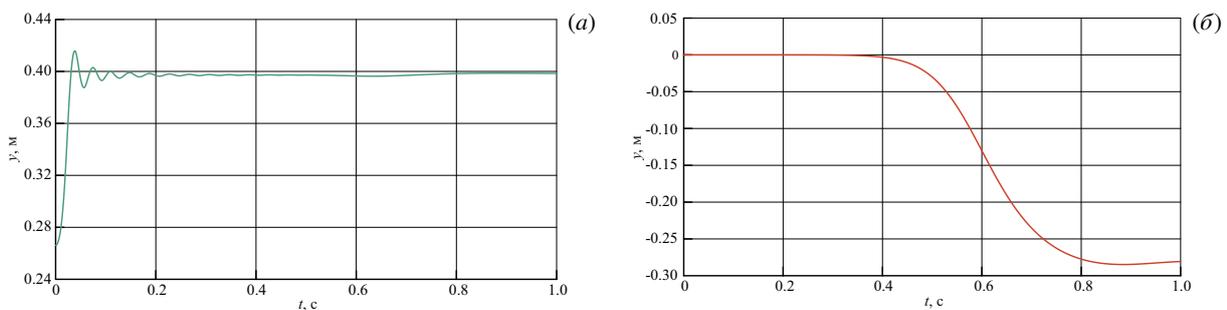


Рис. 12. Изменение положения центра масс твердой частицы радиусом $R_p = 0.5 \times 10^{-3}$ м в поле ультразвуковой стоячей волны под действием вертикальной составляющей силы акустического излучения $(F_A)_y$, направленной вдоль оси y (а); смещение частицы из центрального положения ($x_0 = 0, y_0 = \lambda/2$) под влиянием горизонтальной составляющей силы акустического излучения $(F_A)_x$ (б)

Через $t = 0.3$ с после начала движения частицы величина силы акустического излучения уменьшается до значения $(F_A)_y = -7.1 \times 10^{-7}$ Н. После этого в звуковом поле стоячей волны частица попадает под воздействие горизонтальной составляющей $(F_A)_x$, которая становится максимальной ($(F_A)_x = -6.4 \times 10^{-6}$ Н) через 0.6 с после начала движения частицы (Рис. 11б). К этому моменту времени вертикальная составляющая силы акустического излучения становится равной $(F_A)_y = -5.3 \times 10^{-8}$ Н.

Под действием силы $(F_A)_x < 0$, направленной вдоль горизонтальной оси x , твердая частица после нескольких колебаний вблизи верхней узловой линии (Рис. 12а) начинает смещаться в сторону левой боковой границы расчетной области (Рис. 12б). Таким образом, создаваемое излучателем конечного размера неоднородное распределение акустического давления в жидкости приводит к тому, что частица перемещается не только в вертикальном направлении к ближайшему узлу давления, но и вдоль узловой линии в сторону уменьшения потенциала U , который также распределяется неравномерно.

6. Выводы

Численно исследована динамика одиночной твердой сферической частицы в поле ультразвуковой стоячей волны, создаваемой в заполненной вязкой жидкостью замкнутой полости. Учитывается действие на частицу сил акустического излучения и вязкого трения. Стационарное звуковое поле для двух типов граничных условий получено путем аналитического решения одномерного уравнения Гельмгольца (для плоской гармонической волны) и численного решения двухмерного уравнения Гельмгольца с использованием МКЭ (для компактного излучателя). На основании рассчитанного акустического давления определено пространственное распределение потенциала Горькова и вычислена сила акустического излучения, действующая на твердую частицу в звуковом поле стоячей волны.

Траектории движения центра масс твердой частицы найдены из численного решения уравнения движения с учетом присоединенной массы, а также действующих на частицу силы акустического излучения и силы вязкого трения, описываемой моделью Шиллера–Науманна. В условиях плоской стоячей волны движение твердой частицы обусловлено совокупностью сил акустического излучения и вязкого трения, движение частицы при этом имеет характер затухающих колебаний, которые происходят вблизи линии узлов давления стоячей волны. При неоднородном вдоль излучающей поверхности распределении потенциала Горькова смещение частицы происходит вдоль узловой линии в направлении области с наименьшим потенциалом. Полученные данные позволяют описать смещение частицы в направлении, перпендикулярном распространению ультразвуковой волны, наблюдаемому в экспериментах [33].

Таким образом, выявленные закономерности перемещения одиночной твердой частицы в неоднородном звуковом поле вносят вклад в понимание процессов, происходящих при различных физико-химических процессах. В частности, механизм седиментации взвешенных частиц в области с минимальным потенциалом может быть экстраполирован на задачи акустофоретического разделения суспензий, флотационного обогащения, а также прогнозирования зон концентрации абразивных частиц и оценки рисков кавитационной эрозии.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 24-11-00269).

Литература

1. *Lai T.W., Tennakoon T., Chan K.C., Liu C.-H., Chao C.Y.H., Fu S.C.* The effect of microchannel height on the acoustophoretic motion of sub-micron particles // *Ultrasonics*. 2024. Vol. 136. 107126. DOI: 10.1016/j.ultras.2023.107126
2. *Namnat M.S., Moghimi Zand M., Houshfar E.* 3D numerical simulation of acoustophoretic motion induced by boundary-driven acoustic streaming in standing surface acoustic wave microfluidics // *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11, no. 1. 13326. DOI: 10.1038/s41598-021-90825-z
3. *Коновалов В.В., Любимова Т.П., Прокопьев С.А.* Взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости под действием акустических вибраций // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16, № 2. С. 141–149. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.2.11
4. *Mao Y., Xia W., Peng Y., Xie G.* Ultrasonic-assisted flotation of fine coal: A review // *Fuel Processing Technology*. 2019. Vol. 195. 106150. DOI: 10.1016/j.fuproc.2019.106150
5. *Chen Y., Truong V.N.T., Bu X., Xie G.* A review of effects and applications of ultrasound in mineral flotation // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2020. Vol. 60. 104739. DOI: 10.1016/j.ulsonch.2019.104739
6. *Bhangu S.K., Ashokkumar M.* Theory of Sonochemistry // *Sonochemistry: From Basic Principles to Innovative Applications*. 2016. P. 1–28. DOI: 10.1007/978-3-319-54271-3_1
7. *Viciconte G., Sarvothaman V.P., Guida P., Truscott T.T., Roberts W.L.* High-speed imaging and coumarin dosimetry of horn type ultrasonic reactors: influence of probe diameter and amplitude // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2025. 107362. DOI: 10.1016/j.ulsonch.2025.107362
8. *Wang X., Liang J.* Single-bubble sonoluminescence at two adjacent antinodes in a standing wave acoustic field // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2025. 107662. DOI: 10.1016/j.ulsonch.2025.107662

9. *Bazyar H., Kandemir M.H., Peper J., Andrade M.A.B., Bernassau A.L., Schroën K., Lammertink R.G.H.* Acoustophoresis of monodisperse oil droplets in water: Effect of symmetry breaking and non-resonance operation on oil trapping behavior // *Biomicrofluidics*. 2023. Vol. 17, no. 6. DOI: 10.1063/5.0175400
10. *Shi Q., Baasch T., Liu Z., Fornell A., Werr G., Barbe L., Tenje M.* Effects of the choice of the continuous phase in droplet microfluidics on internal particle manipulation with acoustophoresis // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2025. Vol. 157, no. 6. P. 4262–4272. DOI: 10.1121/10.0036771
11. *Ma J., Liang D., Yang X., Wang H., Wu F., Sun C., Xiao Y.* Numerical study of acoustophoretic manipulation of particles in microfluidic channels // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*. 2021. Vol. 235, no. 10. P. 1163–1174. DOI: 10.1177/09544119211024775
12. *Jiao J., He Y., You P., Shan F., Cui D.* The history force on bubbles translational motion in an acoustic field // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2020. Vol. 66. 105113. DOI: 10.1016/j.ultrasonch.2020.105113
13. *Urbansky A., Ohlsson P., Leshof A., Garofalo F., Scheding S., Laurell T.* Rapid and effective enrichment of mononuclear cells from blood using acoustophoresis // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. 17161. DOI: 10.1038/s41598-017-17200-9
14. *Kim U., Oh B., Ahn J., Lee S., Cho Y.* Inertia–Acoustophoresis Hybrid Microfluidic Device for Rapid and Efficient Cell Separation // *Sensors*. 2022. Vol. 22, no. 13. 4709. DOI: 10.3390/s22134709
15. *El Hassan M., Bukharin N., Al-Kouz W., Zhang J.-W., Li W.-F.* A Review on the Erosion Mechanism in Cavitating Jets and Their Industrial Applications // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, no. 7. 3166. DOI: 10.3390/app11073166
16. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
17. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
18. *Kuchinskiy M., Lyubimova T., Rybkin K., Sadovnikova A., Galishevskiy V.* Investigation of Cavitation in NaCl Solutions in a Sonochemical Reactor Using the Foil Test Method // *Fluid Dynamics & Materials Processing*. 2024. Vol. 20, no. 5. DOI: 10.32604/fdmp.2024.050059
19. *Lyubimova T., Rybkin K., Fattalov O., Kuchinskiy M., Filippov L.* Experimental study of temporal dynamics of cavitation bubbles selectively attached to the solid surfaces of different hydrophobicity under the action of ultrasound // *Ultrasonics*. 2021. Vol. 117. 106516. DOI: 10.1016/j.ultras.2021.106516
20. *Maxey M.R., Riley J.J.* Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // *The Physics of Fluids*. 1983. Vol. 26, no. 4. P. 883–889. DOI: 10.1063/1.864230
21. *Lyubimov D.V., Klimentov L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O.* The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 807. P. 205–220. DOI: 10.1017/jfm.2016.608
22. *Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // *Доклады Академии наук СССР*. 1961. Т. 140, № 1. С. 88–91.
23. *Saeidi D., Saghafian M., Haghjooy Javanmard S., Hammarström B., Wiklund M.* Acoustic dipole and monopole effects in solid particle interaction dynamics during acoustophoresis // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2019. Vol. 145, no. 6. P. 3311–3319. DOI: 10.1121/1.5110303
24. *Kshetri K.G., Nama N.* Acoustophoresis around an elastic scatterer in a standing wave field // *Physical Review E*. 2023. Vol. 108, no. 4. 045102. DOI: 10.1103/PhysRevE.108.045102
25. *Bharat B.* Encyclopedia of Nanotechnology. Springer Dordrecht, 2015. 2868 p. DOI: 10.1007/978-94-007-6178-0
26. *Clift R., Grace J.R., Weber M.E.* Bubbles, drops, and particles. Dover Publications, Inc., 2005. 381 p.
27. *Goossens W.R.A.* Review of the empirical correlations for the drag coefficient of rigid spheres // *Powder Technology*. 2019. Vol. 352. P. 350–359. DOI: 10.1016/j.powtec.2019.04.075
28. *Kaltenbacher M.* Computational Acoustics. Cham: Springer International Publishing, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-59038-7
29. *Sboev I., Lyubimova T., Rybkin K., Kuchinskiy M.* A Numerical Investigation of the Effect of Boundary Conditions on Acoustic Pressure Distribution in a Sonochemical Reactor Chamber // *Fluid Dynamics & Materials Processing*. 2024. Vol. 20, no. 6. DOI: 10.32604/fdmp.2024.051341
30. *Сбоев И.О., Любимова Т.П., Кучинский М.О., Рыбкин К.А.* Распределения акустического давления и зон кавитационной активности в жидкости: численное моделирование и эксперимент // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2025. Т. 18, № 1. С. 68–85. DOI: 10.7242/1999-6691/2025.18.1.6
31. *Chung J., Hulbert G.M.* A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method // *Journal of Applied Mechanics*. 1993. Vol. 60, no. 2. P. 371–375. DOI: 10.1115/1.2900803
32. *Jansen K.E., Whiting C.H., Hulbert G.M.* A generalized- α method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. Vol. 190, no. 3/4. P. 305–319. DOI: 10.1016/S0045-7825(00)00203-6
33. *Kuchinskiy M.O., Lyubimova T.P., Rybkin K.A., Galishevskiy V.A., Sadovnikova A.D.* Influence of ultrasound on the dynamics of an air bubble near a solid surface // *The European Physical Journal Special Topics*. 2024. Vol. 233, no. 8. P. 1695–1708. DOI: 10.1140/epjs/s11734-024-01243-x

Сведения об авторах:

Сбоев Иван Олегович (корр.), инж., АО «ОДК-Авиадвигатель», 614010, г. Пермь, Комсомольский пр-т, д. 93; e-mail: ivan-sboev@yandex.ru; ORCID: 0000-0002-8574-1267

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, зав. лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: lyubimovata@mail.ru; ORCID: 0000-0002-8212-2890

Рыбкин Константин Анатольевич, кфмн доц., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: k.rybkin@gmail.com; ORCID: 0000-0001-5922-0815

Research article

Numerical study of the motion of a solid particle in the field of ultrasonic standing wave

I.O. Sboev¹, T.P. Lyubimova², K.A. Rybkin³

¹ *UEC-Aviadvigatel, Perm, Russian Federation*

² *Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

³ *Perm State University, Perm, Russian Federation*

This numerical study examines the dynamics of a solid particle in a viscous fluid within a closed cavity under the influence of an ultrasonic standing wave. The study comprises two stages. First, the distribution of acoustic pressure in the quiescent fluid is calculated, ignoring disturbances induced by the particle or the flow. Two ultrasonic source configurations are considered: a planar ultrasonic vibrator extending throughout the entire lower boundary and a finite-size ultrasonic source. For a planar vibrator, the distribution of acoustic pressure of a harmonic plane wave is derived analytically from the one-dimensional Helmholtz equation. For finite-size sources, the same equation is numerically solved using the finite element method to account for the complex structure of the acoustic field and edge effects near the ultrasonic source. At the second stage, the computed pressure distribution is used to determine the spatial distribution of the Gor'kov potentials and the resulting acoustic radiation force, acting on the spherical particle of a specified size. The particle trajectory in the field of the ultrasonic standing wave is determined by solving numerically the equation of particle motion, taking into account the contributions from the added mass, acoustic radiation force, and drag force. The drag coefficient for the Reynolds numbers ranging from 0.1 to 0.8×10^3 is calculated using the Schiller–Naumann correlation. Numerical simulations are conducted for different initial positions of the particle. The calculated data are consistent with the known concept of the solid particle motion in the field of ultrasonic standing wave, according to which a solid particle under the influence of the acoustic radiation forces tends to get into the region of the Gor'kov potential minimum, involving the standing wave nodes. Numerical simulation of the solid particle motion in the field of ultrasonic standing wave induced by the finite-size ultrasonic radiator allowed us to describe the displacement of the particle in the direction perpendicular to the direction of wave propagation observed in experiments.

Keywords: ultrasonic standing wave, acoustic pressure distribution, Gorkov's potential, acoustic radiation force, drag force, particle dynamics, numerical simulation

Received: 06.11.2025 / *Published online:* 25.02.2026

Acknowledgements

The research was supported by the Russian Science Foundation (project № 24-11-00269).

References

1. *Lai T.W., Tennakoon T., Chan K.C., Liu C.-H., Chao C.Y.H., Fu S.C.* The effect of microchannel height on the acoustophoretic motion of sub-micron particles. *Ultrasonics*. 2024. Vol. 136. 107126. DOI: 10.1016/j.ultras.2023.107126
2. *Namnabat M.S., Moghimi Zand M., Houshfar E.* 3D numerical simulation of acoustophoretic motion induced by boundary-driven acoustic streaming in standing surface acoustic wave microfluidics. *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11, no. 1. 13326. DOI: 10.1038/s41598-021-90825-z
3. *Konovalov V.V., Lyubimova T.P., Prokopen S.A.* The interaction of a gas bubble and a solid particle in a liquid under acoustic vibrations. *Computational Continuum Mechanics*. 2023. Vol. 16, no. 2. P. 141–149. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.2.11
4. *Mao Y., Xia W., Peng Y., Xie G.* Ultrasonic-assisted flotation of fine coal: A review. *Fuel Processing Technology*. 2019. Vol. 195. 106150. DOI: 10.1016/j.fuproc.2019.106150
5. *Chen Y., Truong V.N.T., Bu X., Xie G.* A review of effects and applications of ultrasound in mineral flotation. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2020. Vol. 60. 104739. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2019.104739
6. *Bhangu S.K., Ashokkumar M.* Theory of Sonochemistry. *Sonochemistry: From Basic Principles to Innovative Applications*. 2016. P. 1–28. DOI: 10.1007/978-3-319-54271-3_1
7. *Viciconte G., Sarvothaman V.P., Guida P., Truscott T.T., Roberts W.L.* High-speed imaging and coumarin dosimetry of horn type ultrasonic reactors: influence of probe diameter and amplitude. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2025. 107362. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2025.107362

8. Wang X., Liang J. Single-bubble sonoluminescence at two adjacent antinodes in a standing wave acoustic field. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2025. 107662. DOI: 10.1016/j.ultrsonch.2025.107662
9. Bazyar H., Kandemir M.H., Peper J., Andrade M.A.B., Bernassau A.L., Schroën K., Lammertink R.G.H. Acoustophoresis of monodisperse oil droplets in water: Effect of symmetry breaking and non-resonance operation on oil trapping behavior. *Biomicrofluidics*. 2023. Vol. 17, no. 6. DOI: 10.1063/5.0175400
10. Shi Q., Baasch T., Liu Z., Fornell A., Werr G., Barbe L., Tenje M. Effects of the choice of the continuous phase in droplet microfluidics on internal particle manipulation with acoustophoresis. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2025. Vol. 157, no. 6. P. 4262–4272. DOI: 10.1121/10.0036771
11. Ma J., Liang D., Yang X., Wang H., Wu F., Sun C., Xiao Y. Numerical study of acoustophoretic manipulation of particles in microfluidic channels. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*. 2021. Vol. 235, no. 10. P. 1163–1174. DOI: 10.1177/09544119211024775
12. Jiao J., He Y., You P., Shan F., Cui D. The history force on bubbles translational motion in an acoustic field. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2020. Vol. 66. 105113. DOI: 10.1016/j.ultrsonch.2020.105113
13. Urbansky A., Ohlsson P., Lenshof A., Garofalo F., Scheduling S., Laurell T. Rapid and effective enrichment of mononuclear cells from blood using acoustophoresis. *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. 17161. DOI: 10.1038/s41598-017-17200-9
14. Kim U., Oh B., Ahn J., Lee S., Cho Y. Inertia–Acoustophoresis Hybrid Microfluidic Device for Rapid and Efficient Cell Separation. *Sensors*. 2022. Vol. 22, no. 13. 4709. DOI: 10.3390/s22134709
15. El Hassan M., Bukharin N., Al-Kouz W., Zhang J.-W., Li W.-F. A Review on the Erosion Mechanism in Cavitating Jets and Their Industrial Applications. *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, no. 7. 3166. DOI: 10.3390/app11073166
16. Isakovich M.A. *Obshchaya akustika*. Moscow: Nauka, 1973. 496 p.
17. Brekhovskikh L.M. *Volny v sloistykh sredakh*. Moscow: Nauka, 1973. 343 p.
18. Kuchinskiy M., Lyubimova T., Rybkin K., Sadovnikova A., Galishevskiy V. Investigation of Cavitation in NaCl Solutions in a Sonochemical Reactor Using the Foil Test Method. *Fluid Dynamics & Materials Processing*. 2024. Vol. 20, no. 5. DOI: 10.32604/fdmp.2024.050059
19. Lyubimova T., Rybkin K., Fattalov O., Kuchinskiy M., Filippov L. Experimental study of temporal dynamics of cavitation bubbles selectively attached to the solid surfaces of different hydrophobicity under the action of ultrasound. *Ultrasonics*. 2021. Vol. 117. 106516. DOI: 10.1016/j.ultras.2021.106516
20. Maxey M.R., Riley J.J. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *The Physics of Fluids*. 1983. Vol. 26, no. 4. P. 883–889. DOI: 10.1063/1.864230
21. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 807. P. 205–220. DOI: 10.1017/jfm.2016.608
22. Gor'kov L.P. On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid. *Soviet Physics Doklady*. 1962. Vol. 6. P. 773–775.
23. Saeidi D., Saghafian M., Haghjooy Javanmard S., Hammarström B., Wiklund M. Acoustic dipole and monopole effects in solid particle interaction dynamics during acoustophoresis. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2019. Vol. 145, no. 6. P. 3311–3319. DOI: 10.1121/1.5110303
24. Kshetri K.G., Nama N. Acoustophoresis around an elastic scatterer in a standing wave field. *Physical Review E*. 2023. Vol. 108, no. 4. 045102. DOI: 10.1103/PhysRevE.108.045102
25. Bharat B. *Encyclopedia of Nanotechnology*. Springer Dordrecht, 2015. 2868 p. DOI: 10.1007/978-94-007-6178-0
26. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. *Bubbles, drops, and particles*. Dover Publications, Inc., 2005. 381 p.
27. Goossens W.R.A. Review of the empirical correlations for the drag coefficient of rigid spheres. *Powder Technology*. 2019. Vol. 352. P. 350–359. DOI: 10.1016/j.powtec.2019.04.075
28. Kaltenbacher M. *Computational Acoustics*. Springer International Publishing, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-59038-7
29. Sboev I., Lyubimova T., Rybkin K., Kuchinskiy M. A Numerical Investigation of the Effect of Boundary Conditions on Acoustic Pressure Distribution in a Sonochemical Reactor Chamber. *Fluid Dynamics & Materials Processing*. 2024. Vol. 20, no. 6. DOI: 10.32604/fdmp.2024.051341
30. Sboev I.O., Lyubimova T.P., Kuchinskiy M.O., Rybkin K.A. Spatial distribution of acoustic pressure and cavitation activity zones in a fluid system: numerical modelling and experiment. *Computational Continuum Mechanics*. 2025. Vol. 18, no. 1. P. 68–85. DOI: 10.7242/1999-6691/2025.18.1.6
31. Chung J., Hulbert G.M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. *Journal of Applied Mechanics*. 1993. Vol. 60, no. 2. P. 371–375. DOI: 10.1115/1.2900803
32. Jansen K.E., Whiting C.H., Hulbert G.M. A generalized- α method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. Vol. 190, no. 3/4. P. 305–319. DOI: 10.1016/S0045-7825(00)00203-6
33. Kuchinskiy M.O., Lyubimova T.P., Rybkin K.A., Galishevskiy V.A., Sadovnikova A.D. Influence of ultrasound on the dynamics of an air bubble near a solid surface. *The European Physical Journal Special Topics*. 2024. Vol. 233, no. 8. P. 1695–1708. DOI: 10.1140/epjs/s11734-024-01243-x